Proposition de corrigé du sujet Centrale PC Physique 2 2024

Corrigé proposé par Mickaël Loire et Marc Legendre.

Q1 Par définition, le poids est la somme de la force de gravitation et de la force d'inertie d'entraînement (ici due à la rotation de la planète Mars sur elle-même). La force d'inertie d'entraînement est probablement ici négligeable (l'énoncé ne donne pas de données).

Q2 $\boxed{\overrightarrow{F}_{q1/q2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d^3}\overrightarrow{M_1M_2}}$

Q3 Analogies électrostatiques/gravitationnelles :

Électrostatique	Gravitation
q	m
ρ	ρ
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$-G$

Théorème de Gauss gravitationnel :

$$\mathrm{div}(\vec{g}) = -4\pi G\rho \qquad \Leftrightarrow \qquad \oiint \vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$$

Q4 La distribution de masses est :

— invariante par rotation d'angles θ et ϕ quelconques.

— Par les plans de symétries : $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ et $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\phi})$

Ainsi $\boxed{\vec{g}(r,\theta,\phi) = g_r(r)\,\vec{e_r}}$.

<u>Surface de Gauss :</u> sphère de rayon r.

<u>Hyp</u> : on néglige la contribution de l'atmosphère à $\vec{g}$.

l'application du théorème de Gauss gravitationnel conduit à

$$4\pi r^2 g_r(r) = -4\pi G m_m$$

$$\text{dc} \qquad g_r(r) = -\frac{Gm_m}{r^2}$$

$$\text{dc} \qquad \boxed{\vec{g}(r) = -\frac{Gm_m}{r^2}\,\vec{e_r}}$$

Q5 Au niveau du sol, $r = R_m$, $\vec{g_0} = -\frac{Gm_m}{R_m^2}\,\vec{e_r}$ donc $\boxed{\vec{g}(r) = -\left(\frac{R_m}{r}\right)^2\,\vec{g_0}}$. <u>AN : $g_0 = 3.73\,\mathrm{m.s^{-2}}$</u>.

Q6 La force volumique de pression s'écrit : $\boxed{\vec{f} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(P)}$.

Pour le système {Particule de fluide de volume $\mathrm{d}\tau$}, dans le référentiel martien supposé galiléen, et à l'équilibre, le TRC nous donne : $\boxed{\vec{0} = \mu\vec{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}(P)}$.

Q7 En assimilant l'atmosphère à un GP, on a $PV = nRT = \frac{mRT}{M_a}$ soit $\boxed{\mu = \frac{M_a P}{RT}}$.

D'après Q6, et après projection dans la base sphérique, on a :

$$-\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{M_a P g}{RT} \tag{1}$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \tag{2}$$

$$-\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial P}{\partial \phi} = 0 \tag{3}$$

Les lignes (2) et (3) impliquent que $P(r,\theta,\phi) = P(r)$ soit $\frac{dP}{dr} + \frac{P}{H} = 0$ avec $H = \frac{RT_0}{M_a g_0}$.
La condition aux limites $P(r = R_m) = P_0$ nous donne l'expression demandée : $\boxed{P(r,\theta,\phi) = C_0\, e^{-\frac{r-R_m}{H}}}$ avec $\boxed{H = \frac{RT_0}{M_a g_0}}$ et $\boxed{C_0 = P_0}$.

Q8 D'après les données de l'introduction relative à la composition de l'atmosphère :
$M_a = 96\% \times M_{\mathrm{CO_2}} + 2\% \times M_{\mathrm{Ar}} + 2\% \times M_{\mathrm{N_2}}$. AN : $M_a = 44\,\mathrm{g.mol^{-1}}$ et $H = 10.7\,\mathrm{km}$.

Q9 D'après Q7, $\boxed{\mu(r,\theta,\phi) = \mu_0\, e^{-\frac{r-R_m}{H}}}$ avec $\boxed{H = \frac{RT_0}{M_a g_0}}$ et $\boxed{\mu_0 = \frac{M_a P_0}{RT_0}}$.

Q10 Déterminons m par intégration de μ. On supposera que l'hypothèse g uniforme est encore valable.

$$\begin{aligned}
m_{\mathrm{atm}} &= \iiint_{V_{\mathrm{int}}} \mu\, \mathrm{d}\tau \\
&= \int_{r=R_m}^{+\infty} \mu_0 e^{-\frac{r-R_m}{H}} 4\pi r^2\, \mathrm{d}r \\
&= 4\pi\mu_0 H^3 \int_0^{+\infty} \left(u + \frac{R_m}{H}\right)^2 e^{-u} \mathrm{d}u \\
&= 4\pi\mu_0 H^3 \times \left(2 + 2\frac{R_m}{H} + \left(\frac{R_m}{H}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

En utilisant les intégrales données en fin d'énoncé.
Avec $\mu_0 H = \frac{P_0}{g_0}$, on obtient le résultat demandé : $\boxed{m_{\mathrm{atm}} = 4\pi \frac{P_0}{g_0} \left(2H^2 + 2HR_m + R_m^2\right)}$.
AN : $m_{\mathrm{atm}} = 2.34 \cdot 10^{16}\,\mathrm{kg}$.

Q11 Interprétation du libre parcours moyen : il s'agit de la distance moyenne parcourue entre deux collisions.
En considérant qu'on a 1 seule particule dans le volume $a^2 l$, on a $l = \frac{M_a}{a^2 \mathcal{N}_a \mu}$. Or au niveau du sol $\mu_0 = \frac{M_a P_0}{RT_0}$ donc $\boxed{l_0 = \frac{RT_0}{a^2 \mathcal{N}_a P_0}}$. AN avec $a \approx 10^{-10}\,\mathrm{m}$, $l_0 \approx 0.5\,\mathrm{mm}$. Cet ordre de grandeur est plus grand que dans les CNTP car à la surface martienne, $P_0 = 600\,\mathrm{Pa}$ et non pas $1\,\mathrm{bar}$.

Q12 Par défintion de e, en $r = R_m + e$, on a $H = l(r = R_m + e) = \frac{M_a}{a^2 N_a \mu_0 e^{-e/H}} = l_0 e^{e/H}$. Ainsi on trouve $\boxed{e = H \ln\left(\frac{H}{l_0}\right)}$. AN : $l_0 = 1.8 \cdot 10^5\,\mathrm{m}$

Q13 Déterminons au préalable la vitesse de libération d'une particule de masse m.
La vitesse de libération v est solution de l'équation $0 = E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gm_m m}{R_m + e}$. On isole $v = \sqrt{\frac{2Gm_m}{R_m+e}}$.
Avec $Gm_m = R_m^2 g_0$, on a $\boxed{v = \sqrt{\frac{2R_m^2 g_0}{R_m+e}} \approx \sqrt{2R_m g_0}}$ pour $e \ll R_m$. AN : $v \approx 5.0 \cdot 10^3\,\mathrm{m.s^{-1}}$.
D'après la figure 2, les molécules de dihydrogène possèdent très majoritairement une vitesse supérieure à $V_{\text{libération}}$, ce qui expliquerait son absence dans l'atmosphère martienne. Par contre, les éléments les plus lourds seront conservés par l'atmosphère, c'est le cas ici du CO_2, Ar (et non pas He et Ne plus légers), et de N_2. Notons que pour les hautes couches, l'échauffement thermique dû au rayonnement solaire, peut provoquer une augmentation des vitesses et donc une « évaporation » supplémentaire.

Q14 En ordre de grandeur, en considérant une molécule par volume d^3 on a $\boxed{n^* = \frac{1}{d^3}}$. Ainsi $\boxed{\mu = \frac{M_a}{N_a d^3}}$.

Q15 Modèle continu : $d \ll e$. Or $d = \left(\frac{N_a \mu}{M_a}\right)^{-\frac{1}{3}}$ d'après Q14 et $\mu = \mu_0 e^{-\frac{r-R_m}{H}}$ dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme. Ainsi $d = \left(\frac{N_a \mu_0}{M_a}\right)^{-\frac{1}{3}} e^{\frac{r-R_m}{3H}}$. Il faut donc choisir $\boxed{r - R_m \ll 3H \ln\left(e\left(\frac{N_a \mu_0}{M_a}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}$. AN : $r - R_m \ll 1.0 \cdot 10^6$ m. Le modèle continu est notamment valable dans l'exosphère à 10% près.

Q16 En simplifiant l'équation de Navier -Stokes :

$$\begin{array}{rcl} \text{RS} & \Rightarrow & \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \\ \text{Parfait} & \Rightarrow & \eta = 0 \\ \vec{v} = v_r(r)\vec{u_r} & \Rightarrow & (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = v\frac{\partial \vec{v}}{\partial r} \end{array}$$

on obtient l'équation $\boxed{\mu v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{G m_m \mu}{r^2}}$.

Q17 Pour un GP, $P = \frac{RT\mu}{M_a}$ ainsi l'équation Q15 se simplifie en $\boxed{\mu v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{RT}{M_a}\frac{\partial \mu}{\partial r} - \frac{G m_m \mu}{r^2}}$.

Q18 L'écoulement est stationnaire donc le débit massique se conserve. Sur la sphère de rayon r, où v est uniforme, on a cste$= 4\pi r^2 \mu v$ d'où $\boxed{\mu r v = \text{cste} = K}$.

Q19 En multipliant l'équation Q17 par r^2 et en réinjectant $\mu = \frac{K}{r^2 v}$, on a :

$$\begin{aligned} K\frac{dv}{dr} &= -\frac{RT}{M_a} r^2 \frac{d}{dr}\left(\frac{K}{vr^2}\right) - G m_m \frac{K}{vr^2} \\ &= \frac{RTK}{M_a}\left(\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dr} + \frac{2}{vr}\right) - \frac{G m_m K}{vr^2} \end{aligned}$$

En simplifiant par K et factorisant les termes en $\frac{dv}{dr}$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dr} \times \left(1 - \frac{RT/M_a}{v^2}\right) &= \frac{1}{v}\left(\frac{2RT/M_a}{r} - \frac{G m_m}{r^2}\right) \\ \text{donc} \quad \frac{dv}{dr} \times \left(\frac{v^2}{RT/M_a} - 1\right) &= v\left(\frac{2}{r} - \frac{G m_m M_a/RT}{r^2}\right) \end{aligned}$$

On obtient le résultat demandé en divisant par v :

$$\boxed{\frac{1}{v}\frac{dv}{dr} \times \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) = 2\left(\frac{1}{r} - \frac{r*}{r^2}\right)} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{c = \sqrt{\frac{RT}{M_a}}} \quad \text{et} \quad \boxed{r^* = \frac{G m_m M_a}{2RT}}$$

Q20 Homogénéité :
$\left[\frac{RT}{M_a}\right] = \left[\frac{kT}{m}\right] = [v^2]$ donc <u>l'expression de c est homogène</u>.
$\left[\frac{G m_m M_a}{2RT}\right] = \left[\frac{G m_m m}{2kT}\right] = \frac{\text{J.m}}{\text{J}} = \text{m}$ donc <u>l'expression de r^* est homogène</u>.
<u>AN : $c = 200\,\text{m.s}^{-1}$</u> et <u>$r^* = 5.35 \cdot 10^8$ m</u>

Q21 En remplaçant r par r^* dans Q19, et en notant que d'après l'énoncé $\frac{1}{v}\frac{dv}{dr}(r = r^*) \neq 0$, on obtient $v(r^*) = \pm c$. En ne gardant que la solution positive (champ des vitesses traduisant un échappement de l'atmosphère), on a $\boxed{v(r^*) = c}$.

Q22 En intégrant l'équation Q19 avec la condition aux limites précédente on obtient :

$$\boxed{\frac{v^2}{2c^2} - \ln\left(\frac{v}{c}\right) = 2\left(\ln\left(\frac{r}{r^*}\right) + \frac{r*}{r}\right) - \frac{3}{2}}$$