Franck Laloë

# Comprenons-nous vraiment la mécanique quantique ?

## 2e édition, révisée et augmentée

SAVOIRS ACTUELS

EDP Sciences/CNRS Éditions

**Dans la même collection :**

*Mécanique quantique - Tome III*
Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu et Franck Laloë

*Cohomologie galoisienne - Et théorie du corps de classes*
David Harari

*Optique non linéaire*
François Hache

*Chimie verte - Concepts et applications*
Jacques Augé et Marie-Christine Scherrmann

*De la solution à l'oxyde - Chimie aqueuse des cations métalliques, Synthèse de nanostructures*
Jean-Pierre Jolivet

*Physique de la conversion d'énergie*
Jean-Marcel Rax

Retrouvez tous nos ouvrages et nos collections sur
http://laboutique.edpsciences.fr

Imprimé en France

© **2017, EDP Sciences**, 17 avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtabœuf, 91944 Les Ulis Cedex A

et

**CNRS Éditions**, 15, rue Malebranche, 75005 Paris.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.

EDP Sciences, ISBN (papier) : 978-2-7598-2184-6, ISBN (ebook) : 978-2-7598-2185-3
CNRS Éditions, ISBN : 978-2-271-07232-0

# Table des matières

**Préface** **ix**

**Avant-propos** **xi**

**I Perspective historique** **1**
A Trois périodes . . . . . 2
A-1 Préhistoire . . . . . 3
A-2 La période ondulatoire . . . . . 4
A-3 Emergence de l'interprétation de Copenhague . . . . . 5
B Le vecteur d'état . . . . . 8
B-1 Définition, équation de Schrödinger, règle de Born . . 8
B-2 Processus de mesure . . . . . 10
B-3 Statut . . . . . 14
C Autres formalismes, théorie des champs, intégrales de chemin 19

**II Situation actuelle, des difficultés conceptuelles subsistent** **23**
A La chaîne (ou régression) sans fin de von Neumann . . . . . 26
B Le chat de Schrödinger ; mesures . . . . . 29
B-1 L'argument . . . . . 29
B-2 Malentendus . . . . . 32
B-3 Lien avec le problème de la mesure . . . . . 34
B-4 Les chats nouvelle vague . . . . . 35
C L'ami de Wigner . . . . . 35
D Mesures négatives et "sans interaction" . . . . . 37
E Une grande variété de points de vue . . . . . 44
F Des arguments peu convaincants . . . . . 51

**III Le théorème d'Einstein, Podolsky et Rosen** **53**
A Un théorème . . . . . 54
B Des pois, des gousses, et de leurs gènes . . . . . 56
B-1 Une expérience simple ; pas de conclusion à ce stade . 56
B-2 Corrélations ; les causes dévoilées . . . . . 57
C Transposition à la physique . . . . . 60

C-1 L'argument EPR pour deux particules microscopiques corrélées . . . . . 60
C-2 La réponse de Bohr . . . . . 65
C-3 Localité, relativité, séparabilité . . . . . 69
D Généralisations . . . . . 72
D-1 Etats EPR généralisés . . . . . 72
D-2 L'argument EPR pour des systèmes macroscopiques . 76

**IV Le théorème de Bell 79**
A Inégalités de Bell . . . . . 80
A-1 Mécanique quantique : deux spins dans un état singulet 80
A-2 Réalisme local : démonstration de l'inégalité BCHSH . 82
A-3 Contradiction entre l'inégalité et la mécanique quantique 84
A-4 Contenu logique . . . . . 90
A-5 Contradiction avec les expériences . . . . . 92
B Diverses démonstrations du théorème . . . . . 95
B-1 Autres hypothèses de départ . . . . . 95
B-2 Généralisations du théorème, théories non déterministes 97
B-3 Statut du théorème ; tentatives de le contourner . . . . 111
C Impact du théorème de Bell, échappatoires . . . . . 112
C-1 Echappatoires (loopholes), conspirations . . . . . 113
C-2 La mécanique quantique est-elle non locale ? Contrafactualité . . . . . 125

**V Autres inégalités, limite de Cirelson, transmission de signaux 129**
A Autres inégalités . . . . . 130
A-1 Bell 1964 . . . . . 130
A-2 Inégalités de Wigner et d'Espagnat . . . . . 131
A-3 Inégalité de Mermin . . . . . 134
A-4 Inégalité de Clauser et Horne . . . . . 136
A-5 Inégalités de Eberhard . . . . . 141
A-6 Le jeu de Bell . . . . . 148
B Théorème de Cirelson . . . . . 150
B-1 Mesures sur deux systèmes à deux niveaux . . . . . 151
B-2 Violation quantique maximale . . . . . 152
C Relativité, localité, théorie des champs . . . . . 154
C-1 Bohr et l'espace-temps . . . . . 155
C-2 La théorie des champs résoud-elle le problème ? . . . . 156
D Non-transmission instantanée de signaux . . . . . 157
D-1 Conditions NS de non-transmission instantanée de signaux . . . . . 158
D-2 Boîtes logiques . . . . . 159

D-3 Boîte de Popescu-Rohrlich et corrélations "superquantiques" . . . 162
D-4 Comment caractériser la théorie quantique ? . . . 164

**VI Autres théorèmes 167**
A Propriétés quantiques des états GHZ . . . 167
A-1 Contradictions GHZ . . . 167
A-2 Inégalité de GHZ-Mermin . . . 172
A-3 Généralisations de GHZ . . . 174
B Inégalité de Cabello . . . 177
B-1 Réalisme local . . . 178
B-2 Contradiction avec la mécanique quantique . . . 180
C Impossibilités de Hardy . . . 180
D Théorème de Bell-Kochen-Specker ; contextualité . . . 184
D-1 Particule de spin 1 . . . 185
D-2 Inégalité du pentagramme . . . 187
D-3 Deux particules de spin 1/2, règle du produit . . . 191
D-4 Contextualité et réalisme local . . . 193
E Réalité du vecteur d'état . . . 194
E-1 $\psi$ ontique ou épistémique ? . . . 195
E-2 Théorème PBR . . . 196
E-3 Théorèmes similaires . . . 199

**VII Intrication quantique 203**
A Une notion purement quantique . . . 204
A-1 La partie et le tout . . . 205
A-2 Deux origines possibles des corrélations . . . 208
B Caractérisations de l'intrication . . . 209
B-1 Ambiguïté de l'intrication . . . 209
B-2 Décomposition de Schmidt d'un état pur . . . 211
B-3 Entropies statistiques . . . 214
B-4 Mesures de l'intrication . . . 215
B-5 Monogamie . . . 216
B-6 Critère de séparabilité pour l'opérateur densité . . . 217
C Création et perte de l'intrication . . . 218
C-1 Intrication par interactions locales . . . 218
C-2 Echange d'intrication . . . 220
C-3 Décohérence . . . 223
C-4 Purification, distillation . . . 230
D Dynamique quantique d'un sous-système . . . 231
D-1 Opérateurs de Kraus . . . 231
D-2 Opérateur densité, somme de Kraus . . . 234
D-3 Equation pilote, forme de Lindblad . . . 235

**VIII Applications de l'intrication** **239**
A Deux théorèmes . . . . . 240
A-1 Non-clonage . . . . . 240
A-2 Non-détermination d'un état avec une seule réalisation 242
A-3 Conséquences en termes de transmission de signaux . . 243
B Cryptographie quantique . . . . . 243
B-1 Distribution de clés cryptographiques . . . . . 244
B-2 Exemples de protocoles d'échange de clés . . . . . 245
C Téléportation d'un état quantique . . . . . 251
D Calcul et simulation quantiques . . . . . 254
D-1 Principe général . . . . . 255
D-2 Portes quantiques et algorithmes . . . . . 256
D-3 Codes de correction quantique des erreurs . . . . . 258
D-4 Simulation quantique . . . . . 259

**IX Mesure quantique** **261**
A Mesures directes . . . . . 261
A-1 Mesure idéale, modèle de von Neumann . . . . . 262
A-2 Effets de l'environnement, états pointeurs . . . . . 265
A-3 Le paradoxe de Hund . . . . . 267
A-4 Le théorème WAY (Wigner-Araki-Yanase) . . . . . 269
B Mesures indirectes . . . . . 273
B-1 Un modèle simple : système à deux niveaux . . . . . 274
B-2 Généralisation : POVM . . . . . 277
C Mesures faibles et continues . . . . . 279
C-1 Valeurs faibles . . . . . 279
C-2 Mesures continues . . . . . 283

**X Expériences : la réduction quantique en temps réel** **293**
A Ion unique dans un piège . . . . . 294
B Electron unique piégé . . . . . 298
C Nombre de photons dans une cavité . . . . . 301
D Phase spontanée de condensats de Bose-Einstein . . . . . 304
D-1 Interférences dans une région de l'espace . . . . . 305
D-2 Une variable supplémentaire ? . . . . . 306
D-3 Non-localité de la phase . . . . . 308

**XI Diverses interprétations et reconstructions de la mécanique quantique** **313**
A Pragmatisme dans les laboratoires . . . . . 314
A-1 Interrompre "à la main" la chaîne de von Neumann . . 315
A-2 Interprétation des corrélations . . . . . 317
A-3 Mettre l'accent sur l'information . . . . . 322

B Interprétations statistiques (ensemblistes) . . . 323
C Interprétation relationnelle, vecteur d'état relatif . . . 326
C-1 Interprétation relationnelle . . . 326
C-2 Point de vue informationnel pur . . . 328
D Approches logiques, algébriques et déductives . . . 331
D-1 Logique quantique . . . 332
D-2 Théories algébriques, formelles, et axiomatiques . . . 334
D-3 Théorème de Gleason . . . 335
E Le réel voilé . . . 338
F Réel contextuel quantique . . . 338
G Histoires cohérentes . . . 339
G-1 Histoires, familles d'histoires . . . 340
G-2 Familles cohérentes . . . 342
G-3 Evolution quantique d'un système isolé . . . 343
G-4 Incompatibilité des familles différentes . . . 346
G-5 Comparaison avec d'autres interprétations . . . 346
G-6 Une profusion d'histoires ; discussion . . . 349
H Variables supplémentaires ("cachées") . . . 352
H-1 Théorie de De Broglie-Bohm (dBB) . . . 353
H-2 Mécanique de Nelson . . . 391
J Interprétations modale et interactive . . . 393
K Dynamique de Schrödinger modifiée . . . 396
K-1 Evolution des idées . . . 398
K-2 Description de la réalité dans le cadre d'une théorie à dynamique modifiée . . . 410
K-3 Systèmes quantiques ouverts en mécanique quantique standard . . . 415
K-4 Dynamique de Schrödinger attractive . . . 415
L Interprétation transactionnelle . . . 418
M Interprétation d'Everett . . . 419
M-1 Aucune limite pour l'équation de Schrödinger . . . 419
M-2 Développement logique de l'interprétation . . . 421
M-3 Discussion . . . 427

**Conclusion** **432**

**XII Annexe : outils mathématiques de base** **435**
A Système physique général . . . 436
A-1 Espace des états quantiques . . . 436
A-2 Opérateurs . . . 437
A-3 Probabilités . . . 440
A-4 Evolution dans le temps . . . 441
A-5 Points de vue de Schrödinger et de Heisenberg . . . 442

A-6 Opérateur densité . . . . . 443
A-7 Un cas simple : le spin 1/2 . . . . . 447
B Réunion de plusieurs systèmes physiques . . . . . 448
B-1 Produit tensoriel . . . . . 448
B-2 Ensemble de spins 1/2 . . . . . 450
B-3 Traces partielles . . . . . 451
C Particules dans un potentiel . . . . . 453
C-1 Une seule particule . . . . . 453
C-2 Spin, expérience de Stern et Gerlach . . . . . 455
C-3 Plusieurs particules . . . . . 458

**APPENDICES**

**Appendice A : Contenu "mental" du vecteur d'état** . . . . 461
**Appendice B : Inégalités de Bell et théories locales non déterministes** . . . . . 463
**Appendice C : Une tentative pour construire une théorie quantique séparable** . . . . . 469
**Appendice D : Probabilité maximale pour un état particulier** . . . . . 473
**Appendice E : Influence d'une sélection des paires observées** 475
**Appendice F : Impossibilité d'une transmission superluminale de messages** . . . . . 481
**Appendice G : Mesures quantiques à des instants différents** 487
**Appendice H : Manipulation des variables supplémentaires** 493
**Appendice I : Corrélations et trajectoires en théorie de Bohm** . . . . . 497
**Appendice J : Modèles de réduction spontanée du vecteur d'état** . . . . . 513
**Appendice K : Familles d'histoires cohérentes** . . . . . 519
**Appendice L : Dynamique de Schrödinger attractive** . . . 523

**BIBLIOGRAPHIE** **532**

**INDEX** **589**

********

# Préface

La mécanique quantique est désormais une discipline scientifique de base, enseignée dans toutes les universités. Elle permet de rendre compte du comportement du monde microscopique avec une précision impressionnante, et en particulier du fonctionnement de tous les objets techniques (ordinateurs, téléphones mobiles, disques laser, etc.) que nous utilisons dans notre vie courante. Une pratique quotidienne de cette discipline permet au physicien d'acquérir une certaine maîtrise dans le maniement du formalisme quantique, une certaine intuition des erreurs qu'il ne faut pas commettre, de la démarche qu'il faut suivre pour parvenir au résultat correct. Cependant, lequel d'entre nous n'a pas ressenti, au moins une fois dans son parcours scientifique, un certain trouble concernant les fondements de la théorie quantique, l'impression qu'une formulation convaincante et satisfaisante de cette théorie restait encore à élaborer.

Un grand nombre d'ouvrages d'enseignement de la mécanique quantique sont désormais disponibles, qui présentent en détail le formalisme quantique traditionnel et la manière dont il permet de rendre compte des propriétés des atomes et molécules, des corps solides et liquides, des interactions matière-rayonnement, et plus généralement du monde physique qui nous entoure. D'autres livres retracent l'histoire de l'élaboration de cette discipline, et décrivent les diverses étapes qui ont conduit à sa formulation moderne. Rares sont cependant ceux qui présentent, d'une part une revue des difficultés conceptuelles de la théorie, et d'autre part un panorama complet de toutes les tentatives de reformulation de la mécanique quantique ayant pour but de résoudre, au moins partiellement, ces difficultés.

L'ouvrage présent de Franck Laloë répond à ces deux objectifs. Il introduit et discute en détail un certain nombre de résultats et de notions, comme le théorème d'Einstein-Podolsky-Rosen, le théorème de Bell, l'intrication quantique, qui illustrent clairement le caractère étrange du comportement quantique. Au cours des dernières décennies, des progrès expérimentaux importants ont été réalisés. Par exemple, il est devenu possible de suivre l'évolution en temps réel d'un atome unique. De nombreuses expériences, considérées comme des "expériences de pensée" par les pères fondateurs de

la mécanique quantique sont devenues réalisables. Ces expériences sont brièvement passées en revue, ce qui permet de faire le point sur les résultats acquis à ce jour, comme la démonstration convaincante d'une violation des inégalités de Bell.

Une grande partie de ce livre est par ailleurs consacrée à une présentation claire et objective des différentes formulations alternatives qui ont été jusqu'ici proposées pour remplacer la théorie "orthodoxe" traditionnelle. Un grand soin est apporté au respect de la logique propre et de la cohérence interne de chacune de ces formulations. Le lecteur peut ainsi se forger une idée précise de ces tentatives et acquérir une vision globale de l'état de la discipline. A une époque où la spécialisation des recherches s'accentue de plus en plus, il me paraît crucial de ménager des temps de réflexion, où l'on essaie de prendre du recul et de se poser des questions sur la signification profonde des concepts que l'on utilise. Je suis sûr que le présent ouvrage sera précieux pour entreprendre une telle réflexion. J'y reconnais les qualités de clarté, de rigueur intellectuelle, de profondeur de l'analyse que j'ai toujours grandement appréciées chez l'auteur tout au long de nombreuses années de collaboration amicale. Je souhaite à cet ouvrage de rencontrer le succès qu'il mérite.

Claude Cohen-Tannoudji

# Avant-propos

La mécanique quantique est une théorie étonnante dans tous les sens du terme. C'est un lieu commun que de faire remarquer qu'elle est peu intuitive, souvent contraire à toute représentation des phénomènes physiques issue de notre expérience journalière. Mais elle est également étonnante par le contraste qu'elle présente entre ses triomphes et ses difficultés.

D'une part, de toutes les théories scientifiques, la mécanique quantique est probablement l'une des plus couronnées de succès. Inventée initialement dans le cadre de la physique atomique, elle a rapidement débordé dans de très nombreux domaines, permettant de concevoir et de réaliser maintes expériences en optique, en physique du solide, des liquides, en astrophysique, etc. Plus qu'une simple théorie, elle est ainsi devenue une méthode générale, un cadre qui a permis de développer la théorie des fluides et des solides, celle des champs, celle des particules élémentaires et l'unification des interactions en physique. Elle a ainsi très largement dépassé les objectifs initiaux de ses inventeurs sans qu'il soit nécessaire, ce qui est vraiment remarquable, de modifier les principes généraux de la théorie qu'ils avaient élaborée. Ses applications sont multiples, peuplant notre environnement au XXI$^{\text{e}}$ siècle de multiples dispositifs qui auraient été inimaginables il y a 50 ans.

D'autre part, cependant, cette théorie reste relativement fragile du fait des difficultés conceptuelles et d'interprétation qu'elle présente, sans d'ailleurs que cela affecte son efficacité. Ce n'est pas que les physiciens aient voulu ignorer ou occulter ces difficultés, bien au contraire ! En témoigne le nombre important d'interprétations de la théorie qui ont été proposées au cours des décennies, mettant en jeu des méthodes d'approche et des techniques mathématiques souvent très diverses. C'est une situation rare dans l'histoire des sciences : un consensus général se dégage concernant une approche des phénomènes et des méthodes de calcul, dont la puissance prédictive est extraordinaire ; et cependant, presque un siècle après l'introduction de ces méthodes, le même consensus est loin d'être obtenu en ce qui concerne l'interprétation de la théorie, sa base en quelque sorte. On retrouve l'image du colosse d'airain aux pieds d'argile.

L'essentiel des difficultés fondamentales de la mécanique quantique tient au vecteur d'état $|\Psi\rangle$ qu'elle utilise pour décrire les systèmes physiques. Alors

qu'en mécanique classique un système est décrit de façon directe par des positions et des vitesses, en mécanique quantique il s'y substitue l'objet mathématique $|\Psi\rangle$, qui n'en donne qu'une description relativement indirecte. C'est un énorme changement, non seulement sur le plan mathématique, mais aussi conceptuel ; c'est lui qui ouvre la porte à de nombreuses discussions concernant l'interprétation de la théorie. Beaucoup des difficultés rencontrées par ceux qui ont essayé (ou essayent toujours) de "vraiment comprendre" la mécanique quantique sont liées aux questions concernant le statut exact de $|\Psi\rangle$. Le vecteur d'état décrit-il la réalité physique elle-même, ou seulement une connaissance (partielle) que nous aurions de cette réalité ? Décrit-il seulement des ensembles de systèmes (description statistique), ou un système physique unique (une seule réalisation, un événement unique) ? Si $|\Psi\rangle$ contient une composante reliée à notre connaissance imparfaite de la réalité du système, n'est-il alors pas naturel de rechercher une description plus précise, qui devrait exister au moins en principe ? Dans ce cas, quelle serait cette meilleure description de la réalité ?

Une autre propriété troublante de $|\Psi\rangle$ est que, pour des systèmes physiques qui sont étendus dans l'espace (par exemple un système physique constitué de deux particules éloignées), le vecteur d'état donne une description globale de toutes les propriétés physiques du système, en un tout indissociable d'où la notion d'espace semble avoir disparu ; les propriétés des deux systèmes peuvent être "intriquées" d'une telle façon que les notions habituelles d'espace-temps et d'événement (au sens de la relativité) paraissent s'être en quelque sorte diluées. En particulier il peut devenir difficile, voire impossible, de donner une représentation spatio-temporelle de leurs corrélations qui reste compatible avec la relativité. Tout cela est évidemment très contraire aux concepts habituels en physique classique, où l'on attribue des propriétés locales aux systèmes physiques en spécifiant en chaque point de l'espace la densité, la valeur du champ, etc. En mécanique quantique, cette séparabilité entre les contenus physiques des différents points de l'espace n'est plus possible en général. Bien sûr, on pourrait penser que cette perte d'une description locale est juste une propriété innocente du formalisme, sans conséquence particulière. On sait par exemple, en électromagnétisme classique, qu'il est souvent commode d'introduire de façon intermédiaire un choix de jauge pour décrire les champs ; dans la jauge de Coulomb, le potentiel se propage de façon instantanée, alors que la relativité d'Einstein interdit la propagation d'un signal plus rapidement qu'à la vitesse de la lumière. Mais cette propagation instantanée est juste un artefact mathématique qui disparaît dès qu'un calcul complet est effectué : on voit alors apparaître des annulations entre termes opposés qui, au bout du compte, font que la limitation relativiste est parfaitement respectée. N'en serait-il pas de même pour le formalisme de la mécanique quantique ? En réalité nous verrons que, dans le cadre de cette théorie, la situation est bien plus compliquée qu'en élec-

tromagnétisme classique ; en fait, une intrication contenue dans l'expression mathématique de $|\Psi\rangle$ peut parfaitement avoir des conséquences physiques importantes sur les résultats des expériences, et même conduire à des prédictions qui, en un certain sens, sont en contradiction avec la localité. Sans aucun doute, le vecteur d'état est vraiment un curieux objet pour décrire la réalité !

Il n'est donc pas surprenant que la mécanique quantique ait donné lieu à des interprétations variées. De par leur diversité même, ces interprétations sont intéressantes. Chacune apporte son cadre conceptuel et sa conception générale propre de la physique, lui donnant parfois un statut particulier parmi les autres sciences de la Nature. Plusieurs d'entre elles permettent de jeter des regards complémentaires sur la théorie, mettant en lumière certaines propriétés particulières qui autrement seraient passées inaperçues. L'exemple le plus connu est celui de la théorie de Bohm, dont l'étude a conduit Bell à un théorème illustrant des propriétés générales de la mécanique quantique, mais qui dépasse largement le cadre de cette théorie. On peut en citer d'autres, comme l'utilisation de la dynamique de Schrödinger stochastique qui permet de mieux comprendre l'évolution d'un sous-système quantique, l'interprétation des histoires et son éclairage sur la complémentarité, etc.

Ce livre s'adresse au lecteur curieux qui désire connaître la situation générale de la physique quantique, ainsi que la nature des interprétations auxquelles elle a donné lieu, sans que les difficultés soient passées sous silence. Ce n'est pas un "textbook", destiné aux étudiants voulant apprendre les premiers éléments de mécanique quantique ; il existe déjà de nombreux ouvrages de référence qui sont excellents. D'ailleurs, à partir du Chapitre I, le texte suppose une certaine familiarité du lecteur avec la mécanique quantique et son formalisme de base (notation de Dirac, notion de fonction d'onde, etc.). Tout étudiant qui a déjà derrière lui une année de mécanique quantique n'aura cependant aucune difficulté à suivre les équations. L'ouvrage en contient relativement peu car il se concentre, non pas sur les difficultés techniques, mais logiques et conceptuelles. De plus, un chapitre en annexe est inséré à la fin du livre pour aider ceux qui n'ont guère l'habitude du formalisme quantique. Il propose un premier contact avec les notations ; le lecteur pourra, au fur et à mesure de sa progression dans les autres chapitres, revenir sur un paragraphe du chapitre annexe afin de préciser tel ou tel point particulier.

Les Chapitres I et II retracent le contexte historique depuis l'origine de la mécanique quantique jusqu'à la situation actuelle, tout en mentionnant les difficultés qui subsistent. Nous pourrons ainsi rappeler quelles ont été les étapes successives qui ont fait émerger le statut actuel du vecteur d'état $|\Psi\rangle$. Prendre le temps de se pencher sur l'histoire de l'émergence des idées n'est pas inutile dans un domaine où, souvent et de façon récurrente, les mêmes idées sont redécouvertes ; elles refont surface régulièrement, soit parfois presque identiques à des décennies de distance, soit parfois mises au goût

du jour avec un vocabulaire différent, tout en restant très semblables sur le fond. Dans ces conditions, commencer par un examen du passé n'est pas forcément une perte de temps ! Les Chapitres III et IV sont consacrés à deux théorèmes importants qui s'enchaînent, celui de EPR (Einstein, Podolsky et Rosen) et celui de Bell, ce dernier donnant lieu à différentes variantes dont certaines sont décrites. Les Chapitres V et VI introduisent et discutent un certain nombre de théorèmes plus récents qui se situent dans la même ligne, ainsi que leurs conséquences concernant le statut du vecteur d'état. Le Chapitre VII aborde de façon plus générale les propriétés de l'intrication quantique, qui sont illustrées au Chapitre VIII par une discussion de quelques processus physiques qui la mettent en œuvre, comme cryptographie quantique ou téléportation. Les propriétés de la mesure quantique sont discutées au Chapitre IX, en particulier les notions de mesure faible et de mesure continue. Quelques expériences sont décrites au Chapitre X ; parmi la multitude de celles qui illustrent la mécanique quantique, elles ont été choisies parce qu'elles permettent de voir "en temps réel" les effets de la réduction du vecteur d'état dans un processus de mesure quantique. Enfin le Chapitre XI, le plus important en nombre de pages, discute les différentes interprétations de la mécanique quantique. Ce plan n'est pas un passage obligé pour le lecteur, les chapitres étant relativement indépendants.

Le but du présent ouvrage n'est certainement pas de mettre en avant telle ou telle interprétation, comme l'ont déjà fait de nombreux ouvrages et articles excellents (nous en citerons un bon nombre). Il est encore moins de proposer une nouvelle interprétation qui résoudrait miraculeusement tous les problèmes. Son objectif est plutôt de passer en revue ces diverses interprétations, afin de dégager un point de vue général sur la façon dont elles s'articulent, leurs différences ou leurs points communs, leur cohérence individuelle. Chacune de ces interprétations possède en effet sa logique propre, qu'il est important de respecter. Une erreur classique est de mélanger des composantes de différentes interprétations. Par exemple, la mécanique quantique "bohmienne" a parfois été critiquée à partir de constructions intellectuelles qui en retiennent certains éléments, mais pas tous, ou y insèrent des éléments qui lui sont étrangers ; on arrive alors à des contradictions, mais cela n'apporte guère d'élément logique pour ou contre la véritable approche bohmienne. Cette nécessité de cohérence logique est générale dans le contexte des fondements de la mécanique quantique. Il est arrivé que l'argument EPR ou le théorème de Bell soient mal compris, par exemple à cause d'une confusion entre hypothèses et conclusions. Nous nous efforcerons de signaler au passage quand de telles erreurs sont possibles, afin d'aider à les éviter. Précisons d'emblée qu'il n'est pas question de prétendre donner une présentation exhaustive de toutes les interprétations de la mécanique quantique ! Elles peuvent être combinées de tant de façons différentes qu'il est impossible de rendre compte de toutes les associations ou nuances possibles. Nous nous li-

miterons donc à une introduction des grandes familles d'interprétations. Une bibliographie relativement abondante est proposée au lecteur mais, même sur ce plan, il n'est pas possible d'atteindre une quelconque exhaustivité ; l'auteur a dû procéder à des choix, parfois quelque peu arbitraires, pour rester dans les limites d'un volume raisonnable.

Pour finir, le but principal de ce livre est de tenter de donner une vue honnête de la situation générale concernant une théorie qui est indiscutablement l'un des plus grands succès de l'esprit humain, la mécanique quantique, sans en occulter ni les difficultés ni les réussites. Nous l'avons dit, sa force prédictive extraordinaire ne cesse de triompher dans des domaines toujours nouveaux, parfois totalement imprévisibles, mais pourtant cet édifice intellectuel reste l'objet de discussions sur le plan des concepts fondamentaux, parfois même de controverses. Personne ne songerait à discuter de la même façon la mécanique rationnelle ou les équations de Maxwell. Peut-être faut-il y voir le présage que la mécanique quantique n'a pas encore atteint sa forme définitive et optimale ?

# Remerciements

Nombreux sont ceux qui ont joué un rôle important dans la naissance de ce livre. En tout premier lieu, c'est Claude Cohen-Tannoudji à qui vont mes remerciements. Il m'a fait bénéficier, comme d'ailleurs tant d'autres, de sa façon unique et profonde d'aborder (et même de penser) la mécanique quantique ; plus de 40 années d'amitié (et de rédactions communes) m'ont permis de bénéficier d'innombrables discussions passionnantes et éclairantes pour moi. Alain Aspect est un autre ami avec qui, depuis le début de sa thèse au milieu des années 70, l'échange d'idées sur la mécanique quantique a été et continue à être riche et fructueux ; à l'époque, les fondements de la mécanique quantique n'avaient souvent pas très bonne presse parmi les physiciens "mainstream", et nous nous sommes abondamment appuyés l'un sur l'autre pour progresser dans un domaine qui nous passionnait tous deux, ainsi que Bernard d'Espagnat. Jean Dalibard et Philippe Grangier ont été d'autres interlocuteurs privilégiés, disponibles et toujours d'une grande précision intellectuelle, que je tiens également à remercier chaleureusement. Le titre "Comprenons-nous vraiment la mécanique quantique ?" m'a été suggéré il y a bien longtemps par Pierre Fayet, à l'occasion de deux séminaires qu'il m'avait demandé de présenter ; je l'ai gardé depuis. A la source de ce livre se trouve une première version d'un texte publié en 2001, sous la forme d'un article avec le même titre dans l'*American Journal of Physics*, et initié lors d'un séjour à l'Institut de physique théorique de l'Université de Californie à Santa Barbara. Lors d'une session consacrée à la condensation de Bose-Einstein, j'ai eu la chance de pouvoir discuter de mécanique quantique avec son organisateur, Antony Leggett ; une autre chance favorisant les échanges a été de partager le bureau de Wojciech Zurek ! Un peu plus tard, un séjour à l'Institut Lorentz de Leyde m'a fait bénéficier de contacts stimulants et d'une relecture fort utile de Stig Stenhlom. Quant à Abner Shimony, il m'a guidé de maints conseils utiles et encouragé dans la rédaction de cette première version.

Parmi ceux qui ont beaucoup aidé pour la version actuelle du texte, Michel Le Bellac a joué un rôle important, en effectuant une lecture détaillée de l'ensemble et en donnant des conseils avisés, sources de nombreuses améliorations. Michèle Leduc et lui ont participé à la mise au point de ce livre, en particulier en trouvant un excellent rapporteur anonyme qui, lui aussi, a fait des remarques fort pertinentes ; que tous trois en soient vivement remerciés. Parmi les autres amis qui ont également joué un rôle essentiel figurent Roger Balian, Serge Reynaud, William Mullin, Olivier Darrigol et Catherine Chevalley ; je les remercie tous vivement pour de nombreux avis scientifiques, conseils, précisions, etc., qui m'ont été précieux.

Pour le Chapitre XI qui décrit les diverses interprétations de la mécanique quantique, j'ai demandé à des spécialistes de chacune d'entre elles de bien

vouloir vérifier leur accord avec mon texte. Je remercie Sheldon Goldstein et Ward Struyve pour une relecture de la mécanique quantique de Bohm, Philip Pearle et Giancarlo Ghirardi pour leurs conseils sur la dynamique de Schrödinger modifiée, Robert Griffiths et Roland Omnès pour leurs commentaires sur l'interprétation des histoires, Bernard d'Espagnat pour ses précieuses remarques sur l'interprétation du réel voilé, Richard Healey pour son aide concernant l'interprétation modale, Carlo Rovelli pour ses avis et suggestions concernant l'interprétation relationnelle, Alexei Grinbaum pour bien des clarifications concernant la logique quantique et les théories formelles, et Thibault Damour pour sa relecture fort utile de la présentation de l'interprétation d'Everett. Comme le veut la tradition ajoutons que, si toutefois des erreurs avaient subsisté dans le texte, la responsabilité en serait celle de l'auteur ! Enfin, sans le cadre exceptionnel de travail qu'offre le LKB, sans les échanges constants avec ses membres, et sans l'environnement intellectuel de l'ENS, rien n'aurait été possible.

## Deuxième édition

Cette seconde édition a bénéficié de nombreuses discussions avec des collègues, de la participation à des séminaires, etc. dans de nombreux laboratoires ; tout ceci a stimulé des améliorations et des additions à la première édition. Je suis particulièrement reconnaissant à Philip Stamp, qui a lu en détail la première édition et proposé une excellente liste de suggestions. Mon vieil ami Bill Mullin a également été d'une grande aide par ses remarques judicieuses sur certains chapitres, alors que lui était occupé à la rédaction de son propre ouvrage *Quantum weirdness* (Oxford University Press, 2017). J'ai grandement bénéficié de la compréhension profonde de Johannes Kofler concernant le domaine de validité des diverses inégalités de Bell et leurs possibles "échappatoires" lors de l'interprétation des expériences. Philippe Grangier, Patrick Peter, Jean Bricmont, Ward Struyve, Roger Balian, Julia Kempe et Michel Le Bellac ont eux aussi fourni d'excellentes suggestions et remarques qui ont permis d'améliorer le texte.

Enfin, une caractéristique merveilleuse d'Internet est de permettre à l'auteur d'un livre de recevoir par courriel les réactions de nombreux lecteurs du monde entier. C'est particulièrement le cas sur un sujet comme la mécanique quantique, et c'est précieux. Parmi eux, je voudrais remercier particulièrement Paul Slater qui, depuis la Californie, m'a envoyé une liste particulièrement utile, mais hélas je ne puis pas nommer ici la longue liste de tous les collègues qui m'ont ainsi rendu service.

# Chapitre I

# Perspective historique

Les pères fondateurs de la mécanique quantique avaient déjà perçu l'essence des difficultés de la mécanique quantique. De nos jours, presque un siècle plus tard, les discussions sont toujours bien vivantes ; s'il est vrai que de nouveaux aspects très intéressants ont émergé, il faut reconnaître qu'au niveau fondamental beaucoup de questions n'ont pas tellement changé. Ce qui est plus récent, cependant, est un changement général d'attitude parmi les physiciens : jusqu'en 1970 ou 1980, la plupart des physiciens pensaient que l'essentiel des questions fondamentales avait définitivement été réglé et que "Bohr avait raison ; il a clairement montré que ses opposants avaient tort". C'était probablement une conséquence du fameux débat entre Bohr, Einstein, Schrödinger, Heisenberg, Pauli, de Broglie et d'autres (en particulier au cours des rencontres Solvay [1–3]), où Bohr avait remarquablement su déjouer toutes les attaques d'Einstein avec succès, malgré leur extrême habileté. Sans nécessairement connaître le détail des arguments, la majorité des physiciens pensaient donc que l'interprétation standard "de Copenhague" avait émergé sans conteste comme la seule attitude raisonnable pour les bons physiciens, c'est-à-dire ceux soucieux de ne pas s'accrocher inutilement aux idées du passé. Cette interprétation se fonde sur l'idée que la physique moderne doit comprendre le non-déterminisme comme un ingrédient essentiel : il est fondamentalement impossible de prédire ce qui se produit au niveau d'événements microscopiques individuels ; il est également impossible d'aller au-delà du formalisme de la fonction d'onde (ou de sa généralisation, le vecteur d'état $|\Psi\rangle$) afin de le compléter. Pour certains physiciens, l'interprétation de Copenhague comprend aussi la difficile notion de "complémentarité"... même s'il est vrai qu'en fonction du contexte la complémentarité recouvre bien des notions différentes qui ont été interprétées de façons variées ! Sans aller dans le détail, il reste vrai que l'impression de la grande majorité était que Bohr avait gagné le débat contre Einstein, de sorte que discuter encore les fondations de la mécanique quantique après ces géants était un peu prétentieux, passéiste,

et peut-être même un peu de mauvais goût.

De nos jours, l'attitude des physiciens est bien plus ouverte sur ces questions. Une première raison est probablement que plusieurs "théorèmes d'impossibilité" proposés par les partisans de l'interprétation standard, en particulier par von Neumann [4], sont maintenant considérés comme non pertinents – voir [5–7] et [8], ainsi que la discussion proposée dans [9]. Une autre raison est, bien sûr, le grand impact des découvertes de Bell [6] en 1964 concernant l'influence de la localité. Au début du XXI$^{e}$ siècle, on peut probablement dire sans trop se tromper que nous ne sommes plus réellement certains que l'interprétation de Copenhague soit la seule possibilité cohérente et logique pour les physiciens – voir par exemple les doutes exprimés par Shimony dans [10]. D'autres points de vue sont pris au sérieux : théories avec variables supplémentaires (ou "variables cachées" [1]) [11, 12] ; dynamique de Schrödinger modifiée pour le vecteur d'état [7, 13–15] (évolution non linéaire et/ou stochastique) ; à l'autre extrême nous avons des points de vue tels que l'interprétation "des mondes multiples" (ou plutôt de l'Univers à branches multiples) d'Everett [16] ; plus récemment nous avons vu apparaître des interprétations telles que celle des "histoires cohérentes" [17], et cette liste n'est pas exhaustive. Toutes ces interprétations ainsi que d'autres seront discutées dans le Chapitre XI. Pour une revue récente avec de nombreuses références, voir [18], qui privilégie les variables supplémentaires, mais prend également une position générale assez caractéristique de celles qu'on trouve souvent parmi les physiciens contemporains [2]. On pourra également consulter un débat un peu plus ancien, mais fort intéressant, dans la revue *Physics Today* [19] ; une autre source de références est la "Resource Letter" *AJP* de 1971 [20]. Mais cette variété d'interprétations possibles ne doit pas tromper le lecteur ! Disons très clairement que, jusqu'à maintenant, il n'existe aucune observation, fait, ou raisonnement, qui ait rendu l'interprétation standard de Copenhague obsolète.

## A. Trois périodes

Trois étapes successives peuvent être distinguées dans l'élaboration des concepts fondamentaux de la mécanique quantique ; elles ont conduit à l'interprétation de Copenhague, ou "orthodoxe", ou encore "interprétation standard", même si ces termes recouvrent des groupes d'interprétation de la même famille mais variés, comme nous le verrons plus bas (en particulier au Chapitre XI). Nous ne donnerons ici qu'un bref résumé historique, proposant au lecteur qui voudrait en savoir plus sur l'histoire du développement de la mé-

[1] Nous y reviendrons au § H du Chapitre XI : nous préférons utiliser les mots "variables supplémentaires" car ces variables ne sont en rien cachées, mais en fait très directement visibles comme résultats des expériences.

[2] Il est amusant de remarquer l'opposition entre les titres des Refs. [10] et [18].

canique quantique de se référer au livre de Jammer [21] – voir également [22] et [23]. Pour des discussions plus détaillées des problèmes fondamentaux de la mécanique quantique, on pourra également lire [10, 24, 25] ainsi que leurs références, et celles données dans [20].

### A-1. Préhistoire

C'est le nom de Planck qui vient le premier à l'esprit quand on pense à la naissance de la mécanique quantique : en 1900, c'est lui qui a introduit la fameuse constante $h$ qui porte maintenant son nom. L'approche de Planck était phénoménologique ; sa motivation était d'expliquer les propriétés du rayonnement en équilibre thermique (rayonnement du corps noir) en introduisant une nouvelle notion, celle de grains d'énergie discrets permettant le calcul de l'entropie [26] ; ce n'est que plus tard qu'il les interpréta physiquement comme résultant d'échanges d'énergie discontinus entre matière et radiation. C'est Einstein qui, plus tard encore (en 1905), prit l'idée plus au sérieux et introduisit réellement la notion de quantum de lumière (qui ne sera appelé "photon" que bien plus tard, en 1926 [27]), cette fois dans le but d'expliquer la dépendance en longueur d'onde de l'effet photoélectrique – pour une discussion générale des nombreuses contributions fondamentales d'Einstein à la théorie quantique, voir [28].

Nous devons toutefois garder à l'esprit que la question la plus importante à l'époque n'était pas d'expliquer les détails de l'interaction entre matière et rayonnement, ou les détails du rayonnement du corps noir. Le problème était bien plus général : il s'agissait de comprendre l'origine de la stabilité des atomes, c'est-à-dire de toute la matière qui nous entoure et dont nous sommes constitués ! D'après les lois de l'électromagnétisme classique, des électrons chargés négativement en orbite autour d'un noyau chargé positivement devraient constamment émettre de l'énergie, et donc tomber sur le noyau. Malgré plusieurs tentatives, expliquer pourquoi les atomes ne s'effondrent pas sur eux-mêmes, mais gardent des tailles constantes, était un réel défi que la physique n'était pas capable de relever[3]. Il fallut attendre un peu plus, jusqu'à ce que Bohr introduise son célèbre modèle de l'atome (1913), pour commencer à voir apparaître quelques idées jetant de premières lueurs sur la question. Bohr proposait la notion d'orbites "quantifiées" des électrons, orbites entre lesquelles ils pouvaient effectuer des "sauts quantiques", par exemple lors d'émission de photons optiques. Pour être honnêtes, nous devons admettre que ces notions ont presque totalement disparu de la physique contemporaine, où elles sont remplacées par une théorie bien plus puissante, comme celle de l'émission spontanée en électrodynamique quantique. Cependant, d'un autre côté, on peut voir dans l'usage moderne du postulat de réduction du vecteur d'état (§ B-2-a) une résurgence des sauts quantiques.

[3] Pour une revue récente du problème en mécanique quantique contemporaine, voir [29].

Heisenberg reprit le problème et, en 1925, introduisit la théorie qui est maintenant connue sous le nom de "mécanique des matrices"[4], une construction intellectuelle abstraite avec une forte composante philosophique, parfois proche du positivisme ; dans cette théorie, les propriétés physiques classiques sont remplacées par des "observables", mathématiquement des matrices, définies par des postulats adéquats ne faisant pas grand appel à l'intuition. Cependant, la mécanique des matrices contenait des éléments qui se sont révélés essentiels dans la construction de la mécanique quantique moderne.

Avec le recul, on peut être frappé par le caractère abstrait et quelque peu mystérieux de la théorie atomique à cette période de l'histoire ; pourquoi les électrons devraient-ils obéir à des règles qui leur interdisent de quitter certaines orbites particulières, comme s'ils étaient guidés miraculeusement sur elles ? Quelle était l'origine de ces sauts quantiques, supposés sans aucune durée temporelle, de sorte que la question de l'état physique d'un électron pendant un tel saut était vide de sens ? Pourquoi des matrices devraient-elles apparaître en physique d'une façon aussi abstraite, sans aucune relation avec une description classique du mouvement d'une particule ? On peut deviner le soulagement que ressentirent beaucoup de physiciens quand apparut un autre point de vue, d'apparence beaucoup plus simple et, de plus, bien dans la tradition de la physique du XIX$^{e}$ siècle : la théorie ondulatoire.

### A-2. La période ondulatoire

L'idée d'associer une onde avec toute particule matérielle a été initialement introduite par de Broglie dans sa thèse (1924) [30]. Quelques années plus tard (1927), elle fut confirmée expérimentalement par Davisson et Germer lors de leur fameuse expérience de diffraction électronique [31]. A l'époque toutefois, pour une raison ou une autre, de Broglie n'est pas allé plus avant dans l'étude de cette onde, de sorte que sa contribution sera de lever le voile du mystère, mais une partie seulement, selon le mot d'Einstein (voir par exemple la discussion dans [32]). On dit parfois que ce fut Debye qui, le premier, après avoir entendu parler des idées de De Broglie, remarqua qu'en physique une onde est généralement associée avec une équation d'onde : l'étape suivante devait donc être de découvrir cette équation. L'histoire ajoute que cette remarque fut faite en présence de Schrödinger, qui peu après commença à travailler sur ce programme ; c'est alors qu'il réussit à proposer une équation, qui maintenant porte son nom, une des équations les plus fondamentales de toute la physique. Il est amusant de noter que Debye lui-même ne semble pas s'être souvenu de l'épisode. Il est d'ailleurs parfaitement possible que cette anecdote ne soit pas véridique ; de fait, les partenaires de

[4]Les noms de Born et Jordan sont également associés à l'introduction de cette théorie ; ce sont eux qui ont immédiament fait le lien entre les règles abstraites de la mécanique de Heisenberg et celles du calcul matriciel en mathématiques.

l'époque ont relaté des souvenirs différents, et nous ne saurons probablement jamais exactement ce qui s'est passé. Peu importe, ce qui est clair est que l'introduction en 1926 par Schrödinger de l'équation qui porte son nom et qui donne l'évolution de la fonction d'onde [5] [33] est un des grands moments de l'histoire de la physique. Initialement, cette équation a permis de comprendre le spectre des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène, mais rapidement elle a également donné des résultats essentiels pour les autres atomes, puis les molécules et ions, les solides (la théorie des bandes par exemple), etc. C'est actuellement un outil fondamental dans de nombreuses branches de la physique et de la chimie, assurément l'une des équations les plus importantes de toute la physique.

Sur le plan conceptuel, au moment de son introduction, la théorie ondulatoire a été accueillie comme une énorme simplification de la nouvelle mécanique, d'autant plus que Schrödinger et d'autres (Dirac, Heisenberg) ont pu rapidement montrer qu'elle permettait de retrouver les prédictions de la mécanique des matrices à partir de considérations plus intuitives sur la "fonction d'onde" nouvellement introduite. Il était alors naturel d'espérer pousser le même succès plus loin, et de pouvoir simplifier par la même méthode tous les problèmes posés par la mécanique des particules atomiques : on aurait alors pu la traiter par une mécanique des ondes, de façon analogue à ce qui est fait pour les ondes acoustiques ou électromagnétiques. Par exemple, initialement Schrödinger pensait que toutes les particules de l'Univers nous apparaissaient comme des particules ponctuelles seulement parce que nous les observions à une échelle trop grande ; en réalité, elles seraient de minuscules "paquets d'ondes" localisés dans de petites régions de l'espace. Il avait même montré que ces paquets d'onde restent petits (ils ne s'étalent pas dans l'espace) lorsque le système étudié est un oscillateur harmonique... hélas, nous savons maintenant qu'il s'agit là d'un cas très particulier, et qu'en général les paquets d'onde s'étalent dans l'espace !

### A-3. Emergence de l'interprétation de Copenhague

Il ne fallut pas longtemps pour réaliser qu'une théorie purement ondulatoire présente de sérieuses difficultés, en fait tellement sérieuses que les physiciens furent rapidement conduits à abandonner cette voie. Un premier exemple de difficulté est fourni par une collision entre particules, où l'onde de Schrödinger diffuse dans toutes les directions, un peu comme une onde circulaire dans une mare où une pierre a été jetée ; cependant, dans toutes les expériences de collisions, on observe que les particules suivent après collision des trajectoires bien définies, restant bien localisées avec une direction de propagation relativement bien définie. Par exemple, toutes les photographies prises dans des chambres à collision d'accélérateurs de particules montrent

[5] Voir la note 12 pour la relation entre le vecteur d'état et la fonction d'onde.

bien que les particules ne se "diluent" jamais dans toutes les directions de l'espace ! Cette constatation a stimulé Born, en 1926, à proposer une interprétation probabiliste de la fonction d'onde [34] : les processus quantiques comme les collisions sont fondamentalement non déterministes, et la seule prédiction qui puisse être calculée est un ensemble de probabilités, données par le carré du module de la fonction d'onde. Une seconde difficulté apparaît dès qu'on considère des systèmes composés de plus d'une seule particule : alors, l'onde de Schrödinger n'est plus une onde "ordinaire" puisque, au lieu de se propager dans l'espace ordinaire à 3 dimensions, elle se propage dans un espace dit "espace des configurations", dont la dimension est $3N$ pour un système composé de $N$ particules ! Déjà, pour le plus simple des atomes, l'atome d'hydrogène, l'onde se propage à 6 dimensions[6]. Pour un ensemble d'atomes, la dimension de l'espace des configurations croît rapidement, et devient un nombre astronomique pour l'ensemble des atomes d'un échantillon macroscopique. Chacun s'est alors rendu compte que la nouvelle onde n'était en rien semblable à une onde classique qui, elle, se propage dans l'espace ordinaire ; cette profonde différence apparaîtra un peu comme un leitmotiv dans ce livre[7], sous des formes diverses[8].

Faisant une petite digression, nous pouvons remarquer au passage que l'observation relativement récente (1995) du phénomène de condensation de Bose-Einstein dans des gaz dilués [35] peut être vue, en un sens, comme une sorte de réalisation des espoirs initiaux de Schrödinger : cette condensation, en effet, fournit un cas particulier où une onde de matière se propage effectivement dans l'espace habituel à 3 dimensions, alors qu'elle est associée à de nombreuses particules. Avant que la condensation ne se produise, nous avons la situation habituelle : le gaz est décrit par une fonction d'onde dans un espace des configurations de dimension très élevée. Mais, lorsque les atomes sont totalement condensés dans une fonction d'onde unique à une seule particule, leur fonction d'onde à plusieurs particules devient beaucoup plus simple puisqu'elle est construite à partir d'une seule fonction d'onde à une particule. En d'autres termes, l'onde de matière devient alors semblable à un champ classique avec deux composantes (la partie réelle et la partie imaginaire de la

[6] Nous ignorons ici les spins, sinon il faudrait considérer 4 ondes de ce type qui, chacune, se propage dans un espace à 6 dimensions.

[7] Par exemple, les effets non locaux se produisant avec deux particules peuvent être décrits comme une conséquence du fait que la fonction d'onde se propage de façon locale, mais dans un espace à 6 dimensions, alors que la définition habituelle de la localité fait intervenir l'espace ordinaire à 3 dimensions.

[8] Il est également possible de formuler la mécanique quantique d'une façon qui ne fait pas intervenir l'espace des configurations, mais seulement l'espace ordinaire, en utilisant le formalisme des opérateurs de champ (parfois appelé seconde quantification pour des raisons historiques) – *cf.* § C. On peut écrire ces opérateurs sous une forme mathématique formellement similaire à celle d'une fonction d'onde, mais il restent des opérateurs quantiques de sorte que leur ressemblance avec un champ classique est encore moins claire.

fonction d'onde), relativement semblable à une onde sonore par exemple. On voit ainsi que, paradoxalement, ce "nouvel état de la matière passionnant" fourni par la condensation de Bose-Einstein n'est en rien l'exemple d'une situation ultra-quantique ; en un sens, cet état est plus classique que le gaz dont il est issu (en termes de description quantique, corrélations entre particules, etc.). Mais, sur le plan général et conceptuel, il faut bien voir que cet exemple n'est qu'un cas très particulier ; dans le cas général, il ne résout en rien le problème que créerait une vue naïve comme celle initiale de Schrödinger, où la fonction d'onde serait vue comme une onde ordinaire.

De fait, la description purement ondulatoire des particules a maintenant disparu de la forme standard de la mécanique quantique moderne [9]. En plus de Born et Bohr, Heisenberg [36], Jordan [37, 38], Dirac [39] et d'autres ont joué un rôle essentiel dans l'apparition d'une nouvelle formulation de la mécanique quantique [23], où des notions probabilistes et ondulatoires sont incorporées dans un même édifice logique complexe. La composante probabiliste est que, lorsqu'un système subit une mesure, le résultat de cette mesure est en général fondamentalement aléatoire ; le théorie ne fournit que les probabilités des différents résultats possibles. La composante ondulatoire est que, en l'absence de mesure, l'équation de Schrödinger s'applique. La fonction d'onde n'est plus considérée comme une description physique directe du système lui-même ; ce n'est qu'un outil mathématique qui fournit les probabilités des différents résultats possibles[10] – nous revenons plus en détail sur ce point au § B-3.

La première version de l'interprétation de Copenhague fut complétée autour de 1927, l'année de la cinquième conférence Solvay [3]. Presque immédiatement, les théoriciens se sont employés à étendre le domaine d'application de la mécanique des particules vers les champs. A l'époque, il était question seulement du champ électromagnétique, celui associé au photon, mais plus tard les idées furent appliquées à une grande variété de champs associés à de nombreuses particules (électrons, muons, quarks, etc.). La théorie des champs quantiques s'est maintenant énormément développée pour devenir l'outil de base de la physique des particules, dans un cadre relativiste (l'équation de Schrödinger elle-même ne satisfait pas l'invariance de Lorentz). Une généralisation de l'idée d'invariance de jauge en électromagnétisme a conduit à diverses formes de théories de jauge, dont certaines sont le fondement de notre compréhension actuelle du rôle des interactions fondamentales[11] en physique

[9] Voir cependant le § K du Chapitre XI pour une discussion d'une approche non standard purement ondulatoire de la mécanique quantique.

[10] Dans la littérature, on trouve souvent le mot "ontologique" pour décrire le point de vue initial de Schrödinger sur la fonction d'onde, par opposition avec "épistémologique" qui s'applique à l'interprétation probabiliste.

[11] Il existe en physique une quatrième interaction fondamentale, la gravitation. Le "modèle standard" en théorie des champs contient une unification des trois premières interac-

(électromagnétique, faible et forte), et a conduit à la prédiction de nouvelles particules, confirmée par l'expérience. Néanmoins, malgré ces avancées nombreuses et remarquables, conceptuellement la théorie des champs reste au même niveau fondamental que la théorie non relativiste des particules basée sur l'équation de Schrödinger. Comme l'objet de ce livre est principalement de discuter les concepts, nous n'y aborderons donc guère la théorie des champs.

## B. Le vecteur d'état

Beaucoup des discussions sur les fondements de la mécanique quantique tournent autour du statut du vecteur d'état et de son interprétation physique. Pour faciliter la discussion qui va suivre, il n'est pas inutile de commencer par rappeler quelques éléments supplémentaires concernant son rôle et son utilisation dans le cadre de l'interprétation standard actuelle ; ceci est fait dans les §§ B-1 et B-2, où l'on rappelle la définition et l'usage qui est fait du vecteur d'état en mécanique quantique (le lecteur familier avec le formalisme quantique est invité à sauter ces parties). Ensuite, au § B-3, nous discutons le statut du vecteur d'état en mécanique quantique standard.

### B-1. Définition, équation de Schrödinger, règle de Born

Résumons brièvement comment le vecteur d'état est utilisé dans les équations de la mécanique quantique – on trouvera si nécessaire plus de détails aux §§ A-1 et suivants du Chapitre XII.

#### B-1-a. Définition

Prenons par exemple un système physique de $N$ particules massives, chacune se propageant dans l'espace ordinaire à 3 dimensions : le vecteur d'état (ou la fonction d'onde associée[12]) remplace en mécanique quantique les $N$ positions et $N$ vitesses qui, en mécanique classique, seraient utilisées pour décrire l'état d'un système. Il est souvent commode de grouper toutes ces positions et vitesses dans les $6N$ composantes d'un seul vecteur $\mathbf{V}$ appartenant à un espace vectoriel réel de $6N$ dimensions, dit "espace des phases"[13] ; sur le plan du formalisme, on peut dire que le vecteur d'état $|\Psi\rangle$ est l'équivalent quantique de ce vecteur classique $\mathbf{V}$. Il appartient cependant à un espace tout différent de celui du vecteur classique, un espace vectoriel complexe $\mathcal{E}$

tions, mais laisse de côté la gravitation. D'autres théories permettent d'unifier les quatre interactions, mais pour le moment ne sont pas considérées comme standard.

[12] Pour un système de particules massives sans spin, le "vecteur d'état" $|\Psi\rangle$ est équivalent à une "fonction d'onde", alors que pour des systèmes plus compliqués ce n'est pas le cas. Cependant comme, conceptuellement, les deux jouent le même rôle et sont utilisés de la même façon dans la théorie, il n'est pas utile ici de faire la distinction.

[13] L'espace des phases a donc deux fois plus de dimensions que l'espace de configurations introduit plus haut.

appelé "espace des états" (ou, quelquefois, "espace de Hilbert", pour des raisons historiques), de dimension infinie pour notre exemple. Les calculs dans cet espace sont souvent menés avec l'aide d'une notation très commode, la notation de Dirac [39], que nous utiliserons effectivement dans cet ouvrage, et où les vecteurs de l'espace des états sont souvent appelés "kets".

Dire que le vecteur d'état appartient à un espace vectoriel entraîne que toute superposition linéaire de deux kets $|\Psi_1\rangle$ et $|\Psi_2\rangle$ est également un vecteur de l'espace des états :

$$|\Psi\rangle = \alpha\,|\Psi_1\rangle + \beta\,|\Psi_2\rangle \tag{I-1}$$

(où $\alpha$ et $\beta$ sont des nombres complexes quelconques), qui définit donc un autre état possible pour le système. Cette règle est appelée le "principe de superposition" de la mécanique quantique, et a beaucoup de conséquences.

De plus, à chaque grandeur physique du système, comme position(s), impulsion(s), énergie, moment cinétique, etc., le formalisme de la mécanique quantique associe un opérateur linéaire agissant dans l'espace des états, et fournit des règles pour construire ces opérateurs. Pour des raisons historiques (§ A-1), chacun de ces opérateurs est souvent appelé "observable", appartenant à la catégorie d'opérateurs appelés "opérateur linéaire hermitique".

#### B-1-b. Equation de Schrödinger

L'évolution du vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ entre les temps $t_0$ et $t_1$ est donnée par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\frac{d}{dt}\,|\Psi(t)\rangle = H(t)\,|\Psi(t)\rangle \tag{I-2}$$

où $H(t)$ est l'hamiltonien du système (incluant les interactions internes du système ainsi que, si besoin est, les effets du couplage à des champs classiques extérieurs – un champ magnétique statique ou oscillant par exemple). L'équation de Schrödinger est une équation différentielle linéaire, qui donne une évolution continue du vecteur d'état, sans aucun saut ni discontinuité. Elle est semblable à beaucoup d'autres équations de ce type en physique. Elle est aussi générale que les équations de Newton ou de Lagrange en mécanique classique, et peut s'appliquer à toutes les situations physiques possibles, pourvu bien sûr que le système soit bien défini avec un hamiltonien connu.

En particulier, l'équation de Schrödinger peut également s'appliquer à une situation où le système physique interagit avec un appareil de mesure (un spin 1/2 qui pénètre dans le gradient d'un aimant de Stern et Gerlach par exemple) ; l'équation ne sélectionne alors aucun résultat de mesure particulier, mais les conserve tous comme des potentialités (contenues dans ce que l'on appelle une "superposition cohérente"). C'est alors qu'on introduit un ingrédient supplémentaire dans la théorie, la règle de probabilité de Born.

#### B-1-c. Règle de Born, probabilités

Nous supposons qu'à l'instant $t_1$, où la solution $|\Psi(t)\rangle$ de l'équation (I-2) prend la valeur $|\Psi(t_1)\rangle$, le système subit une mesure associée à un opérateur $M$ agissant dans l'espace des états. Nous notons $\mid m_i >$ les vecteurs propres de $M$ associés aux valeurs propres $m_i$ $(i = 1, 2, ...)$ ; si certaines d'entre elles sont dégénérées, plusieurs valeurs consécutives de la suite des $m_i$ sont égales, mais correspondent à des vecteurs $\mid m_i >$ différents. Comme $M$ est un opérateur hermitique, les $\mid m_i >$ peuvent être choisis comme une base orthonormée de l'espace des états.

La règle de Born indique alors que :

(i) le résultat de la mesure associée à $M$ ne peut être que l'un des $m_i$ ; les autres résultats ne sont jamais obtenus ;

(ii) si une valeur particulière $m_i$ est non dégénérée, la probabilité $\mathcal{P}_i$ d'obtenir le résultat $m_i$ est donnée par le carré du module du produit scalaire de $|\Psi(t_1)\rangle$ par $|m_i\rangle$ :

$$\mathcal{P}_i = |\langle m_i \, |\Psi(t_1)\rangle|^2 \tag{I-3}$$

(iii) la probabilité de trouver une valeur propre dégénérée est simplement la somme de toutes les probabilités (I-3) calculées avec tous les vecteurs propres orthonormés qui sont associés avec cette valeur propre[14].

Ces deux dernières règles peuvent être écrites sous une commune forme simple, qui nous sera utile plus bas. Si le résultat correspond à une valeur propre $m$ qui est $p$ fois dégénérée, la série des $p$ nombres $m_i$, $m_{i+1}$,..., $m_{i+p}$ sont égaux à $m$. Nous pouvons introduire la somme des projecteurs (§ A-3 du Chapitre XII) sur les vecteurs propres correspondants :

$$P_M(m) = |m_i\rangle \langle m_i| + |m_{i+1}\rangle \langle m_{i+1}| + ... + |m_{i+p}\rangle \langle m_{i+p}| \tag{I-4}$$

Cette somme est également un projecteur, qui peut être appliqué au vecteur d'état $|\Psi(t_1)\rangle$ avant la mesure :

$$P_M(m) \left|\Psi(t_1)\right\rangle = \left|\Psi'_m\right\rangle \tag{I-5}$$

La probabilité d'obtenir le résultat $m$ par la mesure est alors simplement le carré de la norme de $|\Psi'\rangle$ :

$$\mathcal{P}_m = \left\langle \Psi'_m \, \middle| \Psi'_m \right\rangle = \left\langle \Psi(t_1) \right| P_M(m) \left|\Psi(t_1)\right\rangle \tag{I-6}$$

### B-2. Processus de mesure

L'interprétation standard de la mécanique quantique contient l'évolution progressive et déterministe du vecteur d'état sous l'effet de l'équation de

[14] De façon similaire, en théorie classique des probabilités, si un événement $E$ peut être obtenu soit comme l'événement $e_1$, soit $e_2$,..., soit $e_i$,..., et si tous les événements $e_i$ sont exclusifs, la probabilité $E$ est la somme des probablités des $e_i$.

Schrödinger. Généralement, on inclut également dans cette interprétation un second postulat d'évolution, associé au processus de la mesure, et complètement différent de l'équation de Schrödinger puisqu'il est discontinu. Il est souvent appelé "réduction du paquet d'ondes" ou "réduction du vecteur d'état", et fut introduit par von Neumann dans son fameux traité (voir le Chapitre VI de [4]). La plupart des livres d'enseignement incluent ce postulat, probablement parce qu'il permet une description plus détaillée et plus intuitive de l'évolution d'un système pendant une mesure, mais ce n'est en rien indispensable. Bohr lui-même préférait un autre point de vue, où l'usage explicite de la réduction du vecteur d'état n'est pas nécessaire[15], point de vue que nous présentons ensuite (il existe également d'autres interprétations de la mécanique quantique qui ne font pas usage de la réduction du vecteur d'état, comme nous le verrons au Chapitre XI, voir par exemple les §§ A-2, H ou M).

#### B-2-a. Von Neumann, la réduction

Supposons que le système étudié soit préparé à l'instant $t_0$, évolue librement (sans mesure) jusqu'au temps $t_1$ où il subit une première mesure, puis évolue ensuite à nouveau librement jusqu'au temps $t_2$ où une seconde mesure est effectuée. Juste après la première mesure à l'instant $t_1$, au moment où le résultat de cette mesure est connu, il devient naturel de considérer que la préparation initiale et cette première mesure font partie d'un seul processus de préparation du système physique. On associe alors à cette préparation un vecteur d'état bien défini qui contient l'information du premier résultat ; en d'autres termes, le vecteur d'état est mis à jour pour y inclure l'interaction avec le premier appareil de mesure ainsi que l'information acquise lors de la mesure correspondante. C'est précisément ce que fait le postulat de réduction du paquet d'ondes. Le nouveau vecteur d'état "réduit" peut alors être utilisé comme nouvel état initial, afin de calculer les probabilités des résultats d'une seconde mesure effectuée sur le système à l'instant $t_2$.

C'est également le point de vue de Dirac lorsqu'il écrit (page 9 de *Quantum mechanics* [39]) : "Il existe cependant deux cas où nous sommes en général obligés de considérer la perturbation comme la source d'un changement de l'état du système, à savoir quand la perturbation est une observation et quand elle consiste à préparer le système dans un état donné".

[15] La référence [40] contient les phrases suivantes : "Il est important de noter que la complémentarité de Bohr ne fait aucune mention de la réduction du paquet d'ondes... ou d'un rôle privilégié de la conscience subjective de l'observateur. Bohr n'était en aucune façon un positiviste. Beaucoup de ce qui passe pour l'interprétation de Copenhague vient des écrits de Werner Heisenberg, mais pas de ceux de Bohr" (voir également la note bas de page 22).

Nous supposons que la mesure est idéale[16] – elle préserve l'intégrité du système, et ce n'est donc pas une mesure destructive comme le serait par exemple l'absorption d'un photon par un détecteur. Après que la mesure associée à $M$ a fourni le résultat $m_i$ correspondant à une valeur propre particulière non dégénérée (donc à un seul $|m_i\rangle$), le vecteur d'état réduit est :

$$\left|\Psi'_{m_i}\right\rangle = \left|m_i\right\rangle \tag{I-7}$$

En d'autres termes, au temps $t_1$ où la première mesure a lieu et fournit le résultat $m_i$, le vecteur d'état saute de façon discontinue de la valeur $|\Psi(t_1)\rangle$ vers la valeur $|m_i\rangle$. Si la même mesure est répétée presque immédiatement, l'application de la règle de Born (I-3) à l'état $|\Psi'\rangle$ entraîne que toutes les probabilités sont nulles, sauf une : le résultat de la mesure est alors certain, on obtient à nouveau $m_i$.

La généralisation de (I-7) à une mesure dégénérée est donnée par (I-5) :

$$\left|\Psi'_{m}\right\rangle = cP_M(m)\left|\Psi(t_1)\right\rangle \tag{I-8}$$

où $c$ est un coefficient de normalisation[17].

Cette règle peut facilement se généraliser à plus de deux mesures successives. A chaque fois qu'une mesure est effectuée et qu'un résultat est obtenu, le vecteur d'état saute vers une nouvelle valeur qui inclut cette nouvelle information (mais peut également effacer tout ou partie de l'information précédente). Une exception se produit si la même mesure est répétée à des instants suffisamment proches, de sorte qu'aucune évolution de Schrödinger n'a le temps de se produire entre eux. Alors tous les résultats sont nécessairement les mêmes de sorte que, après la première mesure, la réduction du vecteur d'état n'a aucun effet (mais elle recommence à agir dès qu'une observable différente est mesurée).

Il est clair que la réduction du vecteur d'état est reliée de façon proche à la règle des probabilités de Born. En fait, si l'on généralise cette règle à des mesures multiples à des instants différents (§ A-2-a du Chapitre XI et Appendice G), on peut déduire la réduction du vecteur d'état et la faire apparaître simplement comme une règle commode pour calculer des probabilités. Dans ce point de vue, la réduction du vecteur d'état n'est plus un postulat, mais juste une commodité de calcul qui est conséquence de la règle de Born généralisée.

En résumé, le schéma général que nous avons présenté inclut des étapes différentes dans l'évolution du vecteur d'état. Entre préparation et mesure, il évolue de façon parfaitement continue selon l'équation de Schrödinger.

[16] Au Chapitre IX (§ A-1), nous revenons plus en détail sur le modèle de von Neumann de la mesure ainsi que sur la notion de mesure QND (quantum non-demolition measurement).

[17] Ce coefficient est l'inverse de la racine carrée du nombre réel $\langle\Psi(t_1)|\, P_M(m)\,|\Psi(t_1)\rangle$.

Lorsque le système subit une mesure, il interagit avec l'appareil correspondant. Les probabilités des différents résultats de mesure peuvent être calculées à partir du vecteur d'état d'une façon parfaitement bien définie, mais seulement les probabilités : l'équation de Schrödinger en elle-même est incapable d'effectuer la sélection d'un résultat unique parmi tous ceux qui sont possibles. La sélection observée peut être vue comme une conséquence de la réduction du vecteur d'état, un processus qui le fait sauter de façon en général discontinue et imprévisible vers une nouvelle valeur. Ainsi l'émergence de l'unicité du résultat est obtenue (on pourrait dire en quelque sorte mise à la main) de façon explicite en ne retenant que la composante appropriée du vecteur d'état, et en annulant toutes les autres, ce qui explique le terme de "réduction" – nous reviendrons sur la question au § A du Chapitre II. Le processus de réduction est discontinu et irréversible. Ainsi, dans ce schéma deux règles indépendantes sont donc introduites, une pour l'évolution "naturelle" et continue du vecteur d'état entre les mesures, et une autre pour les mesures que subit le système ; la difficulté est alors de bien comprendre comment éviter les conflits potentiels entre les deux postulats.

#### B-2-b. Bohr

Bohr ne fait aucun usage explicite de la réduction du vecteur d'état. Il préfère considérer l'ensemble de toutes les mesures successives comme faisant partie d'une seule grande expérience, incluant tous les appareils de mesure qui sont nécessaires à les réaliser (ainsi, vraisemblablement, que ceux utilisés dans l'étape de préparation du système). Les règles de la mécanique quantique fournissent alors les probabilités associées à toutes les séries possibles de résultats. Dans ce point de vue, on ne devrait pas se demander (comme nous l'avons fait au § B-2-a) quel est l'état quantique du système mesuré entre, par exemple, la première et la seconde mesure : séparer le système de l'ensemble de l'appareillage expérimental n'a pas de sens dans cette interprétation de la mécanique quantique (non-séparabilité, § C-3-c du Chapitre III).

Dans ces conditions, le conflit potentiel entre deux postulats d'évolution différents disparaît. Il est alors toutefois remplacé par une autre difficulté : dans chaque expérience, il faut savoir faire la distinction entre deux parties différentes, le système observé et les appareils de mesure. Seuls ces derniers sont directement accessibles à l'expérience humaine et peuvent être décrits dans les termes du langage ordinaire, celui de la physique classique. Les appareils de mesure (et donc les observateurs qui les utilisent) ont donc un rôle très particulier dans la théorie : ils sont l'origine des résultats de mesure et de notre perception du monde physique ; ce faisant ils introduisent une composante essentielle non déterministe dans la théorie et dans l'évolution des systèmes physiques. La difficulté est alors de savoir où situer exactement la

frontière entre les deux parties[18]. Si par exemple elles doivent être distinguées en termes de tailles des systèmes physiques, on peut se demander à partir de quelle taille exactement un système est suffisamment macroscopique pour devenir directement accessible à l'expérience humaine, et pourra se comporter comme un appareil de mesure. Si la distinction doit être faite en fonction d'un autre critère plus élaboré que la taille, il semble nécessaire de préciser comment, afin de rendre le concept moins vague. Dans [41], Bohr écrit (voir également la citation de Bell dans le § E du Chapitre II) : "Cette nécessité de discriminer dans chaque dispositif expérimental entre les parties du système physique considéré qui doivent être traitées comme des appareils de mesure et celles qui constituent les objets étudiés peut sans nul doute être qualifiée comme *la distinction principale entre les descriptions classique et quantique des phénomènes physiques*".

### B-3. Statut

Dans le cadre qui vient d'être rappelé, quel est pour finir le statut du vecteur d'état (ou de la fonction d'onde) en mécanique quantique standard ?

#### B-3-a. Deux extrêmes

Dans les discussions sur ce statut en mécanique quantique standard, deux erreurs opposées doivent être évitées, car toutes les deux ratent la cible d'un côté différent. La première est d'emboîter le pas aux espoirs initiaux de Schrödinger, et de penser que la fonction d'onde du système décrit directement les propriétés physiques du système, même si elle se propage dans un espace des configurations qui est en général distinct de (et de plus grande dimension que) l'espace habituel. Dans un point de vue purement ondulatoire de ce type, les positions et vitesses classiques des particules sont remplacées par l'amplitude d'une onde complexe, et la notion même de particule ponctuelle se dilue. Néanmoins, les difficultés inhérentes à ce point de vue sont si bien connues (*cf.* § A-3) que, de nos jours, peu de physiciens sont prêts à l'endosser, au moins dans le cadre de la théorie standard[19]. A l'autre extrême, on pourrait considérer que la fonction d'onde ne décrit en rien les propriétés physiques intrinsèques du système, mais seulement l'information qu'un observateur donné possède sur lui. Elle devient alors l'analogue parfait d'une distribution de probabilité classique en théorie habituelle. Bien sûr, à

[18] Ceci ne signifie pas nécessairement qu'il faut choisir une fois pour toutes une frontière qui coupe en deux le monde physique. Dans le point de vue de Bohr, cette frontière peut dépendre de l'expérience considérée (on pourrait imaginer un élément qui soit une composante du système mesuré dans une expérience, et appartienne à l'appareil de mesure dans une autre).

[19] Dans les théories basées sur une dynamique de Schrödinger modifiée (versions non standard demandant de modifier l'équation de Schrödinger, voir § K du Chapitre XI), un point de vue purement ondulatoire peut être réintroduit.

première vue, on a l'impression que ce point de vue résout instantanément toutes les difficultés introduites en mécanique quantique par la réduction du vecteur d'état et ses discontinuités : chacun sait que des probabilités classiques peuvent changer par sauts brusques, et personne ne considère cela comme un problème particulier. Par exemple, dès que devient disponible une information nouvelle concernant un événement (qui peut être très éloigné), la probabilité que nous associons à l'événement change de façon discontinue, et peut même devenir totalement différente ; par analogie, ne serait-ce pas la façon la plus naturelle d'expliquer les changements soudains du vecteur d'état lors de la réduction du vecteur d'état ?

Une première difficulté de ce point de vue est qu'il conduirait tout naturellement à l'idée que la fonction d'onde (ou le vecteur d'état) possède un caractère relatif : si deux observateurs disposent d'une information différente sur le même système physique, devraient-ils le décrire avec des fonctions d'onde différentes[20] ? En théorie statistique classique, les distributions de probabilités qui subissent des sauts discontinus lors de l'acquisition d'information sont, par essence même, des fonctions de l'observateur et de l'information dont il dispose, de sorte qu'on peut les qualifier de "subjectives" celui qui en possède plus décrit le phénomène avec une distribution plus étroite qu'un autre, moins informé ; on peut même toujours en principe imaginer un observateur parfaitement informé pour lequel toutes les grandeurs ont une distribution infiniment étroite (pour cet observateur, le phénomène sera alors déterministe). Cependant, la possibilité d'une description de toutes les grandeurs avec une précision arbitraire est rejetée par la mécanique quantique standard. En fait, la plupart des auteurs considèrent que la fonction d'onde (ou vecteur d'état) n'est pas relative à un observateur, mais à un système physique donné (un point de vue différent, non standard, sera cependant mentionné au § C-2-b du Chapitre XI). L'information contenue dans le vecteur d'état ne peut alors être qu'universelle, information maximale sur le système accessible à n'importe quel observateur humain.

[20] Nous supposons que les deux observateurs utilisent le même référentiel d'espace-temps, et que c'est juste la quantité d'information qui varie de l'un à l'autre. Sinon, nous devrions appliquer des transformations mathématiques simples (unitaires) pour passer d'un vecteur d'état à l'autre. Cette opération n'a toutefois pas plus d'impact conceptuel qu'en mécanique classique, où des règles simples permettent également de passer des positions et des vitesses dans un référentiel à celles dans un autre référentiel.

Ajoutons qu'en mécanique quantique on peut aussi introduire des probabilités classiques associées à une connaissance imparfaite du système, en particulier par le formalisme de l'opérateur densité (§ A-6 du Chapitre XII). Ici nous nous limitons à la discussion de vecteurs d'états et de fonctions d'onde (états purs) sans prendre en compte ce type d'incertitude.

Enfin, nous nous limitons ici à une discussion simplifiée ; dans un contexte plus élaboré, il faudrait par exemple introduire la notion d'intersubjectivité, etc. [10, 24].

De plus lorsque, en théorie des probabilités ordinaires, une distribution subit un saut soudain vers une distribution plus précise, la raison en est simplement que des valeurs plus précises des variables existaient déjà avant le saut. En d'autres termes, le fait qu'une probabilité de distribution reflétait une connaissance imparfaite du système signifie qu'un saut vers une distribution plus précise est en principe possible, plus proche de la réalité du système lui-même[21]. Mais, à nouveau, cette conclusion est en opposition totale avec la mécanique quantique standard, qui rejette le principe même qu'une description plus précise de la réalité que celle de la fonction d'onde soit possible (voir § C-2 du Chapitre III). Dans cette théorie, l'aléatoire qui intervient lors d'une mesure est de caractère véritablement absolu ; il est vain de chercher des causes de tel ou tel résultat, car elles n'existent pas.

Les probabilités classiques peuvent parfaitement être définies en l'absence d'observateurs, de sorte qu'elles sont alors "objectives" : on considère un événement choisi parmi tout un ensemble d'événements possibles, qui ont tous des dynamiques bien définies mais différentes, soit parce qu'elles partent de conditions initiales qui ne sont pas identiques, soit parce qu'elles subissent des perturbations non contrôlées. Pour introduire des probabilités, on suppose ensuite que tous ces événements distincts ont le même "poids", et on effectue des moyennes statistiques sur leur ensemble. En revanche, la mécanique quantique standard n'introduit de probabilités que si des observateurs réalisent des mesures ; elle rejette l'idée que l'origine des probabilités tiendrait à des conditions intiales différentes ou des perturbations incontrôlées.

En fait, introduire la notion de valeurs de quantités physiques préexistantes est précisément la base des théories "non orthodoxes" mettant en jeu des variables supplémentaires (souvent appelées "variables cachées" – voir § H du Chapitre XI et note 1 page 2). Ainsi ceux qui proposent une interprétation relative (ou subjective) du vecteur d'état sont parfois des partisans des variables supplémentaires, mais qui l'ignorent ! En mécanique quantique standard, il est essentiel de garder à l'esprit que la fonction d'onde (ou le vecteur d'état) donne LA description ultime du système, avec toutes ses propriétés physiques ; elle n'est ni contextuelle, ni dépendante de l'observateur (subjective), mais absolue ; si elle donne des prédictions probabilistes sur les résultats de mesures futures, elle reste ainsi totalement différente d'une distribution de probabilité classique.

[21] Normalement, l'information porte sur "quelque chose d'indépendant". Une information, ou une probabilité, concerne un événement ou un objet qui possède sa réalité propre, que l'on peut définir sans faire intervenir l'information, et que quelqu'un soit en train d'en acquérir de l'information ou non – voir par exemple § VII de [42]. Il semble difficile de définir l'objet lui-même en termes de l'information qui le concerne, ouvrant la porte à des problèmes délicats de circularité logique.

La conclusion est que, si le contenu du vecteur d'état quantique est défini comme de l'information, il faut garder à l'esprit qu'on introduit ainsi un nouveau concept (une nouvelle définition du mot) : cette information est de nature différente de ce que l'on désigne habituellement par ce mot dans le reste de la physique. Elle est probabiliste, mais les probabilités associées ne sont pas associées au degré d'information d'un observateur particulier ; ce qui compte est une information universelle accessible à tous les êtres humains réalisant des expériences de physique (inter-subjectivité).

#### B-3-b. Le point de vue (orthodoxe) de Copenhague, interprétation standard

Si aucun de ces points de vue n'est correct, comment alors les combiner pour obtenir le statut du vecteur d'état en mécanique quantique orthodoxe ? Dans quelle mesure devons-nous considérer qu'il décrit le système physique lui-même (interprétation réaliste), ou plutôt qu'il contient l'information que nous pouvons avoir sur ce système (interprétation positiviste par exemple), d'une façon qui est plus subtile qu'une distribution de probabilités classique ? De fait, en mécanique quantique, le vecteur d'état possède un statut réellement non trivial, qui n'a aucun équivalent dans tout le reste de la physique.

Il faut dire que l'interprétation orthodoxe de Copenhague n'est pas définie exactement de la même façon par tous les auteurs [22] ; des nuances existent concernant la définition d'un état quantique. C'est pourquoi il est probablement plus approprié de parler de la définition "standard", celle qui se trouve dans la majorité des livres d'enseignement. Le point de vue standard est que le vecteur d'état (ou fonction d'onde) est associé avec une procédure de préparation du système physique étudié – il est alors commode d'utiliser le point de vue de Heisenberg (§ A-5 du Chapitre XII), où le vecteur d'état est indépendant du temps (la dépendance en temps est transposée aux observables/opérateurs dans ce point de vue). Dirac, dans le Chapitre I de son fameux livre [39], écrit : "Nous devons d'abord généraliser la signification d'un 'état' de sorte qu'il puisse concerner un système atomique... La méthode de préparation peut alors être considérée comme spécifiant cet état". Ou Stapp, lorsqu'il introduit l'interprétation de Copenhague [43] : "La spécification de la grandeur A sur la méthode de préparation du système physique est en premier lieu transcrite dans une fonction d'onde $\Psi_A(x)$". De façon semblable, Peres écrit [44] : " un vecteur d'état n'est pas une propriété du système phy-

[22] Par exemple, Howard écrit [40] : "La plupart de ce qui passe pour l'interprétation de Copenhague se trouve dans les écrits de Werner Heisenberg, mais pas ceux de Bohr. En fait, Bohr et Heisenberg ont été en désaccord pendant des décennies de façon profonde et importante. L'idée qu'il y ait eu un point de vue unifié de Copenhague sur l'interprétation est, nous allons le montrer, une invention postérieure à la seconde guerre mondiale, dont Heisenberg est le principal responsable. Bien d'autres physiciens ou philosophes, chacun de sa façon, ont contribué à la promotion de cette invention pour des buts polémiques ou rhétoriques".

sique, mais représente plutôt une procédure expérimentale pour préparer ou tester un ou plusieurs systèmes physiques". Il fait également le commentaire général : "la théorie quantique est incompatible avec la proposition selon laquelle des mesures constituent des processus qui nous permettent de découvrir des propriétés inconnues et préexistantes". Dans cette perspective, une fonction d'onde est une représentation objective (indépendante de l'observateur) d'une méthode de préparation, plutôt que du système physique lui-même. Cette méthode peut mettre en jeu la mesure d'une quantité physique par un observateur donné ; par exemple, on peut préparer un état de spin en envoyant la particule à travers un aimant de Stern et Gerlach, et en mesurant sa position à la sortie. Mais on peut aussi préparer le système par d'autres méthodes, par exemple en lui laissant atteindre l'équilibre thermique, comme dans beaucoup d'expériences de résonance magnétique ; dans un tel cas, la description du système ne met plus en jeu un seul vecteur d'état, mais un grand nombre d'entre eux, qui peuvent tous être résumés dans un "opérateur densité" (§ A-6 du Chapitre XII). Quoi qu'il en soit, associer le vecteur d'état à une procédure de préparation semble une façon raisonnable de procéder dans le cadre de l'interprétation standard de la mécanique quantique.

Une telle définition n'exclut pas que le vecteur d'état puisse contenir de l'information sur les propriétés physiques du système. Par exemple, quand une quantité physique a été mesurée avec un résultat donné, la mécanique quantique prédit que le même résultat est toujours obtenu lorsque la même mesure est répétée juste après. Il devient donc naturel de penser que le système physique possédait entre les mesures une propriété physique associée à la certitude de la seconde mesure – voir Chapitre III. Le résultat de mesure devient alors une propriété du système. Mathématiquement, cette idée s'exprime sous la forme suivante : tous les opérateurs agissant dans l'espace des états qui acceptent $|\Psi\rangle$ comme l'un de leurs vecteurs propres correspondent à des propriétés physiques qui ont des valeurs précises dans cet état, et peuvent donc être associées à des propriétés du système. Cependant, pour un état donné $|\Psi\rangle$, la plupart des opérateurs ne sont pas dans ce cas, de sorte que seule une petite proportion des propriétés qui pouvaient être définies en mécanique classique peuvent encore être définies quantiquement ; de plus, la liste de celles qui peuvent être définies n'est pas fixe, mais dépend de $|\Psi\rangle$. Hartle propose la définition suivante [45] : "L'état d'un système individuel en mécanique quantique est donc défini comme la liste de toutes les propositions (concernant le système individuel) avec leur valeurs de vérité – vrai, faux, ou indéfini".

Pour finir, on arrive à une situation un peu intermédiaire où ni l'interprétation purement ondulatoire ni l'interprétation purement probabiliste ne sont correctes, mais où des éléments des deux points de vue sont combinés. Nul doute que la préparation d'un système physique est un fait objectif, de

sorte que si le vecteur d'état la décrit il doit avoir une certaine composante objective – le vecteur d'état ne peut pas être purement mental et dépendre de l'observateur. Parfois, certaines propriétés du système existent, parfois d'autres, mais dans tous les cas la plupart n'existe pas, ce qui implique que leurs mesures vont donner des résultats aléatoires ; les deux interprétations sont combinées dans un tout qui met l'accent sur l'ensemble du dispositif expérimental. Bohr décrivait ce genre de situation en utilisant le concept général de "complémentarité" ; par exemple, dans [46], il écrit "le point de vue de la complémentarité se présente comme une généralisation rationnelle de l'idée même de causalité" (comment relier de façon causale une procédure de préparation à une autre d'observation).

En ce qui concerne les probabilités, la mécanique quantique standard utilise une notion de probabilité ne se réfèrant pas à tel ou tel observateur spécifique, puisqu'elle concerne tous les observateurs indépendamment de leur identit é personnelle. Ces probabilités ne sont pas subjectives, mais "intersubjectives". Les sauts brusques de ces probabilités sont donc de nature différente de ceux d'une distribution classique de probabilité, qui se produisent lorsqu'une information nouvelle est acquise par un observateur donné.

## C. Autres formalismes, théorie des champs, intégrales de chemin

La mécanique quantique peut être formulée sous des formes diverses qui mettent en jeu des équations différentes ; ces formes sont équivalentes, mais s'avèrent plus ou moins commodes en fonction du système physique étudié. Depuis l'introduction initiale de l'équation de Schrödinger en 1926, de nombreux développements et généralisations du formalisme quantique ont été proposés. Il est évidemment hors de question de les décrire tous ici ; le seul but de cette brève partie est d'en mentionner quelques-uns qui sont particulièrement importants.

Une étape décisive dans le développement de la mécanique quantique a été l'inclusion de la notion de particules identiques. Elles peuvent être, soit des bosons (photons, atomes $^4$He, etc.), soit des fermions (électrons, protons, etc.), et obéissent à des règles différentes concernant la symétrie de leur vecteur d'état lors d'un échange entre particules identiques : les bosons sont décrits par un état complètement symétrique, alors que les fermions ont un vecteur d'état complètement antisymétrique. Une conséquence directe est que deux fermions ne peuvent jamais occuper le même état quantique individuel, comme postulé par Pauli en 1925 avec son principe d'exclusion (ce principe a été initialement introduit pour les électrons des atomes [47], puis généralisé à tous les fermions). Plus tard, Dirac [48], Fock [49], et Jordan [50] ont proposé un traitement très commode des particules identiques grâce à l'usage d'opérateurs de création et d'annihilation, qui prennent en compte automatiquement ces règles de symétrisation, à la fois pour fermions et bosons ; cette

méthode est parfois appelée “deuxième quantification” (en anglais : “second quantization”) pour des raisons historiques.

La motivation initiale de Dirac était la quantification du champ électromagnétique et l'obtention des coefficients d'Einstein d'absorption et d'émission dans le cadre de la théorie quantique. Depuis, le formalisme des opérateurs de création et d'annihilation est devenu l'outil de base de toute une branche de la mécanique quantique appelée théorie quantique des champs, qui s'applique à tout champ (pas seulement le champ électromagnétique). Nous avons déjà mentionné à la fin du § A-3 que la théorie quantique des champs fournit beaucoup de résultats et a de nombreuses applications, particulièrement en théorie des particules élémentaires, cosmologie, etc. La théorie quantique des champs est généralement écrite sous une forme relativiste (compatible avec la relativité restreinte d'Einstein), contrairement à l'équation de Schrödinger habituelle (qui suppose un temps absolu, comme dans la relativité galiléenne). En théorie des champs, on préfère souvent prendre un point de vue où le vecteur d'état reste constant, tandis que l'évolution dans le temps est transférée aux opérateurs de champ, en faisant usage du “point de vue de Heisenberg”. On obtient ainsi des équations de propagation pour les opérateurs de champ qui sont semblables à celles d'un champ classique, à part le fait que les fonctions qui apparaissent dans les équations sont des opérateurs et non des fonctions ordinaires.

Toutefois quand, à la fin du calcul, il devient nécessaire d'obtenir une probabilité, le vecteur d'état redevient indispensable pour écrire la probabilité, c'est-à-dire la valeur moyenne d'un projecteur ; le vecteur d'état reste donc un ingrédient essentiel de la mécanique quantique dans ce point de vue. De plus, dans de nombreuses branches de la physique atomique, moléculaire, ou de la matière condensée, les effets relativistes sont généralement négligeables, ce qui explique pourquoi l'équation de Schrödinger reste l'outil de base de la mécanique quantique dans ces domaines. D'un point de vue fondamental, choisir d'utiliser le point de vue de Schrödinger ou celui de Heisenberg ne change pas grand chose à l'interprétation de la mécanique quantique et ses difficultés (voir aussi la discussion du § C-2 au Chapitre V). On peut même considérer que la théorie quantique des champs possède autant de problèmes d'interprétation, si ce n'est plus, que la mécanique quantique plus élémentaire. Cela devient encore plus vrai si l'on cherche à inclure la gravité, qui introduit en fait plusieurs problèmes qui lui sont spécifiques (traitement quantique de l'espace-temps).

Feynman a généralisé des idées de Dirac en introduisant une autre procédure de quantification, appelée “intégrales de chemin de Feynman” [51, 52]. En mécanique classique, un lagrangien décrivant le mouvement d'un système physique peut être utilisé pour associer à chaque variable de position une variable conjuguée, ce qui permet ensuite de définir un hamiltonien. La procédure de quantification standard part de cet hamiltonien et introduit

des règles de commutation pour toutes les paires de variables conjuguées, qui deviennent des opérateurs ne commutant pas. Feynman a toutefois montré qu'une autre méthode peut être utilisée : on peut également partir directement du lagrangien, calculer des intégrales classiques le long de divers chemins de ce lagrangien appelées "actions", et pour finir obtenir des amplitudes de probabilité quantiques en effectuant une somme sur tous les chemins classiques possibles. Il a montré que cette procédure conduit à des résultats qui sont équivalents à ceux obtenus à partir de l'équation de Schrödinger standard. Dans ce point de vue, on obtient directement des amplitudes de probabilité reliant divers points de l'espace des configurations à des instants différents ; il n'est donc pas nécessaire d'appliquer la règle de Born et de calculer le produit entre un bra et un ket, d'utiliser des opérateurs et de les diagonaliser, etc. Cette approche illustre clairement la relation qui existe entre mécaniques classique et quantique, de façon analogue à la relation entre optique géométrique et optique ondulatoire. De plus, ce point de vue se trouve être particulièrement utile dans certains cas, par exemple lorsque le lagrangien ne permet pas de définir de variable conjuguée pour toutes les variables de position, de sorte que l'on ne peut pas construire un hamiltonien. Il fournit réellement une nouvelle procédure de quantification qui peut être utilisée dans de nombreuses situations, par exemple si l'on cherche à combiner mécanique quantique et gravité (relativité générale).

# Chapitre II

# Situation actuelle, des difficultés conceptuelles subsistent

Un certain nombre des difficultés conceptuelles de la mécanique quantique, déjà identifiées par ses inventeurs, subsistent à l'heure actuelle. Que le lecteur n'en retire pas l'impression qu'il s'agit d'une théorie peu solide ! L'arbre ne doit pas cacher la forêt : indépendamment de ces difficultés très réelles, la mécanique quantique est assurément l'une des théories les plus couronnées de succès de toute la science. On peut même considérer que sa faculté d'adaptation aux situations les plus variées est sa caractéristique la plus extraordinaire ; elle continue à être toujours aussi efficace dans ses prédictions en accompagnant des progrès expérimentaux constants ; ces derniers permettent d'avoir accès à de nouvelles situations physiques que les pères fondateurs de la théorie n'avaient aucun moyen de prévoir. De fait, il existe très peu de théories dont la vérification ait été faite avec la même précision, et ceci dans des domaines d'application variés. Il subsiste cependant que, sur le plan conceptuel, des difficultés sont toujours présentes, et ce sont elles qui font l'objet du présent chapitre. Comme nous le verrons, la plupart mettent en jeu le processus de mesure quantique et la nature du phénomène aléatoire qui se produit à cette occasion.

Nous l'avons vu, dans le point de vue de von Neumann ce n'est que lorsqu'une mesure est effectuée que des sauts aléatoires se produisent, selon le postulat de réduction du vecteur d'état. Sinon, en général la fonction d'onde évolue progressivement, d'une façon parfaitement prévisible et continue, selon l'équation de Schrödinger. Bien évidemment, utiliser deux postulats aussi différents pour l'évolution du même objet mathématique est une situation tout à fait inhabituelle en physique[1]. Cette idée était d'ailleurs une totale nou-

[1] Au lieu du "point de vue de Schrödinger", il est équivalent d'utiliser "point de vue

veauté lorsqu'elle a été introduite, et reste actuellement unique dans toute la physique, ainsi qu'une source de difficultés – en particulier celles liées à la compatibilité entre les deux postulats. Il serait plus naturel de voir les processus de mesure, non pas comme complètement à part, mais simplement comme un processus d'interaction ordinaire entre un système mesuré (qui peut éventuellement être microscopique) et un appareil de mesure macroscopique ; il semblerait bien préférable d'utiliser une théorie plus générale où un tel processus soit traité dans le cadre des lois ordinaires de la physique, de sorte que la distinction entre évolution ordinaire et mesure devienne inutile. En d'autres termes, pourquoi donc attribuer aux mesures un caractère aussi particulier, de sorte que deux postulats distincts deviennent nécessaires ? Où exactement s'arrête le domaine d'application du premier pour laisser la place au second ? Plus précisément, parmi toutes les interactions – ou perturbations – que peut subir un système physique, lesquelles doivent être considérées comme normales (évolution de Schrödinger), et lesquelles comme une mesure (réduction du vecteur d'état) ? On voudrait mieux comprendre la raison pour laquelle la physique nous demande d'introduire une frontière entre deux mondes et la nature de cette frontière : le monde de Schrödinger, parfaitement continu et déterministe, et celui très différent de Born et de la mesure, où l'évolution déterministe cesse pour laisser la place à des processus discontinus et aléatoires.

Dans le point de vue de Bohr également, les processus de mesure et les appareils associés sont clairement "discriminés" des autres processus et systèmes physiques. Dans l'univers de Bohr, l'évolution se fait généralement de façon libre et régulière selon l'équation de Schrödinger. Mais, dans le cas particulier des événements mettant en jeu l'interaction entre un système quantique microscopique et un appareil macroscopique conçu pour transférer de l'information vers des observateurs humains, s'introduit une composante aléatoire fondamentale. Ces opérations de mesure sont en quelque sorte considérées comme des "bulles fermées" incluses dans cette évolution générale, des événements clos s'étendant sur une région d'espace-temps de leur début à leur fin, et qu'il ne faut pas chercher à décomposer de façon plus fine en événements au sens relativiste du terme. Ces processus sont caractérisés par le fait qu'une intelligence humaine pose une question à la Nature, dont résulte une réponse unique, mais non déterministe.

---

de Heisenberg" (§ A-5 du Chapitre XII) ; l'évolution continue du vecteur d'état est alors transférée vers les observables du système (opérateurs agissant sur son espace des états), tandis que le vecteur d'état reste indépendant du temps en l'absence de mesure. Les observables évoluent de façon continue, que des mesures soient effectuées ou pas. Mais le vecteur d'état doit encore obéir à des règles différentes suivant la situation : la plupart du temps il reste parfaitement constant, mais lors d'une mesure il saute brusquement vers une nouvelle valeur prenant en compte l'information nouvelle. L'acquisition d'information est donc toujours considérée comme un processus physique totalement différent de l'évolution "normale", ce qui introduit la nécessité de bien définir la frontière entre les deux processus.

Que nous préférions le point de vue de Bohr ou celui de von Neumann, nous sommes confrontés à un problème logique qui n'existait pas en mécanique classique, lorsque personne ne pensait que les mesures fournissant de l'information doivent être traitées à part parmi les processus physiques. Bohr nous apprend que nous ne devrions pas tenter de transposer notre expérience journalière du monde vers des systèmes microscopiques ; mais alors, pour chaque expérience, où mettre exactement la limite entre les deux mondes ? Dans l'approche de von Neumann également, il devient nécessaire d'introduire une frontière (ou une coupure, souvent appelée "quantum split" en anglais) entre le système mesuré et l'appareil de mesure, ou entre une évolution quantique ordinaire et une mesure. Certes, on a souvent fait valoir que la position précise de cette frontière est sans importance pratique, car elle n'affecte pas les prédictions physiques. Il reste toutefois vrai que, dans ces conditions, la théorie n'est pas parfaitement définie par ses postulats. Peut-on réellement se contenter de remarquer que la distance entre macroscopique et microscopique est tellement grande que la position de la frontière entre ces deux mondes est sans importance ? Bell (et d'autres) se sont plaints de ce caractère mobile et mal défini de la frontière [53] ; selon les mots de Mermin [54], "Bell déplorait l'existence d'une frontière mobile qui hante la mécanique quantique". Comme nous le verrons dans le Chapitre XI, le but de certaines autres interprétations de la mécanique quantique est de supprimer l'existence de cette frontière.

De plus, on peut trouver très surprenant qu'en physique moderne il faille faire jouer un rôle aussi spécial à un "observateur" ou à l'information acquise, ce qui donne à la théorie une coloration anthropocentrique inattendue, comme dans l'astronomie médiévale. Devons-nous réellement rejeter comme non scientifique l'idée d'une description scientifique de systèmes physiques isolés, simplement parce que nous ne les observons pas ? Si les observateurs sont si importants, comment doit-on les définir exactement ? Par exemple, est-ce qu'un animal peut réaliser une expérience et réduire le vecteur d'état, ou est-ce l'unique apanage des être humains ? Bell avec humour a posé la question [55] : "La fonction d'onde de l'Univers était-elle en train d'attendre d'effectuer son premier saut pendant des milliers de millions d'années jusqu'à l'apparition de la première créature vivante unicellulaire ? Ou a-t-il fallu attendre un peu plus l'apparition d'un observateur plus qualifié – avec un doctorat d'état ?" – voir aussi la Ref. [56], en particulier son titre. Ces questions très générales sont difficiles et quelque peu philosophiques, et nous y reviendrons dans le Chapitre XI ; par exemple nous y mentionnons que London et Bauer [57] ont proposé que la capacité de jouer le rôle d'un observateur en théorie quantique soit liée à la faculté d'introspection d'une créature vivante ; voir également le § C-2-b du Chapitre XI.

Une autre difficulté provient du caractère aléatoire des prédictions de la mécanique quantique. En soi, une telle situation n'est pas inhabituelle en

physique, où par exemple la mécanique statistique classique fait un usage constant de probabilités. Mais les probabilités sont alors associées étroitement à la notion d'ensemble statistique : on suppose par exemple que le système est choisi au hasard parmi un très grand nombre de systèmes similaires définissant un même ensemble. Certes, tous ces systèmes partagent un certain nombre de propriétés contenues dans la description statistique, mais une description plus précise peut révéler qu'à un niveau plus fin, ils diffèrent aussi par un certain nombre de spécificités, ou par des influences minimes qu'ils ont subies, etc. En d'autres termes, chaque système individuel possède plus de propriétés physiques que celles spécifiées pour l'ensemble. La même question se transpose alors immédiatement à la mécanique quantique : si ses prédictions sont des probabilités, faut-il en conclure qu'elle ne décrit que des ensembles de systèmes ? Ou faut-il au contraire considérer que le vecteur d'état fournit la description la plus précise possible d'un seul système physique ? Nous aurons plusieurs occasions de revenir sur cette question, en particulier aux Chapitres III et XI.

Une question générale qui se pose également est : devons-nous accepter comme valable une théorie physique qui est prédictive mais pas descriptive (qui donne des prévisions correctes, mais aucune description des événements physiques) ? Bien des questions de ce type ont été discutées, et il est impossible de résumer tout ce qui a été écrit sur ces difficultés, en particulier sur le rôle exact et l'évolution du vecteur d'état, en un nombre raisonnable de pages. A titre d'illustration, nous nous contenterons de discuter dans ce chapitre quelques exemples, la chaîne sans fin de von Neumann (§ A), le chat de Schrödinger (§ B), l'ami de Wigner (§ C) et les mesures négatives (§ D). Puis (§ E) nous proposerons un certain nombre de citations anciennes ou plus récentes, qui permettent de se faire une bonne idée de la variété des positions possibles, avant de terminer par un paragraphe mentionnant quelques points qui ont donné lieu à des erreurs dans le passé (§ F).

## A. La chaîne (ou régression) sans fin de von Neumann

Von Neumann, dans son traité publié en 1932 (Chapitres 4-6 de [4]), a introduit une théorie explicite de la mesure quantique, que nous avons rappelée au § B-2-a du Chapitre I. A la différence du point de vue de Bohr, von Neumann considère l'appareil de mesure comme un système quantique sur le même plan que le système mesuré. Il étudie ce qui se produit lorsque le système mesuré S est mis en contact avec un appareil de mesure M et interagit avec lui pendant un certain temps. M inclut un "pointeur" (ou aiguille de cadran) macroscopique qui, une fois que l'interaction est terminée, a atteint une position qui dépend de l'état initial de S. Dans ce chapitre, nous donnons une introduction aux idées générales concernant la chaîne de von Neumann, sans écrire d'équations ; nous reviendrons dans un chapitre ultérieur sur un

traitement plus détaillé du modèle de von Neumann de la mesure (§ A du Chapitre IX) – voir également § 9.2 de [21] ou § 11.2 de [58].

Commençons par un cas particulier : celui où, initialement, le système S était dans un état propre de l'observable mesurée $A$ caractérisé par une de ses valeurs propres[2] $a$. La position atteinte par le pointeur dépend alors de l'état propre ; on peut donc dire que l'observation de la position macroscopique de P revient à mesurer l'observable et obtenir le résultat $a$.

Mais, de façon plus générale, initialement S n'est pas dans un état propre de l'observable mesurée $A$, mais dans une superposition de tels états. Comme l'équation de Schrödinger est linéaire, elle prédit que le système total S+M atteint après interaction une superposition d'états[3]. Dans les différentes composantes de cette superposition, le pointeur se trouve dans des positions différentes, chacune correspondant à un résultat de mesure différent ; on dit alors que les deux systèmes S et M sont dans un état d'intrication quantique (Chapitre VII). Ainsi, la linéarité de l'équation de Schrödinger la rend incapable d'effectuer une sélection entre ces résultats ; elle ne peut conduire qu'à une superposition de tous les résultats, comme si aucun résultat bien défini n'avait émergé de la mesure !

Pour résoudre ce problème, on pourrait alors être tenté d'ajouter un "second étage" au processus, et d'introduire un second appareil de mesure M′ dont le rôle sera de déterminer la position du pointeur de M. Mais le processus se répète et la linéarité de l'équation de Schrödinger conduit à une superposition plus étrange encore puisque, cette fois, elle contient S+M+M′ ainsi que des positions différentes des pointeurs de M et M′. Par récurrence, si l'on ajoute de plus en plus d'appareils de mesure, M″, etc., on crée une chaîne de plus en plus longue de systèmes corrélés, sans jamais arriver à sélectionner un seul résultat de mesure. Ce processus récurrent M, M′, M″,..., est appelé régression de von Neumann, ou encore chaîne infinie de von Neumann. On peut résumer toute cette discussion par une seule phrase : "L'unicité des résultats ne peut pas émerger de la seule équation de Schrödinger ; elle crée en effet une chaîne de superpositions cohérentes qui se propage sans fin".

Un exemple simple est utile pour illustrer le processus de façon plus concrète. Supposons par exemple que nous considérions un atome de spin 1/2 qui pénètre dans le champ magnétique d'un analyseur de Stern et Gerlach. Si l'état initial du spin correspond à une direction qui est, soit parallèle, soit antiparallèle à la direction d'analyse de l'appareil (définie par la direction de son champ magnétique), le spin est initialement dans un état propre correspondant à la mesure ; le paquet d'ondes est dévié vers le haut dans le premier cas, vers le bas dans le second. Mais si la direction initiale du spin était perpendiculaire à la direction d'analyse, la fonction d'onde se sépare

[2]Pour simplifier, nous supposons que cette valeur propre n'est pas dégénérée, mais la généralisation à des valeurs propres dégénérées est possible.

[3]Cette superposition est écrite explicitement en (IX-7).

en deux paquets d'ondes différents, l'un dévié vers le haut, l'autre vers le bas ; c'est à nouveau une conséquence directe de la linéarité de l'équation de Schrödinger. Lorsqu'ils se propagent plus loin, chacun des deux paquets d'ondes peut frapper un détecteur avec lequel il interagit et dont il modifie l'état (ainsi que le sien) ; par exemple, les atomes de spin 1/2 sont ionisés et produisent des électrons, de sorte que la superposition linéaire englobe maintenant plus de particules. De plus, lorsqu'une cascade d'électrons est produite dans un multiplicateur d'électrons, tous ces électrons supplémentaires deviennent également partie de la superposition. Il n'y a pas de limite intrinsèque à ce qui devient bientôt la propagation d'une chaîne sans fin : rapidement, la linéarité de l'équation de Schrödinger conduit à un vecteur d'état qui est la superposition cohérente d'états complètement différents pour un nombre macroscopique de particules, des courants macroscopiques et, pourquoi pas, des aiguilles d'appareils ou des enregistreurs qui écrivent des chiffres macroscopiques sur une feuille de papier ! Si nous restons dans le cadre de l'équation de Schrödinger, rien ne nous permet de stopper la progression de cette régression infinie. Devons-nous alors accepter l'idée qu'à la fin c'est le cerveau de l'expérimentateur, lorsqu'il prend connaissance des résultats imprimés, et donc un être humain doué de conscience, qui entre dans une telle superposition ?

Le notion même de cerveau ou de conscience se trouvant dans une superposition macroscopique n'a rien d'intuitif ni de très clair ; personne n'a jamais observé à la fois deux résultats contradictoires. Est-ce que cette situation étrange devrait être vue comme celle où un résultat expérimental imprimé sur une feuille de papier ressemblerait à deux diapositives superposées, ou une photographie doublement exposée ? En pratique, nous savons bien que nous observons toujours un résultat unique et bien défini dans une expérience ; il semble donc que la superposition linéaire se soit réduite d'une façon ou d'une autre avant de nous atteindre – probablement avant même qu'elle ne devienne suffisamment macroscopique pour mettre en jeu des appareils de mesure. Il semble alors évident[4] qu'une théorie raisonnable devrait briser quelque part la chaîne de von Neumann, quand (ou peut-être avant) elle atteint le monde macroscopique. Cette opération porte souvent le nom de "coupure de Heisenberg" ("Heisenberg cut" en anglais). Mais quand et où exactement effectuer cette coupure ?

Von Neumann conclut à partir de son analyse que, effectivement, il n'est pas possible de formuler les lois de la mécanique quantique sans faire référence à la prise de conscience humaine. Il considère l'émergence de la perception d'un résultat unique lors d'une mesure comme un élément irréductible

[4]Peut-être pas si évident après tout ? De fait, il existe une interprétation de la mécanique quantique qui repose précisément sur l'idée que la chaîne n'est jamais rompue : l'interprétation d'Everett, qui sera discutée au § M du Chapitre XI.

de la théorie[5]. La solution du problème demande alors l'introduction d'un postulat spécial, le "postulat de projection du vecteur d'état" (§ B-2 du Chapitre I), qui force l'émergence de ce résultat unique dès qu'un observateur prend connaissance du résultat.

La notion de régression de von Neumann est également à la source du phénomène de décohérence (§ C-3 du Chapitre VII). Le mot "décohérence" est en fait plutôt utilisé habituellement pour désigner le tout début de la chaîne, au moment où le nombre de degrés de liberté mis en jeu reste encore relativement limité. Mais la notion générale de chaîne de von Neumann inclut tous les stades de la régression, ce stade initial comme sa prolongation, qui se propage jusqu'à l'autre extrême où le paradoxe devient inacceptable parce que trop contraire au bon sens : le chat de Schrödinger.

## B. Le chat de Schrödinger ; mesures

La fameuse histoire du chat de Schrödinger (1935) illustre le même problème, mais d'une façon différente.

### B-1. L'argument

Le chat n'apparaît que dans quelques lignes dans le contexte d'une discussion bien plus générale dans un article de Schrödinger [59] dont le titre est "La situation actuelle de la mécanique quantique". Il écrit en allemand (pour une traduction en anglais, voir [60]) "On peut même imaginer des situations tout à fait grotesques. Un chat est enfermé dans une boîte en acier, dans laquelle se trouve le dispositif diabolique suivant (sur lequel le chat ne peut avoir aucune action) : dans un compteur Geiger se trouve une toute petite quantité de matière radioactive, si petite qu'il faudra par exemple une heure pour avoir des probabilités égales que l'un des noyaux se désintègre, ou alors aucun. En cas de désintégration, le compteur à décharge se déclenche et, par un relais, relâche un marteau qui vient briser une petite ampoule contenant de l'acide cyanhydrique (poison violent). Si on laisse à lui-même l'ensemble du système pendant une heure, on dirait que le chat est toujours vivant seulement si entre-temps aucun noyau ne s'est désintégré. La première désintégration atomique l'aurait empoisonné. La fonction $\Psi$ du système total

[5]En ses termes ([4], pp. 418-421) : "... la mesure ou le processus correspondant de la perception est une nouvelle entité relative à l'environnement physique, sans lui être réductible. Assurément, la perception subjective nous conduit à la vie intellectuelle intérieure de l'individu, qui de par sa nature même échappe à l'observation ... Toutefois, une exigence fondamentale du point de vue scientifique – le principe appelé de parallélisme psycho-physique – est qu'il doit être possible de décrire les processus extra-physiques de la perception subjective comme s'ils faisaient partie du monde physique – c'est-à-dire d'attribuer à ses éléments des processus physiques équivalents dans l'environnement objectif, et dans l'espace ordinaire".

exprimerait cette situation en contenant un mélange (une superposition de composantes) où le chat est vivant et mort, avec des poids égaux.

Ce type de cas est typique d'une situation où une indétermination initialement restreinte au domaine atomique se propage vers une indétermination macroscopique, qui peut alors être résolue par observation directe. Il nous empêche d'accepter trop naïvement comme valable un modèle 'flou' pour représenter la réalité. En lui-même, il n'a rien qui soit peu clair ou contradictoire. Il existe une différence entre une photo bougée ou floue à cause d'une mauvaise mise au point et une photo de nuages et de volutes de fumée".

En d'autres termes, Schrödinger considère une chaîne de von Neumann, qui part d'un (ou quelques) noyau atomique. L'ensemble de l'appareillage est conçu de façon que, si le noyau émet un photon gamma, ce dernier est enregistré par un détecteur qui fournit un signal électrique, qui traverse un étage d'amplification, puis alors déclenche un système mécanique macroscopique qui ouvre automatiquement une bouteille de poison, qui pour finir tue le chat (Fig. II.1). C'est ce qui se produit dans la branche du vecteur d'état où le photon est émis ; aucun de ces événements ne se produit dans la branche où aucun photon n'est émis. Lorsque la probabilité de désintégration est 1/2, le système global atteint une superposition comprenant deux composantes de poids égal, une où le chat est vivant et une où le chat est mort. L'équation d'évolution prévoit donc que le chat est à la fois vivant et mort, au lieu d'être vivant ou mort ("problème et-ou", voir la note 11). Schrödinger considère que, de toute évidence, une telle coexistence entre états aussi différents du chat est une situation impossible (grotesque) et en conclut, donc, que quelque chose a dû arriver à la chaîne de von Neumann avant qu'elle n'aille trop loin. A nouveau, la difficulté est d'expliquer l'unicité du monde macroscopique : pourquoi, à un niveau macroscopique, un résultat unique (chat vivant, ou mort) émerge-t-il spontanément, alors que ce n'est pas le cas si l'on se limite strictement à l'équation de Schrödinger.

Le chat est, évidemment, le symbole de n'importe quel objet macroscopique – Einstein, dans une lettre à Schrödinger de la même année [61], prenait l'image de l'explosion macroscopique d'un baril de poudre[6]. Un tel objet ne peut jamais se trouver dans un état "flou" contenant des possibilités contradictoires (bouteille ouverte et fermée, chat vivant et mort, etc.). Ce que Schrödinger est donc en train de nous dire est que sa propre équation ne doit pas être poussée trop loin, jusqu'à inclure des objets macroscopiques. La mécanique quantique standard, non seulement est incapable d'éviter de tels cas paradoxaux, mais fournit une recette pour les produire ! La conclusion logique est alors qu'un ingrédient supplémentaire est nécessaire pour permettre de sélectionner une seule des branches de la superposition et éviter ces su-

[6] Einstein écrit "Aucune interprétation, si habile qu'elle soit, ne pourra transformer cette fonction $\Psi$ en une description appropriée des choses réelles ; dans la réalité, il n'y a rien entre explosé et non explosé".

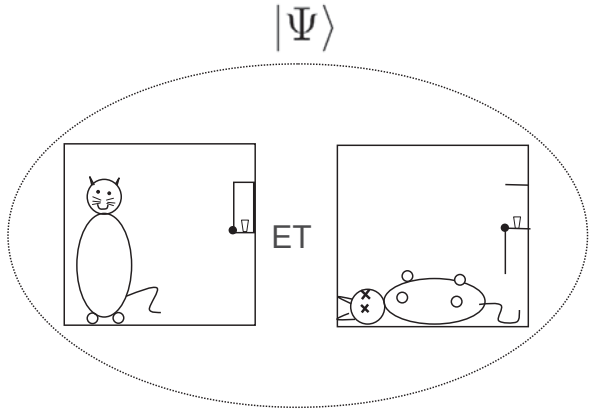


FIGURE *II.1 – Le paradoxe du chat de Schrödinger illustre comment les règles de la mécanique quantique standard peuvent conduire à des situations extrêmement étranges, où des objets macroscopiques se trouvent en même temps dans des états complètement différents. Schrödinger imagine un chat enfermé dans une boîte qui contient également un dispositif déclenché par l'émission d'une particule par un noyau radioactif. Lorsque la particule est émise, l'appareil se met en marche et ouvre (ou brise) une bouteille de poison, ce qui tue le chat. Si la particule n'est pas émise, le chat reste vivant. Au bout d'un certain temps, lorsque la probabilité d'émission de la particule par le noyau est* $1/2$*, l'état* $|\Psi\rangle$ *du système total contient des composantes associées à des situations macroscopiques complètement différentes, toutes deux réalisées en même temps. L'unicité de la réalité macroscopique demanderait que le "ET" au milieu de la figure soit remplacé par un "OU", mais ceci n'est pas contenu dans l'équation de Schrödinger. Ce dernier qualifie cette situation de "grotesque".*

perpositions ridicules[7]. Inutile de dire que la limite de validité de l'équation linéaire n'a pas nécessairement besoin de provenir de l'objet macroscopique lui-même : la sélection d'une branche de la superposition peut parfaitement avoir lieu bien avant qu'elle n'atteigne le chat. Mais la question vraiment difficile qui subsiste est de savoir où exactement, et quand ce processus de sélection se produit.

[7]L'histoire fait une pirouette amusante en associant le nom de Schrödinger à deux concepts opposés. Le premier est celui d'une équation universelle et puissante, équation continue qui s'applique à tous les systèmes ; le second est le chat, le symbole des limites que la même équation ne devrait jamais dépasser.

L'interprétation standard de la mécanique quantique postule que la seule façon de stopper la propagation linéaire de l'équation de Schrödinger et de casser la régression est de procéder à un acte de mesure. La question devient alors : un animal évolué, ou un être vivant très primitif (bactérie), possède-t-il les capacités intellectuelles suffisantes pour effectuer une mesure et résoudre plusieurs branches de von Neumann en une seule ? Où se situe la limite entre les êtres vivants capables ou non de percevoir leur propre état et de se projeter eux-mêmes sur un état vivant ou mort ? Ou alors serait-ce que les seuls humains ont accès à un niveau suffisant d'introspection pour devenir conscients de leurs propres observations, et réduire le vecteur d'état ? C'est le point de vue de certaines théories, qui alors impliquent qu'un chat peut effectivement rester dans une superposition d'états vivant et mort pendant très longtemps.

La dernière phrase de la citation de Schrödinger donnée plus haut est souvent considérée comme obscure. Il est probable que Schrödinger désire insister sur la différence entre une connaissance incomplète (par une photographie floue) d'un objet bien défini, et un objet qui intrinsèquement n'a pas de frontières bien définies dans l'espace (un nuage) – entre une indétermination qui tient à un manque de connaissance ou une qui est intrinsèque. En d'autres termes, lui aussi remet en question le caractère complet de la mécanique quantique (Chapitre III).

### B-2. Malentendus

Un malentendu classique consiste à penser que le paradoxe du chat est résolu par la simple évocation de la décohérence (§ C-3 du Chapitre VII), qui explique pourquoi il est en pratique totalement impossible d'observer des interférences quantiques entre des états où un chat est vivant ou mort. Nous reviendrons plus en détail sur cette question au § C-3-b du Chapitre VII, nous contentant ici d'une brève discussion. En fait, la (dé)cohérence n'a rien à voir avec l'argument de Schrödinger : le chat est en réalité un symbole de l'absurdité d'un état quantique qui comprend deux possibilités incompatibles dans la vie courante, que ce soit de façon cohérente ou pas. Cela ne change rien à l'étrangeté de la situation finale que l'état en question soit un état pur (effectivement sujet à décohérence) ou un mélange statistique (qui y est insensible). L'évolution standard du vecteur d'état, qui inclut la décohérence, ne change pas les normes de ses deux composantes (celle où le chat est vivant et celle où le chat est mort) : la seule chose qu'elle puisse faire est de créer de plus en plus de ramifications à l'intérieur de chacune d'entre elles, sans jamais modifier leurs normes, donc sans affecter la probabilité de survie du chat. D'ailleurs, le chat lui-même est déjà part de l'environnement

de l'atome radioactif, ainsi que le détecteur et la bouteille de poison[8]. La chaîne (l'arbre des possibilités) commence à se propager à un niveau microscopique (à partir du noyau radioactif) et se propage de plus en plus loin sans limite apparente ; la difficulté est de l'empêcher d'atteindre le monde macroscopique. Cela n'ajoute donc rien de faire remarquer que la chaîne continue au-delà du chat, le mal est déjà fait. Pour finir, invoquer la décohérence n'est pas répondre à la question, c'est juste la répéter.

La vraie question que pose Schrödinger est comment comprendre l'unicité du monde macroscopique. Comment ce qui était indéterminé peut-il devenir déterminé, et par quel processus ? A quel moment et dans quelles conditions exactes la théorie cesse-t-elle d'être déterministe pour devenir stochastique ? La question qu'il pose n'est donc pas triviale, et il ne suffit pas d'invoquer la décohérence pour y répondre. L'impossiblité d'observer des interférences entre des états à chat mort et chat vivant est bien évidemment une condition nécessaire pour l'unicité macroscopique. Elle est cependant loin d'être suffisante. Schrödinger était bien au courant des propriétés de l'intrication en mécanique quantique, un mot qu'il a d'ailleurs introduit le premier dans ce contexte (il l'utilise explicitement dans l'article du chat ; voir § C-3-c du Chapitre III) ; il n'était certainement pas assez naïf pour croire que des chats vivants et morts peuvent interférer. D'ailleurs, dans son article [59] il ne mentionne nulle part le caractère cohérent ou incohérent de la superposition (les mots n'apparaissent pas une seule fois dans l'article) : pour lui, la question n'est pas d'éviter de se trouver en présence d'une superposition cohérente d'états macroscopiques différents, elle est de ne pas avoir de superposition du tout de tels états [9] !

En 1952, il a confirmé son opinion [62] en donnant une description pittoresque de ce que serait la situation peu enviable d'un physicien théoricien s'il n'existait aucune limite à la propagation sans fin de l'intrication prévue par l'équation de Schrödinger : "Presque chaque résultat qu'il [un théoricien] prédit concerne la probabilité que ceci *ou* cela se produise – avec souvent un grand nombre de possibilités. L'idée qu'il ne s'agisse pas d'alternatives mais que toutes les possibilités se produisent simultanément ne peut que lui

[8] Le chat lui-même n'est jamais dans une superposition cohérente de vivant ou mort. En effet, lors de la création de la curieuse superposition, le chat est déjà corrélé quantiquement avec la source radioactive, le système mécanique, et la bouteille de poison ouverte ou fermée, le gaz dans la boîte, etc. Toutes ces composantes agissent déjà comme un environnement et produisent une complète décohérence. Rétablir cette cohérence demanderait de mettre toutes ces composantes dans le même état quantique, une tâche clairement impossible. La propagation de la décohérence encore plus loin dans l'environnement n'ajoute rien de nouveau à l'argument.

[9] C'est par exemple le but principal des théories mettant en jeu une dynamique de Schrödinger modifiée, souvent non linéaire (§ K du Chapitre XI) : elles introduisent des équations du mouvement où, lorsque le niveau macroscopique est atteint, toutes les probabilités tendent vers zéro du fait de la dynamique, sauf une.

paraître lunatique, en fait *impossible*. Il réalise que si les lois de la nature prenaient *cette* forme pendant par exemple seulement un quart d'heure, nous trouverions tout notre environnement transformé en une sorte de bourbier, une sorte de gelée sans structure ou un plasma, tous les contours devenant flous, et nous-mêmes devenant des sortes de méduses". Pour Schrödinger, aucun théoricien raisonnable ne peut prendre cette éventualité bien au sérieux.

### B-3. Lien avec le problème de la mesure

Le paradoxe du chat de Schrödinger est étroitement relié à ce que l'on appelle souvent le "problème de la mesure" en mécanique quantique. Dans l'introduction de ce chapitre, nous avons déjà souligné les difficultés provenant de la définition trop vague de la frontière entre deux postulats d'évolution du vecteur d'état. La source de la difficulté provient de ce que l'équation de Schrödinger prédit que le "pointeur" de l'appareil de mesure, qui est censé indiquer le résultat, n'atteint pas de position bien définie après une mesure. En général[10] il atteint simultanément plusieurs positions, de sorte que l'unicité macroscopique n'est pas réalisée, exactement comme pour le chat. La situation rappelle alors celle d'une rivière qui se diviserait en plusieurs bras : l'eau s'écoule en même temps dans un bras *et* un autre, pas dans un bras *ou* un autre[11]. Bien sûr, si plusieurs positions du pointeur sont simultanément réalisées, aucun résultat bien défini n'émerge de la mesure, qui perd son sens habituel.

Pour obtenir une théorie où des résultats bien définis émergent à un niveau macroscopique des expériences, il est donc nécessaire de stopper la dynamique linéaire de Schrödinger à un point ou un autre : parmi toutes les possibilités que l'équation prédit, on doit choisir en introduisant un postulat, ou un mécanisme, qui les rend exclusives au lieu de simultanées. De façon générale, les probabilités sont en effet définies comme des nombres associés à des événements exclusifs : lorsqu'un dé est jeté puis qu'il s'arrête, il n'indique pas plusieurs résultats à la fois, mais un seul nombre compris entre 1 et 6 ; sinon, la notion de probabilité d'apparition de chacun des résultats perdrait son sens. De façon similaire, en mécanique quantique, pour interpréter les nombres que fournit simultanément la règle de Born comme de véritables probabilités, il faut introduire une notion d'exclusivité. Comme nous le verrons dans le Chapitre XI, différentes interprétations de la mécanique utilisent des méthodes variées pour atteindre cet objectif.

[10] Une position unique est cependant atteinte dans le cas particulier où le système de mesure se trouve initialement dans un état propre de la mesure (§ A-3 du Chapitre XII) ; dans ce cas, le résultat est certain, et aucun événement aléatoire ne se produit.

[11] D'Espagnat parle de la "difficulté et-ou" pour mettre en lumière la différence entre une coexistence et une alternative (Ref. [25], fin du § 10-1). Bell exprime une idée semblable dans la citation de la note 20 de la page 226.

### B-4. Les chats nouvelle vague

Il arrive toutefois que le sens des mots change en physique. Dans la littérature récente en électronique et optique quantiques, il est devenu de plus en plus fréquent d'utiliser les mots "chat de Schrödinger", ou "Schrödinger cat (SC)" dans un sens assez différent, voire presque contradictoire avec le sens initial. Au départ, le chat était en effet le symbole d'une impossibilité, un animal qui ne pourra évidemment jamais exister (une gargouille de Schrödinger ?), l'étape finale d'un raisonnement par l'absurde – bref, un symbole de quelque chose qui n'a jamais existé et n'existera jamais. De nos jours, les mêmes mots sont souvent utilisés pour désigner des états qui sont parfaitement réalisables, à savoir toute superposition cohérente d'états qui sont plus ou moins différents à un niveau le plus macroscopique possible (ici la cohérence est essentielle). Avec cette nouvelle définition, l'existence de chats de Schrödinger a été prévue et effectivement observée pour toute une catégorie de systèmes, comme une grande molécule se propageant à la fois dans les branches d'un interféromètre [63], ou alors un ion qui se trouve localisé à la fois dans deux positions différentes dans un piège. Bien sûr, de tels systèmes peuvent subir une décohérence du fait de l'apparition de corrélations avec l'environnement (§ C-3 du Chapitre VII). Des calculs théoriques de cette décohérence sont possibles à l'aide de l'équation de Schrödinger, qui peut être utilisée pour calculer comment se déroulent les premières étapes de la chaîne de von Neumann, et avec quelle rapidité le vecteur d'état tend à se ramifier en plusieurs branches mettant en jeu l'état quantique de l'environnement.

Pour résumer ce § B, le paradoxe met en lumière la composante centrale de la plupart de nos difficultés avec la mécanique quantique ; comme l'écrit Wigner [64], "les mesures qui laissent le système objet-plus-appareil de mesure dans un état où le pointeur de l'appareil est dans une position bien définie ne peuvent être obtenues dans le cadre des lois linéaires de la mécanique quantique". La question est alors : quel est donc le processus exact qui force la Nature à rompre cette linéarité et à faire un choix parmi les différents résultats possibles ? Il est clair que l'émergence d'un seul résultat est une question essentielle. Comme Pearle le résume de façon concise [14], le problème est d'expliquer "pourquoi les événements se produisent" !

## C. L'ami de Wigner

Dans une théorie comme la mécanique quantique où l'observateur joue un rôle aussi essentiel, à qui ce rôle peut-il appartenir ? Wigner discute le rôle d'un ami, à qui l'on a demandé d'effectuer une expérience, par exemple une expérience de Stern et Gerlach [65]. L'ami en question travaille à l'intérieur d'un laboratoire totalement fermé, de sorte qu'un observateur extérieur ne peut pas prendre connaissance des résultats de l'expérience avant d'ouvrir la

porte du laboratoire (Fig. II.2). Mais quelle est alors la situation juste après que la particule est sortie de l'analyseur et que sa position a été observée dans le laboratoire, tandis qu'elle reste inconnue à l'extérieur ? Depuis dehors, il est naturel de considérer l'ensemble du laboratoire fermé contenant l'expérience et l'ami comme une partie du "système" qui doit être décrit par un grand vecteur d'état. Tant que la porte du laboratoire reste fermée et que le résultat de la mesure est inconnu à l'extérieur, ce vecteur d'état continuera à contenir une superposition des deux résultats ; ce n'est que plus tard, lorsque le résultat est connu, qu'il semble pertinent d'appliquer le postulat de réduction du vecteur d'état. Mais, à l'évidence, pour l'ami de Wigner qui est dans le laboratoire, ce raisonnement est tout simplement absurde ! Que peut faire l'ouverture de la porte de son point de vue ? Il va évidemment préférer considérer que le vecteur d'état est réduit dès que le résultat est observé dans son propre laboratoire. Nous retombons alors sur un point que nous avons déjà discuté (§ B-3 du Chapitre I), le caractère absolu ou relatif du vecteur d'état : est-ce que cette contradiction signifie que nous devrions prendre en compte deux vecteurs d'état, l'un réduit et l'autre non réduit, pendant la période intermédiaire de l'expérience[12] ? Pour une discussion par Wigner lui-même du problème de la mesure, voir [64].

Une interprétation souvent associée au nom de Wigner[13] suppose que la réduction du vecteur d'état est un effet réel qui se produit au moment où un esprit humain acquiert une certaine connaissance du monde physique qui l'entoure, et avec lequel il interagit ; nous y reviendrons au § A-1-b du Chapitre XI. On peut par exemple considérer que les courants électriques d'un cerveau humain sont à l'origine de la réduction de l'état quantique des objets mesurés, via un processus physique encore inconnu. Alors, si l'on adopte ce point de vue, la réduction se produit sous l'effet de l'expérimentateur qui se trouve dans le laboratoire (l'ami de Wigner) et la contradiction du paragraphe précédent est levée. Mais, même si l'on accepte l'idée un peu provocatrice d'une action possible de l'esprit (ou de la conscience) sur l'environnement, ce point de vue ne supprime pas toutes les difficultés logiques : qu'est-ce qu'un esprit humain, quel niveau de prise de conscience est nécessaire [14] pour réduire l'état, comment agissent les courants électriques correspondants dans le cerveau, etc. ?

[12] Hartle considère que la réponse à cette question est "oui" [45] ; voir également l'interprétation relationnelle (§ C-1 du Chapitre XI).

[13] Le titre de la Ref. [65] suggère effectivement cette catégorie d'interprétation ; de plus, Wigner y écrit que "il s'ensuit (de l'argument de l'ami de Wigner) que la description quantique des objets est influencée par des impressions pénétrant la conscience". A la fin de l'article, il discute également l'influence de non-linéarités qui pourraient imposer une limite à la validité de l'équation de Schrödinger, et être cacactéristiques de la vie.

[14] Voir le § A-1 du Chapitre XI pour une discussion de la relation entre conscience et introspection (London et Bauer).

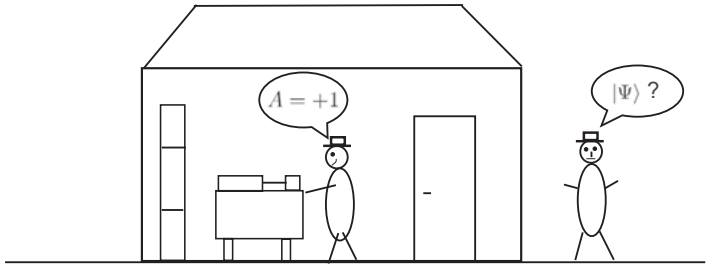


FIGURE *II.2 – Wigner suppose qu'un physicien à l'extérieur d'un laboratoire a un ami à l'intérieur qui effectue une mesure quantique donnant comme résultats possibles* $A = \pm 1$. *Lorsque l'ami observe un résultat, par exemple* $A = +1$, *il décrit le système physique par un vecteur d'état qui inclut cette information, et qui est donc réduit. Cependant, tant que la porte du laboratoire n'est pas ouverte, le physicien dehors décrit le système physique ainsi que son ami par un vecteur d'état qui contient toujours les divers résultats possibles ; pour lui, la réduction ne se produit qu'au moment où il ouvre la porte pour prendre connaissance du résultat. On arrive ainsi à une situation où la même réalité physique est décrite par deux vecteurs d'état différents. Pour éviter ce problème, on peut supposer que c'est la première prise de conscience du résultat (celle de l'ami dans le cas présent) qui déclenche la réduction ; effectivement le système n'a alors plus qu'un seul vecteur d'état, même si pendant un certain temps il reste inconnu de l'observateur extérieur.*

## D. Mesures négatives et "sans interaction"

D'autres situations paradoxales se produisent en mécanique quantique avec les "mesures négatives", ou encore "mesures sans interaction" [66–69]. Ces concepts peuvent être illustrés par les exemples suivants :

(i) Considérons une source qui émet une particule avec une fonction d'onde sphérique (qui prend des valeurs indépendantes de la direction dans l'espace, et ne dépendent donc que de la distance à la source). La source est entourée par deux détecteurs, comme le montre la Figure II.3 ; un des détecteurs, $D_1$, capture les particules émises dans presque toutes les directions, excepté dans un petit angle solide $\Omega$ ; le second détecteur $D_2$ capture

la particule dans cet angle solide, mais à une plus grande distance. Pour simplifier, nous supposons que l'expérience est idéale et que les détecteurs ont une efficacité de 100 %.

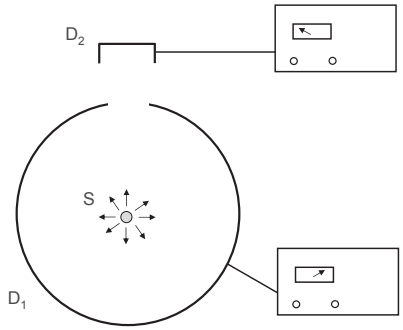


FIGURE *II.3 – Une source S émet une particule, et se trouve entourée par un détecteur $D_1$. Ce dernier capture la particule et enregistre un signal de détection dans un premier appareil de mesure, sauf si la particule passe par un trou correspondant à un petit angle solide (vers le haut sur la figure). Dans ce cas la particule est détectée par $D_2$ et enregistrée par un second appareil. Nous supposons dans la discussion que les détecteurs sont idéaux avec une efficacité de 100 %.*

Que se passe-t-il maintenant lorsque le paquet d'ondes de la fonction d'onde atteint le premier détecteur ? Deux cas sont possibles :

– ou bien la particule est effectivement détectée par $D_1$. Elle disparaît alors, et le vecteur d'état est projeté sur un état sans particule mais avec un détecteur excité (le premier) ; plus tard, le second détecteur $D_2$ ne peut alors plus jamais détecter une particule. Ce premier cas est le plus fréquent.

– ou bien la particule n'est pas détectée. La probabilité d'un tel événement est faible, puisqu'elle est égale au rapport entre l'angle solide sous-tendu par le trou dans le premier détecteur, vu depuis la source, divisé par $4\pi$ (nous supposons la source isotrope), mais néanmoins elle n'est pas nulle. Alors le simple fait que le premier détecteur n'a *pas* enregistré la particule entraîne une réduction de la fonction d'onde à sa composante contenue dans l'angle solide $\Omega$, ce qui veut dire que le second détecteur va *toujours* détecter la particule plus tard. Nous sommes alors en face d'une situation fort curieuse où la probabilité de détection par le second détecteur est fortement augmentée par une sorte de "non-événement" qui s'est produit sur le premier, c'est-à-dire sans aucune interaction entre la particule et l'appareil de mesure. Ceci illustre que la nature profonde du processus de mesure est plus subtile que la

"perturbation inévitable des appareils de mesure" tant de fois invoquée (microscope de Heisenberg, etc.) ; en réalité, la réduction du paquet d'ondes peut se produire même lorsque l'interaction avec le premier appareil de mesure ne joue aucun rôle.

Bien sûr, si l'on suppose qu'initialement la particule émise avait une direction d'émission bien définie, alors l'interprétation de cette expérience de pensée devient toute simple : le détecteur 2 n'enregistre que la fraction de particules qui se trouvent émises depuis le début dans sa direction. Il n'y a alors rien de surprenant à ce qu'aucune interaction ne soit produite avec le détecteur 1 ! Mais la mécanique quantique orthodoxe postule que cette direction d'émission bien définie n'existe pas tant qu'aucune mesure n'a été effectuée ; supposer qu'elle existe revient à ajouter des variables supplémentaires, possibilité que nous discuterons plus en détails au Chapitre III et au § H du Chapitre XI, mais qui n'existe pas dans le cadre de l'interprétation standard de la mécanique quantique.

(ii) La Figure II.4 montre une expérience semblable : une source S émet des particules une par une, chacune décrite par une onde de Schrödinger se propageant vers la droite. Cette onde interagit avec un dispositif de type lame séparatrice qui la scinde en deux parties (les photons, les neutrons, et d'autres particules peuvent ainsi être séparés avec des dispositifs appropriés). Après s'être propagée sur une distance $L_1$ ou $L_2$, chacune des ondes tombe sur un détecteur, $D_1$ dans un cas, $D_2$ dans l'autre. Lors de chaque réalisation de l'expérience, une seule particule est émise par S, et une seule particule est détectée, soit par $D_1$ soit par $D_2$. Dans la description de l'expérience purement en termes d'onde de Schrödinger, la situation reste parfaitement symétrique : en chacun des détecteurs, une chaîne de von Neumann intervient, mettant en jeu des états des détecteurs où la particule a été ou n'a pas été enregistrée. Plus précisément, l'état du système total est la somme de deux kets qui chacun contient une chaîne de von Neumann : pour l'un, elle naît en $D_1$ tandis que rien ne se passe en $D_2$, pour l'autre c'est la situation inverse. La mécanique quantique prédit donc qu'un seul résultat de mesure est observé : pour une réalisation donnée, soit la particule est détectée en $D_1$, soit en $D_2$, mais jamais aux deux endroits. Si $L_1 < L_2$, la première mesure est celle en $D_1$, et il en résulte un effet de mesure négative semblable au précédent : si $D_1$ ne détecte pas la particule, elle est toujours détectée en $D_2$. Inversement, lorsqu'elle est détectée en $D_1$, il devient certain qu'elle ne sera jamais détectée en $D_2$. Voilà qui donne déjà un avant-goût de la non-localité quantique : une détection en $D_1$ rend immédiatement impossible une détection en $D_2$, même si la distance entre les détecteurs est arbitrairement grande (de sorte qu'aucune information se propageant à la vitesse de la lumière n'a le temps de se propager de l'un à l'autre). La résolution de la chaîne de von Neumann sur l'un des détecteurs (réduction du vecteur d'état si l'on préfère) est un

phénomène non local dont les conséquences se font immédiatement sentir sur des mesures situées à des distances arbitrairement grandes.

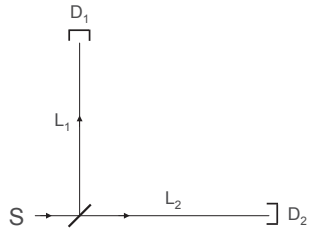


FIGURE *II.4 – Des particules sont émises une par une par une source S. Les ondes de Schrödinger décrivant les particules sont scindées en deux par une lame séparatrice ; chaque composante se propage vers un détecteur, $D_1$ ou $D_2$. Dans une expérience idéale, lors de chaque réalisation la particule est toujours détectée, soit en $D_1$ soit en $D_2$ et de façon totalement aléatoire ; la particule n'est jamais détectée aux deux endroits.*

Comme plus haut, on peut remarquer que les mêmes résultats sont facilement explicables par un modèle local : il est suffisant de supposer que, lors de chaque réalisation de l'expérience, la particule "choisit" au hasard une seule direction lorsqu'elle croise la lame séparatrice. La difficulté semble alors ne venir que de la description inhabituelle des phénomènes donnée par la mécanique quantique. Mais nous verrons dans le Chapitre IV des exemples de cas où aucun modèle local ne peut être inventé pour reproduire les prédictions quantiques.

(iii) Considérons maintenant le dispositif schématisé sur la Figure II.5, avec un interféromètre de Mach-Zhender dans lequel une source émet une par une des particules, qui sont ensuite comptées sur les détecteurs $D_1$ et $D_2$. Comme le fait la Ref. [69], nous supposons que les différences de chemins sont réglées de façon à créer une interférence destructive dans la voie de sortie du détecteur $D_2$ ; aucune particule ne peut alors atteindre ce détecteur de sorte que toutes sont détectées en $D_1$ (à nouveau, nous supposons les détecteurs parfaits avec un rendement de 100 %). Que se produit-il maintenant si l'on insère un objet opaque O dans le bras inférieur de l'interféromètre ? On annule l'effet d'interférence destructive, ce qui permet à certaines particules d'atteindre $D_2$ ; cet événement se produit une fois sur quatre si les deux lames semi-réfléchissantes ont des transmissions de 50 %. Dans un tel

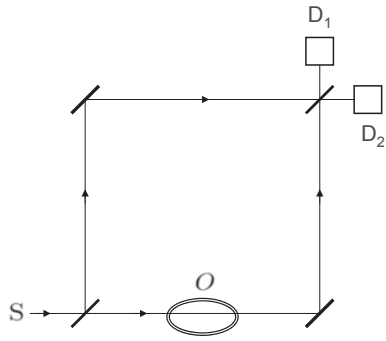


FIGURE *II.5 – Une source S émet une série de particules, une par une, vers un interféromètre (Mach-Zehnder). La différence de chemin de ce dernier est ajustée de façon que toutes les particules atteignent le détecteur $D_1$ et qu'aucune particule ne puisse atteindre $D_2$. Lorsqu'un objet opaque O est inséré afin de bloquer un des chemins pour la particule, l'effet d'interférence destructive ne se produit plus et des particules sont parfois détectées en $D_2$. Dans un tel événement, la présence d'un objet est mesurée avec certitude, alors qu'il semble qu'aucune interaction avec l'objet n'est mise en jeu, puisque la particule détectée est nécessairement passée par le chemin supérieur dans l'interféromètre (sinon elle aurait été absorbée).*

cas, comme la particule n'a pas été bloquée par l'objet, il semble qu'elle soit nécessairement passée par le bras du haut de l'interféromètre, ce qui veut dire qu'elle n'a jamais rencontré l'objet et pu être absorbée par lui. Mais, inversement, si l'objet n'avait pas été inséré, jamais la particule n'aurait pu atteindre $D_2$ ! Le résultat final est que la seule observation d'une détection en $D_2$ révèle la présence d'un objet, bien que le processus exclue toute interaction avec cet objet. Ce phénomène est appelé "mesure sans interaction"[15]. En termes simplifiés, on pourrait le résumer en disant que l'objet a absorbé l'onde associée à la particule, mais pas la particule elle-même. La chose très curieuse est alors que la particule et son onde semblent dissociées dans ce processus, puisqu'elles se propagent dans des bras différents, situés à une distance arbitrairement grande l'un de l'autre.

En réalité, cette expérence illustre plutôt le fait que, tant que la localisation d'une particule n'a pas été mesurée, il est vain en mécanique quantique standard de vouloir lui attribuer une position ou une trajectoire unique. La

[15]Dénomination discutable puisque le phénomène demande que la particule test puisse interagir avec l'objet : il est clair que l'effet ne se produirait pas si l'objet était totalement transparent pour la particule. Alain Aspect a proposé le nom plus approprié de "détection sans absorption".

description quantique correcte doit être faite en termes du vecteur d'état du système total particule + objet et de leurs corrélations (c'est un cas où intervient ce que nous appellerons "intrication quantique" au Chapitre VII). Pendant un certain temps, le système total particule + objet reste dans un état qui est une superposition quantique de deux composantes, l'une où la particule prend le trajet du bas et perturbe l'objet, et l'autre où elle prend le trajet du haut sans le perturber ; l'objet est donc potentiellement perturbé. Mais la mesure positive en $D_2$ supprime une de ces composantes [16], ce qui en quelque sorte "annule à distance" les effets de l'interaction entre la particule et l'objet ; ce dernier ressort donc totalement inchangé de cette réalisation particulière de l'expérience.

Pour des raffinements de ces idées et la discussion d'expériences reliées aux mesures sans interaction, voir [70, 71]. Hardy a proposé une version mettant en jeu un double interféromètre, un pour un électron et un pour un positron, et l'annihilation mutuelle de ces particules [72]. Une introduction pédagogique aux mesures sans interactions est donnée dans la référence [73]. Une application possible est une méthode appelée "imagerie sans interaction" [74], où des images d'objets peuvent être obtenues sans les perturber. Elle pourrait être utilisée à la réalisation d'une technique non invasive de microscopie électronique, en particulier pour la visualisation de molécules biologiques sans risque de les détruire [75–77]. Les mesures sans interaction peuvent également être utilisées [78] pour obtenir des tests du macro-réalisme via les inégalités de Leggett-Garg (§ B-2-c du Chapitre IV) ; des expériences ont été réalisées avec un atome piégé dans un réseau optique [79].

Il existe une autre méthode quantique de détection des objets où les photons détectés restent sans interaction. Elle met en jeu des paires de photons créées par conversion paramétrique de lumière laser dans des cristaux non linéaires [80, 81]. Dans un tel processus, un photon du laser de pompe est converti en deux photons dans un cristal où se produit un effet d'optique non linéaire ; un des photons est appelé "signal", l'autre "idler" (la conservation de l'énergie impose que la somme de leurs fréquences soit égale à la fréquence du photon de pompe). La méthode présente quelques similarités avec les mesures sans interaction, mais elle met en jeu des paires de photons intriqués qui interfèrent, et non une seule particule. Nous n'en donnons ici qu'une description très schématique. Le laser de pompe est séparé en deux faisceaux qui excitent deux cristaux non linéaires différents ; on recombine ensuite les trajets des paires créées sur les deux sites pour les faire interférer.

[16] Le processus de mesure sélectionne la composante du vecteur d'état où la particule s'est propagée dans le bras supérieur de l'interféromètre. Il en résulte que l'observation du résultat de mesure semble avoir deux effets totalement contradictoires : il signale l'existence d'une interaction dans une des composantes du vecteur d'état (la détection de la particule aurait été impossible si cette composante n'avait pas été absorbée), mais en même temps il annule exactement cette composante selon le postulat de projection.

L'idée générale [82] est en effet de mesurer un effet d'interférence entre deux chemins possibles suivis par un système quantique composé de deux photons : un chemin où la création de la paire de photons se produit dans le premier cristal non linéaire, un second où elle se produit dans le second. L'objet absorbant ou déphasant est inséré après le premier cristal dans le trajet du premier photon idler, qui est ensuite dirigé vers le second cristal de façon que les deux modes possibles du photons idler se recouvrent le plus parfaitement possible. Lorsque cette condition d'accord de modes est satisfaite, la trace sur le photon idler montre que le photon signal est dans une superposition cohérente de deux modes issus des deux cristaux ; un coefficient de cette superposition dépend de l'absorption et du déphasage introduit par l'objet, mais pas l'autre coefficient. On fait alors interférer les deux composantes du photon signal sur une lame semi-réfléchissante, ce qui donne accès au déphasage et à l'absorption introduite par l'objet. Une caractéristique remarquable de ce schéma est que le photon signal qui est détecté donne une information sur l'objet sans avoir jamais interagi directement avec lui ; l'interaction est en quelque sorte médiée par l'autre photon. Ainsi, les perturbations subies par le photon idler (y compris le fait que l'on ait superposé les modes issus des deux cristaux) changent complètement le comportement du photon signal, qui est pourtant à une distance arbitraire. A nouveau, nous avons une situation où les effets quantiques semblent délocalisés dans l'espace habituel. L'interférence ne se produit pas entre deux champs classiques qui se propageraient dans l'espace à trois dimensions, mais entre des amplitudes de probabilité quantiques qui se propagent dans celui à six dimensions exploré par une paire de photons.

Il a également été suggéré que les mesures négatives puissent se révéler utiles dans le contexte de la cryptographie quantique (§ B du Chapitre VIII). L'idée proposée dans [83] est que deux partenaires éloignés, Alice et Bob, effectuent aléatoirement des choix entre deux polarisations orthogonales ; Alice envoie un photon avec la polarisation qu'elle a choisie à Bob, qui renvoie le photon à Alice grâce à un miroir si, et seulement si, sa polarisation diffère du choix local qu'il a effectué. L'ensemble du dispositif comprend un interféromètre qui est réglé de façon que, si le photon revient de Bob vers Alice, la probabilité qu'Alice puisse observer un photon sur un détecteur $D_1$ s'annule, à cause d'un effet d'interférence destructive tout à fait semblable à celui de l'exemple (ii) ci-dessus. Dans ces conditions, en sélectionnant seulement les événements où Alice observe un photon en $D_1$ (de sorte qu'alors Bob ne peut détecter la particule), on sélectionne automatiquement des événements où les deux choix aléatoires faits par Alice et Bob se sont trouvés être identiques. Si Alice et Bob se communiquent mutuellement le résultat de chaque expérience (quel détecteur a cliqué ou non), mais conservent secrets leurs choix de polarisations, en faisant une liste de leurs choix binaires locaux pour les événements sélectionnés, ils se constituent progressivement une clé secrète. Une caractéristique remarquable de ce dispositif est que les événements pris

en compte pour la transmission secrète de la clé sont en fait ceux où aucun photon n'a été transmis, puisqu'il est resté à l'intérieur de l'appareillage utilisé par Alice[17] : on est donc dans une situation analogue à l'exemple (i) ci-dessus (puisque la détection de la particule signifie qu'elle n'a pas pris le chemin contenant l'objet). Du fait que la particule ne suit pas la ligne de transmission entre les deux sites dans les événements pris en compte pour la construction de la clé secrète, le flux de particules sur cette ligne ne contient absolument aucune information concernant les choix aléatoires de polarisations faits par Alice et Bob – d'où une excellente confidentialité.

## E. Une grande variété de points de vue

Les citations qui suivent peuvent être utiles pour se faire une idée[18] de la variété des positions intéressantes qui ont été exprimées depuis l'apparition de la mécanique quantique.

*Interprétation de Copenhague :*

(i) Bohr ([21], 2$^{e}$ édition, page 204 et [84]) : "Il n'existe pas de monde quantique. Il n'existe qu'une description physique abstraite. Il est faux de penser que la tâche de la physique est de découvrir comment la Nature est réellement. Ce qui concerne la physique est ce que nous pouvons dire sur la Nature". Ou, de façon similaire : "Il n'existe pas de concept quantique" [85].

Pour ce qui est des phénomènes physiques : "on peut plaider vigoureusement pour une limitation de l'usage du mot *phénomène* au cas où il se réfère exclusivement à des observations, obtenues dans des circonstances bien spécifiées, incluant une description de l'ensemble de l'expérience" [46].

Bohr définit également l'objet de la physique de la façon suivante [86, 87] : "La physique doit être considérée, non pas tellement comme l'étude de quelque chose qui est fourni a priori, mais plutôt comme le développement de méthodes qui permettent de classer et de rendre compte de l'expérience humaine. De ce point de vue, notre tâche doit être de rendre compte de cette expérience d'une façon qui soit indépendante de jugements individuels subjectifs, qui donc est objective au sens qu'elle peut être communiquée de façon non ambigüe dans un langage humain ordinaire".

[17] Les événements utiles sont ceux où Bob n'a pas renvoyé vers Alice l'onde de Schrödinger, mais sans absorber la particule. Chaque fois qu'Alice et Bob choisissent la même polarisation, le vecteur d'état comprend une composante où la particule se propage vers le site de Bob, de sorte qu'on pourrait mesurer sa présence le long de la ligne de transmission ou sur le site de Bob. Mais cette composante s'annule au moment où Alice observe la particule en D1.

[18] Avec, bien sûr, la précaution habituelle : il est vrai que de courtes citations peuvent, lorsqu'elles sont isolées de leur contexte, donner une idée un peu superficielle de la position précise de leurs auteurs.

Alors que la mécanique quantique est souvent considérée (y compris de nos jours) comme une théorie complètement nouvelle par rapport à la physique classique (une révolution), Bohr préfère la voir comme son extension logique naturelle. Il considère [88, 89] qu'à l'introduction de la mécanique quantique "le problème auquel les physiciens se sont trouvés confrontés était de développer une généralisation rationnelle de la physique classique[19] permettant d'incorporer de façon harmonieuse le concept de quantum d'action". Dans ce but, l'outil principal est le "principe de correspondance" [90] : "Le principe de correspondance exprime la tendance à utiliser dans un développement systématique de la théorie quantique chaque caractéristique des théories classiques, en une transcription rationnelle qui soit appropriée au contraste fondamental entre les postulats des théories classiques et quantiques". Il est donc naturel qu'il ait mis l'accent, à de nombreuses reprises, sur l'importance des concepts classiques pour donner une signification au formalisme de la mécanique quantique ; en particulier, les concepts classiques sont indispensables lorsqu'il faut décrire un processus de mesure.

Bohr a écrit de nombreux textes sur la mécanique quantique, parfois assez tournés vers la philosophie [1, 91] ; les §§ C-2 du Chapitre III et C-1 du Chapitre V proposent d'autres de ses citations, dont certaines illustrent les vues de Bohr sur l'espace-temps. Dans sa fameuse conférence de Côme de septembre 1927 [92], il introduit la notion de "complémentarité", relation entre attributs contradictoires d'un même objet en physique quantique, qu'ensuite il élargit bien au-delà, allant jusqu'à inclure d'autres disciplines que la physique (voir par exemple [91] ou encore [46] où il mentionne la biologie[20], la sociologie et la psychologie ; voir également le § 7.2 de [21] ou le Chapitre 4 de [58]).

(ii) Born en 1926 (page 804 de [34]) : "Le mouvement des particules se conforme aux lois de la probabilité, mais la probabilité elle-même se propage selon les lois de la causalité".

Ou peu après dans [93] : "La description théorique quantique... ne répond pas... à la question de savoir où se trouve une certaine particule à un instant donné... Ceci suggère que la mécanique quantique ne répond qu'aux questions statistiques correctement posées, et ne dit rien de l'évolution de phénomènes individuels. Ce serait alors une fusion singulière entre mécanique et statistique".

[19] De façon semblable, Bohr voyait probablement la relativité d'Einstein comme une généralisation rationnelle de l'électromagnétisme classique (équations de Maxwell).

[20] A la fin de cet article, il discute le "mode de description par complémentarité" et illustre sa généralité en écrivant "Un exemple est donné par la biologie où les arguments mécaniques et vitalistes sont utilisés d'une façon typique de la complémentarité. En sociologie également, une telle dialectique peut se révéler souvent utile, en particulier dans les problèmes où nous sommes confrontés avec la comparaison entre les différentes cultures humaines...".

(iii) Heisenberg [21, 94] : "Mais les atomes ou les particules élémentaires ne sont pas réels ; ils forment un monde de potentialités ou de possibilités, plutôt qu'un monde de choses et de faits".

Dans *"Physics and philosophy"* [94] (Chapitre V) : "Les sciences de la nature ne donnent pas simplement une description et une explication de la nature ; elles font partie des interactions entre la nature et nous-mêmes ; elles décrivent la nature telle qu'elle réagit à notre méthode pour lui poser des questions".

Le Chapitre III de ce livre a pour titre "L'interprétation de Copenhague de la théorie quantique", et il y écrit : "Nous ne pouvons complètement objectiver le résultat d'une observation, nous ne pouvons décrire que ce qui 'se produit' entre cette observation et la suivante". Plus bas, il ajoute : "En conséquence, la transition entre le 'possible' et le 'réalisé' se produit pendant l'acte d'observation. Si nous voulons décrire ce qui se produit pendant un événement atomique, nous devons réaliser que le mot 'se produit' ne peut s'appliquer qu'à l'observation, et pas à l'état des choses entre les deux observations".

Il conclut ce chapitre avec : "l'appareil de mesure a été construit par l'observateur, et nous devons nous souvenir que ce que nous observons n'est pas la nature en elle-même mais la nature soumise à notre méthode de questionnement. Notre tâche scientifique en physique consiste à poser des questions concernant la Nature dans le langage que nous possédons, et à essayer d'obtenir une réponse de l'expérience par les moyens qui sont à notre disposition. C'est ainsi que la théorie quantique nous rappelle, comme Bohr l'a dit, la vieille sagesse qui dit que, lorsque nous sommes à la recherche d'une harmonie dans la vie, nous ne devons jamais oublier que nous sommes à la fois acteurs et spectateurs dans le drame de la vie. Il est compréhensible que, dans notre relation scientifique avec la nature, notre propre activité devienne très importante lorsque nous nous préoccupons de parties de la nature auxquelles nous n'avons accès que par les outils les plus élaborés".

(iv) Jordan (tel que cité par Bell dans [95]) : "les observations ne se contentent pas de perturber ce qui doit être mesuré, elles le *produisent*. Dans une mesure de la position, l'électron est forcé de prendre une décision. Nous le contraignons à occuper une position bien précise ; auparavant, il n'était ni ici ni là, il n'avait pris aucune décision concernant une position précise... ".

(v) Landau et Lifchitz, au début du premier chapitre de leur livre sur la mécanique quantique [96] : "La possibilité de la description quantitative du mouvement de l'électron exige également l'existence d'êtres physiques obéissant avec une précision suffisante à la mécanique classique. Si un électron entre en interaction avec un 'être classique', alors l'état de ce dernier change en général... Ceci étant, l'être classique est appelé ordinairement *appareil*, et on parle de son processus d'interaction avec l'électron comme d'une *mesure*. Il convient toutefois de souligner qu'on n'a alors nullement en vue un proces-

sus de *mesure* où participe un physicien observateur. Par mesure on entend en mécanique quantique tout processus d'interaction d'un être classique et d'un être quantique, se déroulant par ailleurs indépendamment de tout observateur. On doit à N. Bohr d'avoir élucidé le rôle profond de la notion de mesure en mécanique quantique".

(vi) Dirac, page 7 de [39] : "*Le seul objet de la physique théorique est de calculer des résultats qui peuvent être comparés avec l'expérience,* et il est tout à fait inutile de donner une description globale de l'ensemble du phénomène".

*Critiques de l'interprétation de Copenhague :*

(vii) Schrödinger : "le monde ne m'est donné qu'une seule fois, et pas une fois pour son existence et une autre pour sa perception. Le sujet et l'objet sont un. La barrière qui les sépare ne peut être considérée comme brisée du seul fait d'une expérience en sciences physiques, pour la simple raison que cette barrière n'existe pas" [97]. Dans le § B, nous donnons d'autres citations de Schrödinger.

(viii) Einstein, dans une lettre de 1928 à Schrödinger [98, 99] : "La philosophie rassurante de Heisenberg – ou est-ce une religion ? – est construite de façon tellement subtile que, pour le moment, elle fournit un oreiller de paresse pour le véritable croyant, oreiller d'où il n'est pas possible de le réveiller".

En 1936 [100] : "La fonction $\Psi$ ne décrit en aucune manière une condition qui pourrait concerner un seul système ; elle concerne en fait un grand nombre d'entre eux, un 'ensemble de systèmes' au sens de la mécanique statistique... si la fonction $\Psi$ ne fournit que des données statistiques sur les grandeurs mesurées... la raison en tient ... au fait que la fonction $\Psi$ ne décrit d'aucune manière l'état du système unique".

(ix) de Broglie [101] : "L'interprétation de la Mécanique ondulatoire de Bohr et Heisenberg a de nombreuses conséquences qui ouvrent des perspectives philosophiques nouvelles. Le corpuscule n'est plus un objet bien défini dans le cadre de l'espace et du temps ; il n'est plus qu'un ensemble de potentialités affectées de probabilités, il n'est plus qu'une entité qui se manifeste à nous de façon fugitive, tantôt sous un aspect, tantôt sous un autre. M. Bohr, qui est un peu le Rembrandt de la Physique contemporaine, car il manifeste parfois un certain goût pour le 'clair-obscur', a dit des corpuscules qu'ils sont 'unsharply defined indidivuals within finite space-time limits'."

*Plus récemment :*

(x) Bell [55], lorsqu'il décrit la théorie quantique "moderne" (interprétation de Copenhague) et ses relations avec la cosmologie : "cette théorie ne parle jamais d'événements se produisant dans le système, mais seulement des résultats d'observations faites sur lui, ce qui implique l'existence d'un appareillage externe"[21] (si c'est le cas, comment alors décrire l'Univers entier,

[21] On pourrait ajouter "ainsi que des observateurs externes".

puisqu'il est impossible de concevoir un appareillage externe dans ce cas ?).

"Le problème est le suivant : la mécanique quantique ne s'intéresse qu'aux observations. Elle divise donc nécessairement le monde en deux, une partie qui est observée et une autre qui effectue l'observation. Les résultats dépendent de la façon dont est faite cette division, mais aucune règle précise pour le faire n'est proposée. Tout ce dont nous disposons est une recette qui, du fait des limitations pratiques auxquelles sont sujets les humains, est suffisamment non ambigüe pour toute question pratique".

Voir aussi son texte "contre le concept de mesure", où il discute et critique diverses présentations de l'interprétation orthodoxe [102].

(xi) Mermin [9], lorsqu'il résume la "doctrine quantique fondamentale" (interprétation orthodoxe) : "le résultat d'une mesure n'accède à l'existence que par la mesure elle-même, étant une conséquence à la fois de l'état du système mesuré et de l'appareil de mesure. Comment exactement ce résultat précis est obtenu dans une mesure particulière – la transition entre la potentialité et le réel selon Heisenberg – est fondamentalement impossible à savoir".

(xii) Shimony [10] : "D'après l'interprétation proposée par Bohr, le changement de l'état est une conséquence de l'hypothèse fondamentale selon laquelle la description de tout phénomène physique demande de faire référence au dispositif expérimental".

(xiii) Rosenfeld [103], parlant de l'interprétation orthodoxe : "l'observateur humain, que nous avions pris tant de soin à faire sortir du paysage (scientifique), semble s'introduire à nouveau de façon irrésistible ...".

(xiv) Gottfried [104] (page 188 de la première édition) : "Le postulat de réduction est un axiome indépendant... Le résultat de ces considérations est que la mécanique quantique ne peut pas donner une description complète du monde physique car il doit exister des systèmes (appelés "conscients" par Wigner) qui sortent du domaine d'application de la théorie, c'est-à-dire qui ne peuvent pas être incorporés dans la partie du monde que nous décrivons par l'équation de Schrödinger".

(xv) Stapp [42] : "L'interprétation de la théorie quantique est assombrie par les points suivants : (1) on attribue à des concepts classiques non valides un statut fondamental ; (2) le processus de la mesure ne peut pas être décrit dans le cadre de la théorie ; (3) la distinction sujet-objet devient floue ; (4) le système observé doit d'une part être isolé pour être défini, mais d'autre part interagir pour être observé".

Ou, cité par Bell dans [55] : "Comment une théorie qui est *fondamentalement* une procédure par laquelle des créatures macroscopiques grossières, telles que des êtres humains, calculent des probabilités concernant ce qu'ils vont observer dans des circonstances macroscopiques, comment cette théorie pourrait-elle être considérée comme une description complète de la réalité ?" (la complétude de la mécanique quantique sera discutée au Chapitre III).

(xvi) Leggett [105] à propos de l'interprétation de Copenhague : "... le formalisme de la mécanique quantique connu sous le nom d'interprétation de Copenhague (alors qu'il serait probablement plus correct de l'appeler la non-interprétation de Copenhague, du fait qu'elle implique que toute tentative d'interpréter le formalisme est voué à l'échec)... d'une part nie que des objets microscopiques (électrons, photons, atomes, ...) aient nécessairement des propriétés définies en l'absence d'observation, mais d'autre part stipule avec insistance (ou du moins implique) que des objets macroscopiques (compteurs, chats, etc.) possèdent effectivement de telles propriétés, qu'ils soient observés ou non. Cette insistance sur la nécessité de tracer une ligne nette ... entre le monde microscopique et le monde macroscopique de la vie de tous les jours (les appareils de mesure inclus) est un thème constamment présent dans les écrits de Niels Bohr...". Dans [106], il commente : "La difficulté réelle commence seulement quand nous prenons au sérieux le fait que l'appareil de mesure... est lui-même un système constitué d'atomes et d'électrons, de sorte qu'en principe il devrait pouvoir être décrit dans les termes de la mécanique quantique. Il devrait donc être légitime de demander ce qui se produit si, au lieu de traiter la mesure comme quelque chose de complètement étranger au comportement habituel des systèmes physiques, nous la traitons tout simplement comme un type particulier de processus physique et la décrivons par l'équation de Schrödinger linéaire dépendant du temps".

Puis, dans [107], il commente : "Dans le cadre de l'interprétation conventionnelle de la mécanique quantique, un système ne possède pas de propriétés bien définies jusqu'au moment où, en quelque sorte, nous le forçons à nous indiquer ces propriétés par la réalisation de mesures appropriées. Mais est-ce la seule interprétation possible ?... à un niveau plus profond il est parfaitement possible que les systèmes aient, en fait, des propriétés objectives, que quelqu'un effectue des mesures sur lui ou non... Les résultats apparemment aléatoires prédits par le formalisme quantique seraient alors simplement dûs à notre ignorance des détails à un niveau plus profond de description"[22].

(xvii) Van Kampen [108] a émis le caveat amusant suivant : "Toute personne qui attribuera au vecteur d'état plus de signification que ce qui est nécessaire pour calculer des phénomènes observables sera tenue responsable des conséquences !" Dans l'Appendice A, nous discutons comment deux autres références [109, 110] mettent en pratique cet avertissement.

*La situation actuelle :*

Comme on peut s'en douter à la lecture de ces citations, loin d'être convergentes ou parfois même contradictoires, aucun consensus général n'a réellement émergé au sein de toute la communauté des physiciens concernant le

[22]Le Chapitre III expose plus en détail les discussions concernant le caractère complet (ou incomplet) de la mécanique quantique.

sens précis du vecteur d'état. L'accord est général en ce qui concerne le formalisme et la façon d'utiliser en pratique le vecteur d'état. Pour toutes les expériences qui ont été réalisées, un choix pragmatique entre les deux postulats d'évolution peut être laissé à l'évaluation du physicien ; pour faire des prédictions concrètes sur une expérience, jusqu'à maintenant un peu de bon sens s'est révélé suffisant (*cf.* § A-1 du Chapitre XI), de sorte que les problèmes liés aux fondements de la théorie quantique peuvent parfaitement être mis de côté dans les laboratoires. Mais ceci n'empêche pas qu'il serait préférable de disposer de préceptes mathématiques précis, au lieu de devoir se contenter de recettes physiquement raisonnables ! Il n'est donc pas surprenant de constater que, lorsque la question des fondements revient sur le tapis, ou celle du sens précis des objets mathématiques de la mécanique quantique, le débat recommence, et parfois devient passionné. De plus, on constate que même ceux qui annoncent être en total accord avec l'interprétation standard font usage, dans la pratique, de toute une série de nuances (pouvant parfois aller jusqu'à la contradiction interne...) dès qu'on leur demande d'expliquer en détail leur point de vue.

Pour résumer, le statut du vecteur d'état en mécanique quantique orthodoxe est un mélange subtil entre différents concepts concernant la réalité et la connaissance que nous pouvons avoir de cette réalité. Les fantastiques succès de la théorie quantique standard signifient-ils que le vecteur d'état est réellement la description ultime et la plus précise d'un système quantique que la physique donnera jamais dans les siècles à venir ? Faut-il renoncer à toute description réaliste en physique et adopter un point de vue positiviste ? La question n'est pas réglée. Il faut dire que même Bohr est considéré plus comme un réaliste [23] que comme un positiviste ou un opérationnaliste [21]. Comme le dit Jammer ([58], p. 157) : "Bohr, comme Von Weizsäcker [111] l'a souligné, n'a jamais rejeté la notion de réalité, il l'a seulement modifiée". Si on lui avait demandé quelles sont exactement les relations entre la fonction d'onde et la réalité, Bohr aurait probablement dit que la fonction d'onde est assurément un outil très utile, mais que le concept de réalité ne peut être défini à ce seul niveau de façon correcte ; il doit impérativement inclure tous les appareils de mesure macroscopiques qui servent à avoir accès à l'information microscopique (nous reviendrons plus en détail sur ce point au § C du Chapitre III).

Pour finir, une question générale qui émerge de toutes ces discussions est de savoir ce que nous attendons d'une théorie physique satisfaisante. Est-il suffisant qu'elle fournisse des prévisions parfaitement correctes (aucune contradiction avec aucun résultat expérimental), même si elle ne permet au-

[23] Nous revenons au § C-2 du Chapitre III sur la façon dont Bohr considère que la réalité physique peut être définie sans ambigüité. Bohr accepte la notion de réalité physique, mais seulement si elle est correctement définie (avec une description complète de l'ensemble de l'expérience).

cune description en termes de succession d'événements réels ; ou faut-il en plus qu'elle permette une description de ce qui "se passe" pendant une expérience, comme une succession d'événements réels ? Et, dans la seconde éventualité, quel type de description est alors souhaitable ? Clairement, comme l'illustre les citations ci-dessus, tous les physiciens ne sont pas d'accord sur les réponses à donner à ces questions.

## F. Des arguments peu convaincants

Nous avons déjà souligné combien l'invention de l'interprétation standard (ou de Copenhague) de la mécanique quantique a été, et reste, un des grands triomphes de la physique. On ne peut qu'admirer, plus encore avec le recul, la rapidité et la perspicacité avec laquelle les fondateurs du domaine l'ont conçue, à une époque où les données expérimentales étaient aussi peu nombreuses. Mais, depuis, de multiples expériences ont été réalisées, dont une partie destinées précisément à trouver les limites de cette interprétation ou à la mettre en défaut ; pas une n'y a réussi pour le moment. C'est donc une sorte de miracle de l'analyse et de la logique qui a permis l'émergence de cette fantastique construction intellectuelle.

Cela dit, il faut bien admettre que, parfois, les remarquables auteurs de cette construction sont allés trop loin, poussés par leur désir de convaincre. Par exemple, des affirmations définitives ont été proférées concernant la nécessité logique absolue d'adopter l'interprétation standard, affirmations qui paraissent maintenant quelque peu exagérées avec le recul du temps. D'après elles, l'interprétation orthodoxe donnerait la seule et unique description ultime possible de la réalité physique ; jamais une description plus fine ne serait possible. Ainsi, le caractère fondamentalement indéterministe des phénomènes microscopiques devrait être considéré comme une loi de la Nature gravée dans le marbre pour l'éternité.

Mais nous savons maintenant que ce n'est pas nécessairement la seule possibilité logique ; oui bien sûr, chacun est libre de préférer l'interprétation standard, mais ce n'est pas la seule possible à partir d'arguments purement scientifiques. D'autres interprétations restent parfaitement possibles, le déterminisme en lui-même n'étant pas du tout éliminé de façon définitive [24]. Comme expliqué dans la Ref. [9] par exemple, et comme Bell l'a vu clairement très tôt [7, 8], les "preuves d'impossibilité" mises en avant pas les défenseurs de l'interprétation de Copenhague ne sont pas rigoureuses, pour une raison toute simple : elles imposent arbitrairement des conditions qui sont peut-être pertinentes au sein de la mécanique quantique (linéarité), mais n'ont aucune raison de l'être dans le cadre des théories à rejeter – n'importe quelle théorie

[24] Pourvu que l'on accepte la non-localité, voir Chapitre IV.

à variables supplémentaires comme celle de Bohm par exemple. Du fait de la stature scientifique exceptionnelle des auteurs de ces preuves d'impossibilité, la communauté des physiciens a mis longtemps avant de réaliser que ces théorèmes étaient non pertinents ; maintenant que ce fait est reconnu, la pluralité des interprétations de la mécanique quantique est acceptée plus facilement.

# Chapitre III

# Le théorème d'Einstein, Podolsky et Rosen

Plus de 70 ans après sa publication, l'article de Einstein, Podolsky et Rosen (EPR) [112] est toujours cité des centaines de fois chaque année dans la littérature scientifique ; c'est assurément un cas de longévité exceptionnelle ! Cette situation est quelque peu paradoxale dans la mesure où, pendant bien longtemps, la majorité des physiciens n'a guère accordé d'attention au raisonnement de EPR. Ils le considéraient probablement comme intéressant sur le plan historique, mais de peu d'importance dans le contexte de la mécanique quantique moderne ; pire, souvent l'argument a été mal compris ou complètement déformé. Un exemple frappant est donné par la correspondance entre Born et Einstein [113] où le premier, même dans des commentaires écrits après la mort d'Einstein, montre qu'il n'a jamais vraiment compris la nature des objections faites par EPR. Born ne pouvait s'empêcher de penser qu'Einstein se cantonnait dans un rejet obstiné de l'indéterminisme ("allons, Albert, l'indéterminisme n'est pas une telle catastrophe !"), alors qu'en réalité l'argument central de EPR est la localité et/ou la séparabilité (nous reviendrons plus bas sur ces termes), c'est-à-dire fondé sur la notion d'espace-temps. Si des géants de la physique comme Born ont pu se tromper de cette façon, il n'est pas surprenant que, plus tard, bien d'autres aient pu faire des erreurs semblables !

C'est la raison pour laquelle, dans ce qui suit, nous allons aborder le problème d'une façon qui peut sembler élémentaire, mais qui a l'avantage de mettre l'accent sur la structure logique des arguments et leur généralité. Ce faisant nous ne suivrons de près, ni le développement historique des idées, ni la formulation que l'on peut trouver dans l'article original[1], préférant mettre

[1]La version publiée de l'article EPR fut écrite par Boris Podolsky. Dans ses commentaires ultérieurs sur le sujet, Einstein a donné l'impression qu'il pensait que l'essentiel de l'argument aurait pu être exprimé d'une façon plus simple, voir par exemple une lettre

en avant la généralité du raisonnement EPR. Pour un compte-rendu historique plus précis, voir le Chapitre 6 de [58], ou [117] ainsi que les références qu'elle propose. La Ref. [118] relate les circonstances dans lesquelles l'article EPR fut écrit, et non seulement envoyé à *Physical Review* mais aussi communiqué à un quotidien (*New York Times*), qui en fit un compte-rendu – une initiative vivement désapprouvée par Einstein[2].

## A. Un théorème

On parle souvent du "paradoxe EPR", mais en réalité le mot "paradoxe" est peu adapté dans ce cas. Einstein ne voyait nul paradoxe dans l'argument ; sa motivation n'était pas d'imaginer des paradoxes destinés aux collègues intéressés par la philosophie, elle était de présenter un raisonnement d'une solide logique qui, partant d'hypothèses bien explicitées (en gros : réalisme et localité), menait automatiquement à une conclusion claire (la mécanique quantique est incomplète, et même : la physique est déterministe[3]). Pour mettre l'accent sur la structure logique et la généralité, nous parlerons de "théorème EPR"[4] qui, formellement pourrait s'énoncer comme suit :

Théorème : *Si toutes les prédictions de la mécanique quantique sont correctes (y compris pour des systèmes constitués de plusieurs particules éloignées) et si la réalité physique peut être décrite dans un cadre local (ou séparable), alors la mécanique quantique est nécessairement incomplète : il existe dans la Nature des "éléments de réalité" qui sont laissés de côté par cette théorie*[5].

Sans nul doute, ce théorème est correct ; il a été étudié par de nombreux scientifiques qui n'ont trouvé aucune erreur dans sa démonstration. Donc, la logique qui mène des hypothèses aux conclusions est sans défaut. Ce serait une erreur que de répéter la confusion classique "Bohr a montré que le théorème était faux", ou pire encore "le théorème est faux parce qu'il est contredit par les expériences"[6]. Bohr lui-même, bien évidemment, ne s'y est pas trompé : dans sa réponse à EPR [41], il explique pourquoi il pense que

d'Einstein à Schrödinger [114] où il écrit "la rédaction n'est pas vraiment ce que j'espérais : ce qui est essentiel est en quelque sorte caché sous l'érudition" ; voir aussi [100, 115] et [116], où Einstein explique l'argument dans ses propres termes.

[2] Cet article finit par quelques mots de commentaires de E. Condon (Université de Princeton) qui, visiblement, ne comprend pas bien lui non plus l'objet de l'article, qu'il n'avait peut-être pas encore eu le temps de lire en détail à l'époque.

[3] L'erreur de Born, si l'on veut, était de confondre hypothèses et conclusions.

[4] Il est vrai qu'Einstein lui-même a parfois utilisé le mot "paradoxe" dans ce contexte, par exemple dans le § 5 de [100].

[5] Les mots "éléments de réalité" sont soigneusement définis par les auteurs du théorème ; voir le début de § C.

[6] La contradiction en question se produirait via le théorème de Bell (qui est donc parfois également critiqué pour la même raison), un théorème introduit par son auteur comme une prolongation directe du théorème EPR.

les hypothèses dont le théorème part ne sont pas pertinentes dans le domaine quantique, ce qui rend le théorème inapplicable dans le cadre de la mécanique quantique. Plus précisément, le mot qu'il utilise pour caractériser ces hypothèses est "ambigu", mais jamais il n'a affirmé que le raisonnement est faux (pour plus de détails, voir § C-2). Un théorème qui n'est pas applicable dans une certaine situation n'en est pas pour autant incorrect : les théorèmes de la géométrie euclidienne ne sont ni faux, ni sans intérêt, du fait qu'on puisse également bâtir des géométries non euclidiennes ! En ce qui concerne des contradictions éventuelles avec des résultats expérimentaux, nous verrons pourquoi, d'une certaine façon, ces contradictions ajoutent à l'intérêt du théorème, principalement du fait qu'elles peuvent être utilisées dans le cadre d'un raisonnement logique par l'absurde.

Nombreux sont les bons textes décrivant l'argument EPR ; par exemple, un classique est le petit article de Bell de la Ref. [95]. Une autre excellente introduction est la Ref. [56], qui contient une description complète de l'expérience de pensée EPR dans un cas particulier (deux types de mesures seulement sont utilisés) et propose une discussion générale éclairante sur bien des aspects du problème. Pour une liste détaillée de références, voir par exemple [119]. Le schéma considéré dans l'argument EPR est résumé dans la Figure III.1 : une source S émet deux particules corrélées, qui se propagent vers des régions éloignées de l'espace où elles sont soumises à des mesures. Le type de mesure est défini par un "paramètre[7] de mesure" $a$ dans une région, $b$ dans l'autre (typiquement l'orientation d'un analyseur de Stern et Gerlach), chaque paramètre étant le résultat d'un choix arbitraire d'un expérimentateur dans la région concernée. Dans chaque région, un résultat est obtenu, qui ne peut prendre que deux valeurs, que nous symboliserons par $\pm 1$ avec la notation habituelle. Une hypothèse cruciale est ajoutée : chaque fois qu'il se trouve que les paramètres choisis des deux côtés ont la même valeur, les résultats de mesure sont eux aussi égaux (corrélations parfaites).

Plutôt que de paraphraser les textes existant sur EPR ou l'article original, nous présenterons volontairement les choses de façon quelque peu différente, en nous basant sur une analogie, une sorte de parabole. Notre objectif est de mettre en lumière un aspect fondamental de l'argument : l'essence du raisonnement EPR n'est en fait autre que ce que l'on appelle habituellement "la méthode scientifique", au sens de Francis Bacon ou Claude Bernard. Dans ce but, nous quitterons un instant la physique pour la botanique ! De fait, dans les deux disciplines, une procédure scientifique rigoureuse est nécessaire pour arriver à prouver l'existence de relations et de causes, et c'est précisément notre objectif.

[7] En anglais, on utilise souvent le mot "setting".

FIGURE *III.1 – Une source S émet deux particules, qui se propagent ensuite dans l'espace et atteignent deux régions éloignées, où Alice et Bob effectuent des mesures sur elles dans leurs laboratoires respectifs ; a et b sont les paramètres (par exemple orientation des analyseurs de Stern et Gerlach) utilisés pour les deux appareils de mesure.*

## B. Des pois, des gousses, et de leurs gènes

Déduire les propriétés d'objets microscopiques à partir d'observations macroscopiques demande de combiner perspicacité, afin de choisir des expériences qui apporteront des informations pertinentes, et une bonne dose de logique, afin d'être capable de déduire ces propriétés microscopiques à partir des résultats macroscopiques. Comme il n'est pas possible d'observer un électron à l'œil nu (ou même une macromolécule), encore moins de les toucher de la main, un raisonnement abstrait est nécessaire. Le savant des siècles passés qui, comme Mendel, essayait de déterminer les propriétés génétiques des plantes, rencontrait exactement le même problème : il n'avait accès à aucun appareil qui lui permette une observation directe de molécules d'ADN, de sorte que la seule méthode accessible était de raisonner sur les résultats macroscopiquement observables d'expériences judicieusement conçues.

Dans notre parabole, le savant en question fait pousser des pois en terre et observe la couleur de fleurs, $+1$ pour rouge, $-1$ pour bleu, en fonction des paramètres (température par exemple) définissant les conditions dans lesquelles des pois poussent – ces paramètres correspondent à ceux que nous avons appelés plus haut $a$ ou $b$. L'idée générale est d'inférer les propriétés intrinsèques des pois (les "éléments de réalité EPR") à partir de ces observations.

### B-1. Une expérience simple ; pas de conclusion à ce stade

Il est parfaitement normal que de nombreux paramètres externes comme température, humidité, éclairement, etc. puissent influencer la croissance de végétaux et la couleur d'une fleur ; dans une expérience, il semble très dif-

ficile en pratique d'identifier et de contrôler tous les paramètres qui jouent un rôle dans cette croissance. Si l'on constate que les fleurs qui apparaissent dans une série d'expériences sont parfois bleues, parfois rouges, la raison qui explique ces variations peut être une non-reproductibilité des paramètres de l'expérience, mais tout aussi bien un phénomène plus fondamental, lié à l'indéterminisme du vivant. En termes plus abstraits, un caractère complètement aléatoire des résultats observés peut venir, soit des fluctuations provenant de perturbations extérieures mal contrôlées, soit d'une propriété intrinsèque du système mesuré (le pois) ; il peut même venir du fait que la croissance d'une fleur (ou, plus généralement, la vie ?) est un phénomène fondamentalement non déterministe – inutile de dire que toutes ces raisons peuvent également se combiner entre elles de façon plus ou moins compliquée. Si nous transposons la question à la physique quantique, elle devient : est-ce que les résultats sont aléatoires à cause d'un processus fluctuant inconnu qui agit à un stade ou l'autre de l'expérience (fluctuations des appareils macroscopiques, fluctuation d'une propriété microscopique des particules mesurées, etc.) ? Ou sont-elles fondamentalement aléatoires, conséquences d'un processus quantique totalement irréductible ?

Notre savant peut répéter son expérience des milliers de fois et plus encore : tant que les résultats sont totalement aléatoires, il n'existe aucune façon de prouver laquelle parmi ces interprétations doit impérativement être choisie ; c'est plutôt une question de préférence personnelle. Bien sûr, on peut construire des arguments philosophiques pour défendre tel choix ou rejeter tel autre, mais d'un point de vue purement scientifique il n'existe pas de raison vraiment convaincante de faire un choix. Telle était la situation en physique quantique avant l'argument EPR.

### B-2. Corrélations ; les causes dévoilées

L'idée de génie de EPR a été de réaliser qu'une étude des corrélations pouvait permettre un grand pas en avant dans le raisonnement. Ils exploitent une des hypothèses mentionnées ci-dessus : lorsque le choix des paramètres est le même, les résultats observés sont toujours identiques.

#### B-2-a. Mêmes paramètres de mesure

Dans notre analogie botanique, nous supposons que l'expérimentateur observe maintenant des corrélations entre les couleurs des fleurs ayant poussé dans les mêmes conditions. Les pois viennent de gousses, et il est possible de faire pousser des pois pris dans la même gousse et d'observer les fleurs obtenues dans des endroits éloignés. Lorsqu'aucun soin particulier n'est pris pour donner des valeurs égales à tous les paramètres expérimentaux (température, etc.), ou lorsque les pois sont pris dans des gousses différentes, rien de spécial n'est observé, aucune corrélation particulière. Mais lorsqu'ils sont pris dans

la même gousse et que les paramètres de croissance sont les mêmes, l'observation montre que les couleurs sont systématiquement les mêmes (toutes deux restent aléatoires, d'une expérience à la suivante, mais elles sont toujours égales).

Qu'en conclure alors ? Comme les pois poussent dans des endroits éloignés avec des couleurs aléatoires mais identiques, il n'existe aucune possibilité d'influence par un phénomène local mal contrôlé qui les détermine, et agirait de la même façon sur les deux ; une influence mutuelle des deux croissances qui jouerait d'une façon ou d'une autre est également exclue. Si donc nous croyons que les causes sont locales, et que des corrélations parfaites ne peuvent jamais apparaître purement par hasard, nous sommes conduits à une conclusion simple : la seule explication possible de cette couleur identique est que les pois pris dans une même gousse partagent en commun une certaine propriété, qui détermine la couleur[8]. Certes, il peut être très difficile de détecter directement cette propriété commune, puisqu'elle est probablement encodée quelque part dans un minuscule fragment d'une molécule biologique, mais la propriété existe et suffit à déterminer les résultats des expériences.

C'est l'essence de l'argument EPR, et en un sens nous pourrions arrêter la discussion à ce point. Toutefois, de façon à aller plus loin dans l'analyse, rendons chaque étape du raisonnement EPR encore plus explicite. L'idée centrale est que la nature et le nombre des "éléments de réalité" associés à chacun des pois ne peut pas varier sous l'influence d'une expérience réalisée en un point éloigné, avec l'autre pois. Supposons par exemple que les deux expériences soient faites à des instants différents : une semaine, l'expérimentateur fait pousser un pois, et ce n'est que la semaine suivante que l'autre pois issu de la même gousse est mis en terre pour pousser ailleurs, mais exactement dans les mêmes conditions. Nous supposons que des corrélations parfaites entre les couleurs sont alors observées, sans aucune influence particulière du temps passé entre les expériences. Juste après la fin de la première expérience (observation de la première couleur), le résultat de la seconde a déjà une valeur parfaitement déterminée ; en conséquence, il doit exister un élément de réalité attaché au second pois qui traduit l'existence de cette certitude. Il est clair que cet élément ne peut pas être attaché à aucun autre objet que le pois, par exemple un des appareils de mesure, puisque la corrélation n'est observée que si les deux pois proviennent de la même gousse. Symétriquement, le premier pois avait lui aussi un élément de réalité qui assure que le premier résultat coïncide toujours avec celui de la seconde mesure. Nous pouvons supposer que les éléments de réalité associés aux deux pois sont codés génétiquement quelque part, et que les valeurs des codes sont les mêmes pour tous les pois provenant de la même gousse ; mais d'autres possibilités existent, et la na-

[8]Le fait que les corrélations disparaissent si les paramètres ne sont plus ajustés aux mêmes valeurs montre que la couleur est une fonction à la fois de cette propriété commune et des paramètres locaux de l'expérience.

ture exacte ainsi que le mécanisme mis en jeu par ces éléments de réalité ne sont pas essentiels pour le raisonnement. Ce qui est essentiel est que de tels éléments de réalité, qui ne peuvent pas apparaître à partir d'une action à distance, existent nécessairement avant qu'aucune expérience ne soit réalisée – probablement avant même que les pois ne soient séparés.

Il semble difficile de ne pas reconnaître la méthode scientifique dans la méthode qui a conduit à ces conclusions ; aucun tribunal ne croirait que des corrélations aléatoires parfaites et répétées à loisir puissent apparaître en des points éloignés sans être la conséquence d'une caractéristique commune aux deux objets. De telles corrélations parfaites ne peuvent que refléter la valeur initiale d'une variable commune attachée aux pois, valeur qui est à son tour la conséquence d'une cause commune fluctuante dans le passé (par exemple, le choix au hasard d'une gousse dans un sac qui en est rempli).

#### B-2-b. Paramètres de mesures différents

Considérons maintenant une paire quelconque de pois, déjà séparés spatialement, mais avant que les deux expérimentateurs n'aient décidé les paramètres de l'expérience (température, retard entre les expériences, etc.). Nous savons que, s'il se trouve par hasard que leurs décisions coïncident, des corrélations parfaites se produisent, indépendamment de ces décisions ; c'est vrai, pourvu qu'elles soient identiques dans les deux endroits. A nouveau des éléments de réalité ne peuvent apparaître localement, ou changer leur valeur, en fonction d'expériences réalisées en des points éloignés ; c'est donc nécessairement que les deux pois emportent avec eux suffisamment d'éléments de réalité pour déterminer la couleur de la fleur, quelles que soient les valeurs des paramètres – pas seulement celles qui se trouveront réalisées dans l'expérience qui les concerne. Toute théorie qui ne prend pas en compte ces éléments est nécessairement incomplète.

Prenons une autre analogie, et supposons que les pois sont remplacés par des automates compliqués mettant en jeu la technologie la plus avancée, avec des mesures des paramètres extérieurs tels que la température, etc. capables d'en déduire par le calcul les résultats $\pm 1$ grâce à des ordinateurs puissants[9]. Mais, hélas, toute cette puissance de calcul est totalement inutile pour simuler les prédictions de la mécanique quantique pour des expériences éloignées, à moins que la mémoire de chacun des ordinateurs ne contienne dès le départ un nombre aléatoire commun qui, combiné aux mesures locales des paramètres, déterminera le résultat final grâce à l'utilisation d'un programme informatique commun.

[9]Nous supposons ici que les ordinateurs en question ne sont pas des ordinateurs quantiques (si un jour on réussit à construire des ordinateurs quantiques complexes, ce sera une autre question).

#### B-2-c. Résumé. La parabole de Schrödinger

Pour résumer, l'argument ci-dessus montre que chaque résultat de mesure peut être une fonction de deux sortes de variables[10] :

(i) de propriétés intrinsèques des pois, qu'ils emportent avec eux ;

(ii) des paramètres locaux de l'expérience (température, humidité, etc.) ; du fait que les corrélations disparaissent lorsque les paramètres sont différents, une paire donnée qui s'est trouvée donner lieu à deux fleurs bleues aurait pu donner deux fleurs rouges avec un autre choix des paramètres.
Nous pouvons également ajouter que :

(iii) les résultats sont des fonctions bien définies de ces variables, ce qui signifie qu'aucun processus non déterministe n'entre en compte dans ces expériences. La seule source de hasard est le choix aléatoire de la paire initiale.

(iv) lorsqu'il est séparé de sa gousse, un pois ne peut pas "savoir à l'avance" à quel type d'expérience il va participer, puisque la décision peut parfaitement ne pas encore avoir été prise par l'expérimentateur ; lorsqu'ils sont séparés, les deux pois doivent donc emporter avec eux l'information qui leur permettra de déterminer la couleur des fleurs, quelles que soient les conditions expérimentales (valeurs des paramètres).

En d'autres termes, chaque pois emporte avec lui autant d'éléments de réalité que nécessaire pour fournir la "réponse correcte" à toutes les questions qu'on pourrait lui poser dans le futur. Dans le § 13 de [59], Schrödinger fait une comparaison avec un "élève de lycée qui passe un examen" à qui le professeur peut poser deux questions différentes. On constate, lors de nombreux essais, que "l'élève donne toujours la bonne réponse à la première question qu'on lui pose, quelle qu'elle soit. Il en découle que, dans chaque cas, il sait la réponse aux deux questions", même s'il ne répond pas toujours correctement à la seconde question. "Aucun proviseur de lycée n'en jugerait autrement".

## C. Transposition à la physique

Revenons maintenant à la physique microscopique, comme dans l'argument original de EPR.

### C-1. L'argument EPR pour deux particules microscopiques corrélées

Historiquement, EPR ont introduit leur argument concernant des particules corrélées dont on mesure la position et l'impulsion, ce qui conduit à des résultats continus. Il est cependant plus pratique d'utiliser une version de l'argument qui met en jeu des spins et des résultats discrets, version initialement introduite par Bohm [120] et souvent appelée EPRB.

[10] Dans les notations de Bell, la fonction $A$ dépend du paramètre $a$ ainsi que de $\lambda$.

#### C-1-a. Hypothèses

Supposons que deux particules de spin 1/2 soient émises par une source S dans un état singulet[11] où leurs spins sont corrélés (nous choisissons ce cas pour simplifier, mais le théorème EPR ne se limite pas à deux spins 1/2 dans un état singulet, *cf.* § D-1) ; elles se propagent ensuite vers deux régions éloignées de l'espace où elles sont soumises à des mesures des composantes de leurs spins selon la direction repérée par l'angle $a$ pour la région de gauche, et par l'angle $b$ pour la région de droite (Fig. III.2). Selon la tradition, nous appelons Alice et Bob les deux opérateurs qui effectuent ces expériences dans des laboratoires différents, qui peuvent être très éloignés l'un de l'autre. Alice choisit librement la direction $a$, qui définit son "type de mesure", et ne peut obtenir que les résultat $+1$ ou $-1$ quel que soit le type de mesure choisi ; de même, Bob choisit arbitrairement la direction $b$ et obtient l'un des résultats $+1$ ou $-1$. Dans l'expérience de pensée EPR, on suppose pour simplifier que les deux spins, une fois émis par la source, n'interagissent qu'avec les appareils de mesure, sans avoir d'évolution propre ; la mécanique quantique standard prédit alors (§ A-1 du Chapitre IV) que les distances et les instants auxquels les mesures sont effectuées ne jouent aucun rôle dans les probabilités d'obtenir les différents couples possibles de résultats. Par exemple, si les angles $a$ et $b$ sont choisis égaux (directions de mesures parallèles), les résultats seront toujours opposés pour les deux mesures, même si les mesures ont lieu en des points très éloignés. Ceci reste vrai, quel que soit le choix $a = b$ qui est fait, et si les deux opérateurs opèrent de façon totalement indépendante dans leurs régions de l'espace et font un choix au dernier moment (après l'émission de la paire de particules).

Le point de départ de EPR est de supposer que les prédictions de la mécanique quantique concernant les probabilités de résultats de mesure sont correctes. Plus précisément, le raisonnement suppose que les corrélations parfaites prédites par cette théorie sont toujours observées, quelle que soit la distance entre les appareils de mesure. Dans la parabole des pois, la couleur rouge ou bleue est évidemment l'analogue des deux résultats $\pm 1$, les paramètres expérimentaux (température, etc.) sont les analogues de l'orientation des appareils analysant les composantes des spins. Nous avons supposé que les mêmes couleurs sont toujours observées pour une paire de pois donnée, dès que les conditions expérimentales dans les deux régions de l'espace sont les mêmes, alors qu'en mécanique quantique nous venons juste de voir que les résultats sont toujours opposés pour des directions d'analyse identiques ;

[11] A ce stade, nous n'avons pas besoin de connaître la définition précise d'un état de spin singulet. Elle sera donnée, ainsi que le calcul des probabilités quantiques associées à des valeurs quelconques des directions d'analyse quelconques $a$ et $b$, au § A-1 du Chapitre IV. Ces probabilités montrent que, lorsque $a$ et $b$ sont égaux, des corrélations parfaites sont obtenues, ce qui est le seul élément nécessaire pour comprendre le raisonnement EPR. Voir également Chapitre XII, relation (XII-76).

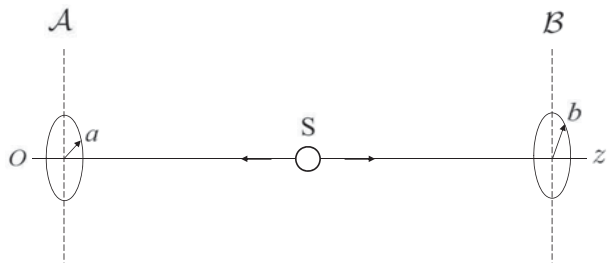


FIGURE *III.2 – Schéma d'une expérience EPRB. Une source S émet des paires de particules dans un état de spin singulet. Ces particules se propagent le long de la direction Oz vers deux régions éloignées de l'espace, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, où des appareils de Stern et Gerlach sont utilisés pour mesurer les composantes de leurs spins sur des directions perpendiculaires à Oz. Pour la première particule, la direction est définie par l'angle a, pour la seconde par l'angle b. Chaque mesure fournit le résultat* $+1$ *ou* $-1$*, et l'on s'intéresse aux corrélations entre ces résultats lorsque l'expérience est répétée un grand nombre de fois.*

pour obtenir une correspondance parfaite, un changement de signe est donc nécessaire. Nous pouvons par exemple supposer que, dans l'expérience quantique, Alice attribue une couleur rouge au résultat $+1$ et une couleur bleue au résultat $-1$, alors que Bob choisit la convention inverse[12]. En pratique, Alice pourrait compléter son dispositif expérimental avec un appareil qui allume une lampe rouge si le résultat est $+1$, ou une lampe bleue pour le résultat $-1$ ; Bob peut utiliser un appareil similaire mais connecté différemment de sorte qu'il fournit la correspondance opposée entre couleur et résultat. Pour finir, cette question de signe n'introduit aucune difficulté fondamentale ; dans ce contexte, il n'existe en fait aucune différence entre une corrélation parfaite ou une anti-corrélation parfaite.

Un autre ingrédient essentiel du raisonnement EPR est la notion appelée "éléments de réalité" ; EPR commencent par remarquer que ces éléments ne peuvent pas découler de considérations philosophiques a priori, mais doivent être trouvés en faisant appel aux résultats des expériences. Ils proposent alors le critère suivant : "si, sans perturber en aucune façon le système, nous pouvons prédire avec certitude la valeur d'une quantité physique, alors il existe un élément de réalité physique correspondant à cette quantité physique". En

[12]Une autre possibilité est de ne rien changer dans l'expérience quantique, mais d'attribuer des valeurs $+1$ aux fleurs rouges et $-1$ aux fleurs bleues dans un des laboratoires où poussent les pois, et de choisir la convention opposée pour l'autre laboratoire.

d'autres termes, une certitude ne peut émerger de rien : un résultat expérimental qui est connu à l'avance ne peut être que la conséquence d'une quantité physique pré-existante. Dans notre analogie botanique, nous avons implicitement utilisé cette idée dans le raisonnement du § B-2.

Un dernier ingrédient du raisonnement EPR, tout à fait essentiel, est la notion d'espace-temps et de localité : les éléments de réalité en question sont attachés aux régions de l'espace où ont lieu les expériences[13], et ne peuvent pas varier soudainement sous l'influence d'événements se produisant dans une région très éloignée de l'espace. Ils peuvent encore moins apparaître dans de telles conditions[14]. Ainsi les pois de notre parabole n'étaient pas tant les symboles d'objets microscopiques, des électrons ou des atomes de spin 1/2 par exemple. De fait, leurs enveloppes symbolisent plutôt des régions de l'espace où nous savons seulement que "quelque chose se propage à l'intérieur" ; ce quelque chose peut être une particule, un champ, une molécule biologique, ou n'importe quoi d'autre, et aucune hypothèse n'est nécessaire sur sa structure ou sa description physique. En fait, dans la citation de EPR au paragraphe précédent, on peut remplacer le mot "système" par "région de l'espace" sans changer le reste du raisonnement. On peut résumer la situation en disant que la conviction de base de EPR est que les régions de l'espace contiennent des éléments de réalité qui leurs sont propres (faire correspondre des éléments de réalité distincts à des régions de l'espace séparées est parfois appelé "séparabilité" *cf.* § C-3-c) et qu'ils évoluent dans le temps de façon locale. Pour faire court, on parle souvent de "réalisme local" dans la littérature.

#### C-1-b. Conclusions

A partir de ces hypothèses, par le même raisonnement que ci-dessus, EPR obtiennent l'équivalent des conclusions du § B-2 : quelles que soient les valeurs choisies pour $a$ et $b$, les résultats des mesures sont des fonctions :

(i) des propriétés individuelles des spins qu'ils emportent avec eux (les éléments de réalité EPR) ;

(ii) bien sûr, ils sont également fonction des orientations $a$, $b$ des analyseurs de Stern et Gerlach.

[13] Einstein écrit dans [115] : "Les objets de la physique baignent dans un continuum d'espace-temps. Ces objets demandent une existence autonome dans la mesure où ils se trouvent dans des parties différentes de l'espace".

[14] En mécanique quantique standard, si l'on applique le postulat de réduction du vecteur d'état à la mesure d'un des spins, le spin qui n'est pas mesuré "saute" soudainement vers un état qui possède une composante bien définie du spin le long d'une direction parallèle à celle qui a été mesurée pour l'autre spin. Vue de cette façon, la mécanique quantique attribue effectivement un élément de réalité au second spin avant même qu'il ait subi une mesure, ce qui est en accord partiel avec la conclusion EPR. Cependant le désaccord reste total avant la première mesure, puisque la mécanique quantique standard n'attribue aucun élément de réalité de ce type à aucun des spins.

De surcroît, ils montrent que :

(iii) les résultats sont donnés par des fonctions bien définies de ces variables, ce qui implique qu'aucun processus non déterministe ne se produit : en d'autres termes, une particule à spin transporte avec elle toute l'information nécessaire pour fournir le résultat d'une mesure future, quel que soit le choix de l'orientation $a$ (pour la première particule) ou $b$ (pour la seconde). Il en découle que toutes les composantes de chaque spin ont simultanément des valeurs bien déterminées.

(iv) il est possible d'envisager des mesures futures correspondant à deux valeurs différentes de $b$ et $b'$ par exemple, c'est-à-dire de composantes différentes qui sont appelées "incompatibles" en mécanique quantique ; le raisonnement EPR montre qu'en réalité il est parfaitement possible que des variables incompatibles aient simultanément des valeurs parfaitement bien définies.

Le point (i) peut être appelé le résultat EPR-1 ; il implique que quelque chose manque dans la mécanique quantique (la description des propriétés intrinsèques des particules individuelles avant la mesure), qui est donc incomplète – EPR considèrent qu'une théorie complète doit être telle que "chaque élément de réalité doit avoir son correspondant dans la théorie physique". Il est donc parfaitement possible que le vecteur d'état soit une description suffisante pour un ensemble statistique de paires de particules, mais pas pour une paire unique, où elle devrait être complétée par une information additionnelle. En d'autres termes, parmi l'ensemble de toutes les paires, on peut distinguer des sous-ensembles qui ont des propriétés physiques différentes.

Le point (iii) va plus loin et établit la validité du déterminisme à partir d'une hypothèse de localité, combinée avec celle que les prédictions de la mécanique quantique sont correctes.

Le point (iv) peut être appelé le résultat EPR-2 ; il montre que la notion d'observables incompatibles n'est pas fondamentale, mais seulement une conséquence du caractère incomplet de la théorie. Ce point fournit une raison de rejeter la complémentarité (au § D-1, nous généralisons ce résultat à d'autres systèmes quantiques que deux spins 1/2 dans un état singulet). Curieusement, EPR-2 est souvent présenté comme le résultat EPR majeur, parfois même sans mention des autres. En fait, le rejet de la complémentarité est relativement marginal ou, du moins, pas aussi important que la preuve d'incomplétude. Dans les raisonnements qui seront faits plus bas, nous n'aurons besoin que de EPR-1. Einstein lui-même n'accordait pas beaucoup d'importance à la relation entre le raisonnement EPR et les variables ne commutant pas[15], et il semble probable que ce soit Podolsky qui ait introduit cette composante dans la rédaction de l'article.

[15] A la fin de la lettre déjà mentionnée à Schrödinger [114], il écrit "quant au fait que les différents états du système puissent être considérés comme les vecteurs propres d'opérateurs différents, je m'en fiche totalement" ("Das ist mir Wurst" en allemand).

Effectivement il semble que, pour Einstein, le résultat essentiel de l'article EPR n'était, ni EPR-1, ni EPR-2, mais un autre résultat que nous pouvons appeler EPR-3. Curieusement, cet élément logique est bien souvent passé inaperçu, peut-être parce qu'il n'apparaît pas dans le résumé. Cependant, Einstein y tenait et le considérait comme important. En témoigne par exemple le fait que c'est cet aspect qu'il met en avant dans son article de 1936 [100], un an après la publication de l'article EPR[16]. Le résultat EPR-3 est que la description de la réalité physique donnée par la mécanique quantique est "redondante", en ce sens qu'elle décrit la même réalité physique (pour la particule 2) avec plusieurs vecteurs d'état différents. L'idée est soulignée dans une phrase de l'article EPR, qui apparaît avant même que soient discutés les opérateurs ne commutant pas : "En conséquence, il est possible d'attribuer deux fonctions d'onde différentes à la même réalité (le second système après interaction avec le premier)". Effectivement, si toutes les paires de particules émises sont identiques comme le considère la mécanique quantique, la réalité physique attachée à la particule 2 ne devrait pas dépendre du type de mesure effectuée sur la particule 1 en un point arbitrairement éloigné (localité) ; cette réalité physique sera nécessairement la même juste après la mesure sur la particule 1, quelle que soit la quantité mesurée à cette occasion. Or la mécanique quantique indique que la réduction du vecteur d'état doit être faite dans la base de l'espace des états qui est associée à la mesure ; ainsi, la particule 2 arrive dans plusieurs états différents selon la mesure effectuée sur la particule 1. Pour finir, nous avons trop de vecteurs d'état pour décrire la même réalité physique de la particule 2, d'où une contradiction. Il est quelque peu paradoxal que la même théorie soit incomplète et redondante ! En revanche, si l'on accepte l'existence des éléments de réalité EPR, la difficulté disparaît : la mesure sur la particule 1 révèle des propriétés initiales de cette particule, donc de la paire émise, donc (si les éléments de réalité sont corrélés) des propriétés initiales de la particule 2. Ces dernières seront effectivement différentes selon la nature de la première mesure, et on retombe dans une situation de corrélation ordinaire.

### C-2. La réponse de Bohr

Bohr, dans sa réponse [41, 121], ne critique en rien le raisonnement EPR, mais fait plutôt remarquer que leurs hypothèses de départ ne sont pas ap-

[16] Les mots d'Einstein dans cet article sont les suivants (il appelle systèmes A et B les systèmes que nous avons notés systèmes 1 et 2) : "puisqu'il ne peut y avoir qu'un seul état physique de B après l'interaction, état qui peut raisonnablement dépendre du type de mesure que nous réalisons sur le système A qui est séparé de B, on peut en conclure que la fonction $\Psi$ n'est pas reliée de façon non anbigüe à l'état physique. L'association de plusieurs fonctions $\Psi$ avec le même état physique du système B montre à nouveau que la fonction $\Psi$ ne peut être interprétée comme une description (complète) de l'état physique d'un système unique".

propriées au cadre de la physique quantique. Pour Bohr, le critère de réalité physique proposé par EPR "contient une ambigüité essentielle lorsqu'on l'applique aux phénomènes quantiques" ; il ajoute "leur argumentation ne me semble pas prendre en compte de façon adéquate la situation réelle à laquelle nous sommes confrontés en physique atomique (dans le contexte de l'époque, "atomique" est l'équivalent de "microscopique" ou "quantique" en langage contemporain). Son texte a été scruté en détail et discuté par bien des auteurs (pour une revue historique, voir par exemple le Chapitre 6 de [58]), mais reste néanmoins délicat à vraiment comprendre. Une raison est peut-être qu'au lieu de concentrer ses arguments sur la situation précise envisagée par EPR, Bohr met en avant de façon générale la cohérence interne du formalisme mathématique de la mécanique quantique, ainsi que "l'impossibilité de contrôler la réaction de l'objet lorsqu'il interagit avec les appareils de mesures". Mais, justement, l'idée essentielle de EPR est de choisir une situation où les fameuses perturbations inévitables par l'appareil de mesure ne peuvent exister ! La localité de EPR implique qu'une mesure effectuée dans la région $\mathcal{A}$ ne peut créer aucune perturbation des éléments de réalité de la région $\mathcal{B}$.

De fait, seule la seconde partie de l'article de Bohr concerne directement l'argument EPR. Bohr y écrit : "la formulation mentionnée plus haut du critère (le critère EPR d'existence d'éléments de réalité)... contient une ambigüité en ce qui concerne l'expression 'sans perturber le système en aucune façon'. Bien sûr, dans un cas comme celui qui est considéré (par EPR), il n'est pas question de parler d'une perturbation mécanique du système étudié pendant la dernière étape critique de la mesure. Mais, même à cette étape, subsiste essentiellement la question d'une influence des conditions mêmes qui définissent précisément les types de prédictions possibles concernant le comportement futur du système... la description quantique peut être caractérisée comme une utilisation rationnelle de toutes les possibilités de donner des interprétations non ambigües des mesures, compatibles avec les interactions finies et incontrôlables entre les objets et les appareils de mesure dans le domaine de la théorie quantique".

Plusieurs auteurs se sont demandés le sens exact de ces mots, en particulier ce qu'il faut comprendre précisément par "perturbation mécanique", et plus encore comment interpréter la phrase centrale "il se pose essentiellement la question d'une influence des conditions mêmes qui définissent précisément les types de prédictions concernant le comportement futur du système". Ce dont Bohr veut parler est probablement d'une "influence *de la première mesure effectuée en* $\mathcal{A}$ sur les conditions qui définissent les prédictions concernant le comportement futur du système *lors de la seconde mesure en* $\mathcal{B}$"– ou alors peut-être "le comportement futur du système *global en* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$". Dans le point de vue de Bohr, la réalité physique ne peut être définie convenablement sans faire référence à une expérience complète et parfaitement spécifiée. Ceci inclut, non seulement les systèmes soumis à la mesure (les particules

microscopiques), mais aussi les appareils de mesure : “ces conditions (expérimentales) doivent être considérées comme un élément indissociable de tout phénomène auquel on puisse attribuer le terme de réalité physique sans ambigüité”. Ainsi, le simple fait d'effectuer en $\mathcal{A}$ une mesure sur un spin, ainsi que le choix d'une direction de mesure, changent la réalité physique du système total, incluant l'autre spin en $\mathcal{B}$. En d'autres termes, Bohr considère que c'est l'ensemble du système physique total qui est perturbé par le fait qu'un choix différent du type de mesure est effectué à un bout de l'expérience ; de ce point de vue, les mots “sans perturber en aucune façon le système” apparaissent effectivement ambigus. Ceci conduit à rejeter l'hypothèse de EPR selon laquelle la réalité physique associée avec la région $\mathcal{B}$ où se trouve le second spin est indépendante des mesures effectuées à une distance arbitrairement grande ; la conclusion de EPR n'en découle alors plus.

Dans la même ligne, plus de dix ans plus tard (en 1948), Bohr caractérisait son point de vue en écrivant [46] : “En résumé, l'impossibilité de subdiviser les effets quantiques individuels, de séparer le comportement des objets de leur interaction avec les appareils de mesure qui sont utilisés pour définir les conditions dans lesquelles le phénomène apparaît implique une ambigüité lorsqu'on cherche à attribuer des attributs conventionnels à des objets atomiques, ce qui nous pousse à reconsidérer notre attitude concernant le problème d'une explication physique”. C'est la nécessité même d'une telle explication physique qui est remise en question par Bohr. Les citations du § E du Chapitre II montrent également que, pour Bohr, une interprétation cohérente du formalisme quantique ne peut être obtenue sans y inclure des concepts classiques, associés avec chaque expérience[17].

J.S. Bell résume la réponse de Bohr de façon concise en écrivant [95] que, du point de vue de Bohr “il n'existe pas de réalité en dessous d'un certain niveau classique macroscopique”. Effectivement, si l'on prend un point de vue où la réalité physique ne peut être que macroscopique, alors la tentative de EPR pour attribuer des éléments de réalité à l'un des spins seulement, ou à une région de l'espace le contenant, est incompatible avec la mécanique

[17]Heisenberg non plus n'était pas en accord avec Einstein, et décrivait la position de ce dernier sur la mécanique quantique dans les termes suivants (Chapitre V de [94]) : “Lorsqu'Einstein a critiqué la mécanique quantique, il l'a fait sur la base du réalisme dogmatique. C'est une attitude extrêmement naturelle. N'importe quel scientifique qui fait de la recherche sent qu'il est en quête de quelque chose qui est objectivement vrai. Ses affirmations ne sont pas supposées dépendre des conditions dans lesquelles elles peuvent être vérifiées”.

Dans sa conférence Nobel en 1933, il avait déjà écrit “Le seul fait que le formalisme de la mécanique quantique ne peut être interprété comme une description visuelle d'un phénomène se produisant dans l'espace et le temps montre que la mécanique quantique n'est en rien concernée par la détermination objective de phénomènes dans l'espace-temps”.

quantique et donc sans fondement physique[18] – même si cette région est très grande et isolée du reste du monde. Dit autrement, un système physique qui s'étend dans une grande région de l'espace doit être considéré comme une entité unique, au sein duquel il n'est pas permis de distinguer des sous-systèmes physiques ni aucune structure ; essayer d'attacher des réalités physiques indépendantes à des régions différentes de l'espace est une tentative vouée à l'échec. En termes de notre leitmotiv du § A-3 au Chapitre I, la différence profonde entre espace ordinaire et espace des configurations, nous pourrions dire la chose suivante : la fonction d'onde unique du système de deux particules se propage dans un espace des configurations qui a plus de 3 dimensions, et ce fait doit être pris très au sérieux ; il ne faut donc pas tenter de revenir à 3 dimensions et de mettre en œuvre des arguments de localité dans l'espace habituel. Le point de vue de Bohr n'est bien sûr pas contradictoire avec la relativité, mais il réduit certainement l'importance de notions comme celles d'espace-temps ou d'événement (une mesure en mécanique quantique n'est pas locale, ce n'est donc pas un événement relativiste stricto sensu). Son point de vue n'est donc pas très compatible avec une interprétation stricte de la relativité.

Bien des physiciens reconnaissent qu'une caractérisation précise de l'attitude de Bohr est délicate, par exemple pour spécifier exactement quels principes traditionnels doivent être abandonnés (voir par exemple la discussion de la Ref. [10]). Ce qui est clair est que Bohr considère qu'il est vain de chercher des explications physiques au-delà de ce que dit déjà la mécanique quantique orthodoxe. Dans sa réponse à EPR [41] publiée à *Physical Review*, on croit retrouver une influence des discussions qu'il avait eues antérieurement avec Einstein aux conférences Solvay ; ceci expliquerait pourquoi il répète simplement le point de vue orthodoxe concernant une seule particule soumise à des mesures incompatibles, ce qui n'a rien à voir avec l'argument EPR. Il ne parle jamais explicitement de localité. A-t-il complètement apprécié à quel point la discussion devient passionnante pour deux particules éloignées qui sont corrélées, et donc la nouveauté de l'argument EPR, qui est le point de départ du théorème de Bell par exemple[19] ? Pour Pearle, il s'exprime de façon catégorique : "la réponse de Bohr était essentiellement qu'il ne partageait pas l'opinion d'Einstein" [122]. Même Bell admettait qu'il avait de grandes difficultés à comprendre Bohr ("Je n'ai pas vraiment une idée sur le sens de ces mots" – voir l'appendice de [95]). Quoi qu'il en soit, le point de

[18] On pourrait ajouter que le rejet par EPR de la notion d'observables incompatibles (argument EPR-2) implique qu'au moins deux dispositifs expérimentaux soient pris en compte pour l'un des appareils de mesure. Mais cela correspondrait dans le point de vue de Bohr à deux réalités physiques différentes (une pour chaque couple $a$,$b$ différent), au lieu d'une seule comme le supposent EPR dans leur raisonnement.

[19] Si Bohr avait connu le théorème de Bell, il aurait tout simplement pu répondre à EPR que leur système logique n'était pas cohérent (voir § A-3 du Chapitre IV) !

vue de Bohr reste actuellement toujours aussi solide, alors que nous savons maintenant que les hypothèses EPR posent un problème de compatibilité mutuelle, comme nous allons le voir dans le Chapitre IV.

## C-3. Localité, relativité, séparabilité

Localité et séparabilité sont deux notions distinctes, même si elles apparaissent souvent liées.

### C-3-a. Différents aspects de la localité

En fait, la notion de localité elle-même recouvre des concepts variés ; les divers auteurs en donnent parfois des définitions différentes. La plupart des physiciens, à cause de l'immense impact de la relativité, ont immédiatement tendance à l'associer avec celle de cône de lumière, ainsi que d'un maximum absolu pour la vitesse de propagation dans l'espace des influences ou des messages. Il est d'ailleurs parfaitement possible d'interpréter le raisonnement EPR dans ces termes. Cependant l'article EPR orginal est basé sur un concept bien plus général en physique, antérieur à la relativité (que ce soit celle de Galilée ou d'Einstein). Il pourrait être exprimé[20] simplement sous la forme "l'influence d'objets distants peut être négligée s'ils sont suffisamment éloignés" ou, de façon plus élaborée, "l'influence mutuelle des événements décroît lorsque leur distance croît, de sorte qu'elle peut être rendue arbitrairement petite". C'est une notion purement spatiale (le temps n'y intervient pas) qui est, de fait, l'une des bases de toutes les sciences expérimentales : le scientifique suppose que les observations faites dans un laboratoire dépendent de ce qui se passe dans le laboratoire, mais pas d'événements arbitraires ou de choix qui sont faits ailleurs et très loin. Imaginons la situation si les observations dans chaque laboratoire dépendaient de tous les choix de paramètres faits dans tous les autres endroits du monde ; il deviendrait probablement alors impossible de faire un expérience qui ait un sens ! Cette notion plus fondamentale de localité, qui est en quelque sorte une des bases de la méthode scientifique, est suffisante pour le raisonnement EPR. Voir le § 3.3 de [123] pour une généralisation du concept de localité au cas d'une évolution stochastique ; nous reviendrons sur le caractère essentiel de la localité dans notre discussion du théorème de Bell (§ B-2 du Chapitre IV).

Dans la présentation relativiste de l'argument EPR, on peut supposer par exemple que les deux mesures sont faites simultanément (dans le référentiel galiléen de la source) à une très grande distance mutuelle. Chaque interaction d'une particule avec son appareil de mesure définit alors un événement

[20] Les mots employés dans l'article EPR sont simplement : "comme, au moment de la mesure, les deux systèmes n'interagissent plus, aucun changement réel concernant le second système ne peut se produire qui soit conséquence d'une opération quelconque effectuée sur le premier".

auquel est associé un cône de lumière ; la distance entre les appareils fait que chacun des deux événements tombe hors du cône de lumière de l'autre. Dans ces conditions, aucune influence ne peut se propager d'un événement à l'autre. Le raisonnement EPR suppose alors que les éléments de réalité associés à un système physique en un point d'espace-temps donné ne peuvent changer (ou apparaître) que de façon causale, c'est-à-dire sous l'effet d'autres événements s'étant produits dans le passé du cône de lumière de ce point. Il en découle que les éléments de réalité du second spin ne peuvent être affectés par la mesure réalisée sur le premier spin. Dans ce point de vue, on peut dire que l'objectif principal de EPR est de rétablir une description de tous les processus physiques en termes d'événements d'espace-temps s'influençant mutuellement de façon causale. C'est l'opposé de la description en mécanique quantique standard où un processus de mesure peut constituer un événement totalement délocalisé couvrant une grande région de l'espace (Fig. IV.5). EPR ne formulent aucune objection particulière contre le non-determinisme, mais ils demandent que l'influence d'événements aléatoires ne se propage jamais plus vite que la vitesse de la lumière. Nous reviendrons sur cette discussion dans le cadre du théorème de Bell au § C du Chapitre V.

#### C-3-b. Relativité

Le raisonnement EPR prend clairement ses racines dans la relativité, ce qui n'est pas surprenant pour un argument de la part d'Einstein. L'idée de base est que, si un système physique est isolé et contenu dans une région R de l'espace, tout ce qui se produit dans cette région peut être prédit en fonction des événements qui se produisent dans le cône de R. Ce qui se produit dans cette région peut découler de règles déterministes ou non, peu importe[21], mais ne peut pas dépendre de paramètres qui sont arbitrairement choisis par des opérateurs qui sont très éloignés, hors de ce cône du passé. Les décisions prises par ces opérateurs sont sans conséquence pour ce que se produit au sein de R (nous reprendrons plus en détail ce sujet au § B-2-b du Chapitre IV). En d'autres termes, les causes affectent des événements locaux, de façon déterministe ou non, mais ces causes doivent se trouver à l'intérieur du cône du passé de chaque événement (causalité relativiste).

Bohr, de son côté, prend un point de vue diamétralement opposé. Par

[21] Contrairement à ce que l'on voit souvent écrit, Einstein lui même n'élevait pas d'objection de principe contre l'indéterminisme ; ce qui le choquait était l'abandon de la structure de l'espace-temps et de la notion d'événement relativiste (une mesure sur un système quantique intriqué n'est pas un événement d'espace-temps). Il est dommage que cette phrase qu'il a écrite une fois par plaisanterie dans une lettre, "Gott würfelt nicht" (Dieu ne joue pas aux dés), soit la seule chose que tant de commentateurs aient retenue, alors qu'elle est anecdotique. Mais, même l'ami proche d'Einstein qu'était Born n'a jamais réellement compris ce que disait Einstein, comme l'atteste leur correspondance [124] – pour John Bell cette mécompréhension entre géants était un des drames de la physique.

exemple, dans l'introduction de sa fameuse conférence de Côme [92], il souligne que "Ce postulat [le postulat quantique] implique une renonciation concernant la coordination espace-temps des processus atomiques", et que "La théorie quantique nous apprend qu'une description causale de l'espace-temps n'est appropriée que dans la mesure où la valeur du quantum d'action est très petite devant ces actions mises en jeu dans nos perceptions ordinaires".

#### C-3-c. Non-séparabilité quantique

Au lieu d'invoquer le rôle des appareils de mesure pour définir la réalité physique (comme le fait Bohr), on peut introduire la notion de "non-séparabilité". L'idée est que des systèmes quantiques différents, lorsqu'ils ont interagi dans le passé, ne possèdent plus nécessairement leurs propriétés physiques propres ; ils sont tous deux des parties d'un système plus grand, qui est le seul à posséder des propriétés physiques. Il n'est alors pas possible de séparer (conceptuellement) le système global en deux sous-systèmes plus petits et de leur attribuer des propriétés physiques ; le système total est un tout non séparable[22].

En général, la notion de séparabilité est conceptuellement différente de celle de localité. Elle n'est pas reliée à l'espace : deux systèmes peuvent occuper la même région de l'espace et néanmoins rester distincts, avec chacun leurs propriétés physiques propres (séparables ne veut pas dire séparés). Dans le raisonnement EPR, cependant, comme les deux particules sont effectivement dans des régions séparées de l'espace, la séparation spatiale est supposée entraîner la séparabilité. En revanche, la non-séparabilité quantique peut être définie par les mots "même lorsque deux régions de l'espace sont distinctes et très éloignées l'une de l'autre, on ne peut pas toujours attribuer des propriétés physiques séparées à ce qu'elles contiennent".

La non-séparabilité quantique prend ses racines dans la façon dont le formalisme quantique décrit des systèmes et des sous-systèmes. Elle est clairement reliée à la notion d'intrication (§ A du Chapitre VII) : une description parfaite du tout ne contient pas nécessairement une description parfaite des parties. Nous avons mentionné plus haut que Schrödinger considérait l'intrication comme l'une des propriétés les plus fondamentales de la mécanique quantique. L'intrication restreint fortement le nombre de propriétés physiques qui peuvent être attribuées à des sous-systèmes, et annule parfois ce nombre. En d'autres termes, la "meilleure description possible" (avec un vecteur d'état) n'est pas accessible aux sous-systèmes ; ils sont affectés d'un niveau supplémentaire d'indétermination, ce qui ne se produit jamais en mécanique classique.

[22] Peres a proposé un critère mathématique définissant la séparabilité d'un ensemble de deux systèmes physiques décrit par un opérateur densité (§ B-6 du Chapitre VII).

Invoquer une non-séparabilité intrinsèque pour répondre à l'argument EPR est séduisant, car les difficultés liées à la définition précise des appareils de mesure invoquée par Bohr s'atténuent. Cette position reste néanmoins délicate, en particulier parce que les corrélations et l'intrication peuvent se propager vers le monde macroscopique (paradoxe du chat de Schrödinger) de sorte que l'absence de propriétés physiques peut atteindre le monde macroscopique ; on pourrait arriver à une situation où seul l'Univers entier aurait encore des propriétés physiques !

Il est clair que, si le monde était totalement non local (ou totalement non séparable), tous les phénomènes physiques y étant intriqués d'une façon tellement intrinsèque que les démêler soit hors de portée, leur analyse scientifique par la méthode expérimentale deviendrait bien difficile, probablement impossible. En fait, les progrès scientifiques du passé n'ont été possibles que parce que cette non-localité et non-séparabilité restent des phénomènes qui ne se manifestent que dans certaines situations relativement spéciales, le plus souvent celles conçues par les physiciens précisément pour les mettre en évidence.

## D. Généralisations

Nous avons déjà mentionné que, dans leur article historique [112], EPR discutent les mesures de position et d'impulsion de deux particules sans spin qui sont intriquées ; l'état intriqué EPR est choisi de sorte que la mesure de la position d'une particule détermine la position de l'autre, et également que la mesure de l'impulsion d'une particule détermine l'impulsion de l'autre. Cependant, dans le § C-1, au lieu d'introduire l'argument EPR avec des variables de position et d'impulsion continues, nous avons choisi d'étudier les résultats discrets fournis par des mesures des composantes de spins 1/2 dans un état singulet. La raison de ce choix est qu'il conduit plus naturellement au théorème de Bell. Mais cela ne signifie pas que le théorème EPR est limité à ce cas ! Au § D-1, nous montrons que le raisonnement peut se généraliser à toute paire de systèmes quantiques dont les espaces des états ont la même dimension. Le théorème peut également être généralisé à des condensats à spin, qui peuvent être macroscopiques, comme indiqué au § D-2.

### D-1. Etats EPR généralisés

Nous avons supposé que les deux spins 1/2 étaient dans un état singulet $|\Psi\rangle$ s'écrivant :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+,-\rangle - |-,+\rangle\right] \tag{III-1}$$

où $|\pm,\mp\rangle$ est l'état propre commun des composantes sur $Oz$ des spins 1 et 2 de valeurs propres respectives $\pm\hbar/2$ et $\mp\hbar/2$. Cet état singulet possède une

propriété qui est cruciale pour le raisonnement EPR : si nous choisissons une direction de l'espace $Ou$ quelconque, $|\Psi\rangle$ peut également s'écrire (invariance par rotation) :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |+_{\mathbf{u}}, -_{\mathbf{u}}\rangle - |-_{\mathbf{u}}, +_{\mathbf{u}}\rangle \right] \tag{III-2}$$

Les kets $|\pm_{\mathbf{u}}, \mp_{\mathbf{u}}\rangle$ sont les vecteurs propres communs des composantes sur $Ou$ des spins 1 et 2 avec des valeurs propres respectives $\pm\hbar/2$ et $\mp\hbar/2$. La relation (III-2) indique simplement que $|\Psi\rangle$ garde la même forme, quel que soit l'axe de quantification. C'est là une propriété cruciale pour le raisonnement EPR, où la mesure de plusieurs observables incompatibles joue un rôle essentiel : quelle que soit la direction arbitraire $\mathbf{u}$ choisie par Alice pour réaliser sa mesure, immédiatement après la composante du spin de Bob sur la même direction est déterminée. Si l'on accepte le réalisme local, le raisonnement montre alors que cette composante était déterminée avant toute mesure. Il s'ensuit que toutes les composantes du spin de Bob sont déterminées dans l'état initial (ainsi bien sûr que, par symétrie, toutes les composantes du spin d'Alice), ce qui est contradictoire avec la mécanique quantique standard (où des composantes non parallèles correspondent à des observables incompatibles).

Hemmick et Shakur discutent une généralisation de ce résultat, qu'ils appellent le "paradoxe de Schrödinger" ou encore le "théorème de Schrödinger" (Chapitre 4 de [125]) ; ils montrent que, si deux systèmes quantiques ont des espaces des états de même dimension $N$ quelconque (pas nécessairement 2), on peut construire des "états EPR généralisés" où toutes les observables des deux systèmes sont parfaitement corrélées. Commençons par considérer une observable $A$ et la base $\{|\theta_i\rangle\}$ de ses vecteurs propres orthonormés ($i = 1$, 2,..., $N$) ; nous supposons que toutes les valeurs propres $a_i$ de $A$ sont non dégénérées. Nous introduisons alors l'état suivant du système total :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} |1 : \theta_i\rangle \, |2 : \theta_i\rangle \tag{III-3}$$

Si l'observable $A\,(1)$ est mesurée sur le premier système quantique et fournit le résultat $a_p$, après la mesure le postulat de projection sélectionne un seul terme $i = p$ dans (III-3). On voit alors immédiatement que, si ensuite $A\,(2)$ est mesuré sur le second système quantique, le même résultat $a_p$ est nécessairement obtenu. Nous sommes donc bien dans une situation EPR de corrélations parfaites mais, pour le moment, ce résultat est limité à une seule observable $A$. Montrons maintenant que toute observable d'une particule est parfaitement corrélée avec une autre observable de l'autre particule.

Considérons une observable $B$ quelconque et la base de ses vecteur propres $|\varphi_i\rangle$ ($i = 1$, 2,..., $N$). Le changement de base depuis les $\{|\theta_i\rangle\}$ vers les $\{|\varphi_i\rangle\}$

définit un opérateur unitaire $U$ :

$$|\varphi_i\rangle = U\,|\theta_i\rangle \tag{III-4}$$

dont les éléments de matrice sont :

$$\langle\theta_i|\,U\,|\theta_j\rangle = U_{ij} \tag{III-5}$$

Ces éléments satisfont à la relation :

$$\sum_{k=1}^{N} U^*_{ki}\; U_{kj} = \delta_{ij} \tag{III-6}$$

En effet nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle\varphi_i\,|\varphi_j\rangle &= \sum_k \langle\varphi_i\,|\theta_k\rangle\,\langle\theta_k\,|\varphi_j\rangle \\ &= \sum_i \langle\theta_i|\,U^\dagger\,|\theta_k\rangle\;\;\langle\theta_k|\,U\,|\theta_j\rangle = \sum_{k=1}^{N} U^*_{ki}\;U_{kj}\end{aligned} \tag{III-7}$$

Comme $\langle\varphi_i\,|\varphi_j\rangle = \delta_{ij}$, nous obtenons les relations (III-6), qui expriment simplement le fait que la base $\{|\varphi_i\rangle\}$ est orthonormale (en d'autres termes, que $U$ est unitaire).

Nous pouvons ensuite introduire un autre opérateur $\overline{U}$, dont les éléments de matrice sont les complexes conjugués de ceux de $U$ dans la base $\{|\theta_i\rangle\}$ :

$$\overline{U}_{ij} = \langle\theta_i|\,\overline{U}\,|\theta_j\rangle = \langle\theta_i|\,U\,|\theta_j\rangle^* = U^*_{ij} \tag{III-8}$$

Si nous prenons la complexe conjuguée de la relation (III-6), il vient :

$$\sum_{k=1}^{N} \overline{U}_{ki}\;\overline{U}^*_{kj} = \delta_{ij} \tag{III-9}$$

Cette relation est l'équivalente pour $\overline{U}$ de (III-6) pour $U$, ce qui montre que $\overline{U}$ est lui aussi unitaire. Nous pouvons donc obtenir une autre base orthonormale $\{|\overline{\varphi}_i\rangle\}$ ($i = 1, 2, ..., N$) en définissant les kets :

$$|\overline{\varphi}_i\rangle = \overline{U}\,|\theta_i\rangle \tag{III-10}$$

ce qui entraîne que :

$$\begin{aligned}\langle\theta_i\,|\overline{\varphi}_k\rangle &= \langle\theta_i|\,\overline{U}\,|\theta_k\rangle = \langle\theta_i|\,U\,|\theta_k\rangle^* \\ &= \langle\theta_i\,|\varphi_k\rangle^* = \langle\varphi_k\,|\theta_i\rangle\end{aligned} \tag{III-11}$$

Comme $\langle\theta_i\,|\theta_j\rangle = \delta_{ij}$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i,j=1}^{N}\langle\theta_i\,|\theta_j\rangle\;\;|1:\theta_i\rangle\,|2:\theta_j\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i,j,k=1}^{N}\langle\theta_i\,|\varphi_k\rangle\,\langle\varphi_k\,|\theta_j\rangle\;\;|1:\theta_i\rangle\,|2:\theta_j\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i,j,k=1}^{N}\langle\theta_i\,|\varphi_k\rangle\,\langle\theta_j\,|\overline{\varphi}_k\rangle\;\;|1:\theta_i\rangle\,|2:\theta_j\rangle \qquad \text{(III-12)}\end{aligned}$$

où nous avons utilisé (III-11) pour passer de la seconde ligne à la troisième. Les sommations sur $i$ et $j$ reconstruisent alors les kets $|\varphi_k\rangle$ et $|\overline{\varphi}_k\rangle$ respectivement, de sorte que nous obtenons :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N}|1:\varphi_k\rangle\,|2:\overline{\varphi}_k\rangle \qquad \text{(III-13)}$$

Nous voyons ainsi que $|\Psi\rangle$ ne change pas si une transformation $U$ est appliquée à la première particule et la transformation $\overline{U}$ à la seconde.

En conséquence, $|\Psi\rangle$ peut être développé sur la base propre d'un opérateur quelconque $B\,(1)$ pour la particule 1, à condition que la base pour la particule 2 soit simultanément changée selon l'opérateur $\overline{U}$ ; les $|2:\overline{\varphi}_k\rangle$ sont les vecteurs propres d'une autre observable $B\,(2)$. Le ket $|\Psi\rangle$ prend alors exactement la même forme, à savoir la somme de $N$ produits contenant chacun des états orthonormés des deux particules. Comme plus haut, si l'observable $B\,(1)$ est mesurée (nous avons supposé que cet opérateur n'a pas de valeur propre dégénérée), le postulat de projection sélectionne un seul des produits, ce qui signifie que l'état du système total aboutit dans un état factorisé qui est un état propre de $\overline{B}\,(2)$. En d'autres termes, les deux mesures donnent des résultats qui sont parfaitement corrélés, de sorte qu'une mesure de $B\,(1)$ est équivalente à une mesure de $\overline{B}\,(2)$, exactement comme pour la situation de deux spins 1/2 dans un état singulet.

Le raisonnement EPR s'applique alors et montre que, si l'on accepte réalisme et localité, les résultats des mesures ne font que révéler des propriétés des systèmes quantiques qui doivent pré-exister avant toute mesure. De plus, quelle que soit l'observable $B\,(1)$ choisie, il existe une observable $\overline{B}\,(2)$ parfaitement corrélée avec $B\,(1)$ : la mesure de $B\,(1)$ fournit le résultat de mesure de $B\,(2)$ sur la particule 2 avec certitude. La conclusion est donc que, si deux systèmes quantiques sont décrits par un état du type (III-3), ce n'est pas seulement quelques observables qui correspondent à des éléments de réalité pré-existants, mais toutes les observables !

Dans le contexte du théorème BKS et de la contextualité (§ D du Chapitre VI), on s'intéresse souvent à des mesures sur des particules de spin 1

(ce qui correspond au cas $N = 3$). Ce que nous avons vu montre qu'il est possible d'intriquer deux particules de spin 1 de façon que la connaissance parfaite de la valeur d'une observable absolument quelconque d'un des systèmes puisse être obtenue par une mesure sur l'autre ; voir le § 4.4.3 de [125] pour une discussion plus précise des observables mises en jeu, et la relation avec le théorème de Kochen-Specker. Les particules de spin 1 sont également importantes dans le cadre de la démonstration du théorème de Conway-Kochen [126, 127].

### D-2. L'argument EPR pour des systèmes macroscopiques

Il est amusant de remarquer que l'argument peut également être mis en relation avec une autre grande découverte d'Einstein, à savoir la condensation de Bose-Einstein. L'argument initial mettait en jeu deux particules microscopiques, des atomes par exemple. L'essence de l'argument de Bohr repose sur l'idée que des systèmes microscopiques ne possèdent pas de réalité physique indépendante des appareils de mesure, car la réalité ne peut être définie à ce niveau. Mais il se trouve que la mécanique quantique prédit également que des corrélations semblables devraient être observées avec des systèmes de taille arbitrairement grande, et peuvent donc être macroscopiques [128] ; ceci demande qu'ils soient initialement dans un état quantique très spécial, un "double état de Fock" (un tel état pourrait être accessible par exemple grâce au phénomène de condensation de Bose-Einstein).

Nous ne faisons que résumer brièvement les idées car nous reviendrons sur la question au § D-3 du Chapitre X, auquel nous renvoyons le lecteur qui voudrait plus de détails. Nous considérons deux grands condensats, associés avec deux états de Fock dans des états de spin différents, qui se recouvrent partiellement dans deux régions de l'espace. Initialement, selon la mécanique quantique, la phase relative des deux condensats est totalement indéterminée, de sorte qu'aucune des régions de recouvrement ne contient une orientation transverse de spin. Cependant, dès que des mesures des composantes transverses des spins sont faites dans l'une des régions, une polarisation transverse apparaît immédiatement dans cette région, avec une direction qui est totalement aléatoire. De plus, comme ce processus fixe partout la phase relative des deux condensats, la théorie prédit qu'une polarisation transverse apparaît également dans la seconde région de recouvrement, parallèle à celle de la première région. On a donc un effet éloigné de la mesure, sans aucune interaction entre les deux régions, mais uniquement comme conséquence de la réduction du vecteur d'état.

Il est alors clair que l'argument EPR s'applique directement à une telle situation : comment une polarisation des spins pourrait-elle apparaître spontanément dans une région arbitrairement éloignée de l'espace, sans aucune interaction pour la créer ? Comment la réalité physique contenue dans une

région de l'espace peut-elle dépendre d'une mesure à une très grande distance ? Cependant, la différence importante avec l'argument original EPR est que le nombre de particules concernées est maintenant arbitrairement grand, de sorte que la polarisation de spin peut être macroscopique. Si les spins portent un moment magnétique, ils fournissent une aimantation transverse macroscopique, qui peut être détectée avec des appareils très ordinaires comme une simple boussole. Pour des objets macroscopiques de taille arbitrairement grande, il semble difficile d'invoquer l'argument de Bohr et de dire qu'ils n'ont droit à une réalité physique que lorsqu'ils sont associés avec des appareils de mesure bien définis ! Mais, bien évidemment, nous ne pouvons savoir ce que Bohr aurait dit concernant la version macroscopique de l'argument EPR.

Dans ce cas particulier, l'élément de réalité EPR pré-existant serait donc la phase relative des deux condensats. La notion d'une phase pré-existante est reliée à celle de brisure spontanée de symétrie et de l'apparition d'une phase pour un système qui passe par une transition superfluide (phase d'Anderson [129]). La phase relative de condensats de Bose-Einstein contient également quelques effets de non-localité quantiques intéressants [130], mais les effets non locaux seront discutés dans le chapitre suivant.

# Chapitre IV

# Le théorème de Bell

Comme l'argument EPR, le théorème de Bell [131] peut être vu de plusieurs façons. Historiquement, Bell l'a conçu comme un prolongement logique direct du théorème EPR : son idée était de prendre au sérieux l'existence des éléments de réalité EPR, et de pousser le raisonnement plus loin en les introduisant explicitement dans le formalisme mathématique sous la notation $\lambda$ ; on étudie ensuite toutes les sortes possibles de corrélations qui peuvent être obtenues à partir de fluctuations d'une ou plusieurs variables $\lambda$, en rendant la localité explicite dans les équations (la localité jouait déjà un rôle dans l'argument EPR, mais pas dans les équations). Le raisonnement est mené dans le cadre du déterminisme (dont on considère la validité comme prouvée par le raisonnement EPR) et des probabilités classiques ; il étudie de façon générale toutes les sortes de corrélations qui peuvent être obtenues à partir de fluctuations d'une cause commune quelconque dans le passé – si l'on préfère à partir d'une détermination aléatoire de l'état initial du système. Cette approche mène aux fameuses inégalités.

C'est cette approche qui nous utiliserons pour introduire le théorème de Bell au § A. Un autre point de vue sur ce théorème, relativement fréquent mais moins général, est de le considérer comme complètement dissocié du raisonnement EPR. Le théorème de Bell peut alors être vu comme un théorème d'impossibilité des variables supplémentaires (ou "cachées", § H du Chapitre XI) : si ces variables sont introduites de façon arbitraire et si leur évolution est locale, la théorie ainsi construite ne peut reproduire toutes les prédictions de la mécanique quantique, même si l'on suppose que l'évolution des variables supplémentaires est très complexe. Malheureusement, il n'est pas rare de lire des textes qui ne retiennent que cette version quelque peu limitée du théorème.

Au § B, nous discutons diverses généralisations du théorème de Bell, basées sur des ensembles différents d'hypothèses. En particulier, le domaine d'application du théorème n'est pas limité aux théories déterministes ; par

exemple, les variables $\lambda$ peuvent déterminer les probabilités des résultats des expériences futures, et non les résultats eux-mêmes, sans que cela invalide le théorème (pour plus de détails, voir aussi l'Appendice B).

Enfin, au § C, nous examinons la situation actuelle découlant de l'observation expérimentale des violations des inégalités de Bell, et discutons en particulier les différentes "échappatoires" possibles au raisonnement qui conduit à une contradiction entre les observations expérimentales et le réalisme local.

De façon générale, la condition vraiment essentielle pour la validité du théorème est la localité : des fluctuations de toutes sortes peuvent être prises en compte, mais il faut que leurs effets physiques soient locaux. Si nous supposons que jeter un dé à Paris peut influencer instantanément les événements qui se déroulent à Tokyo, ou même dans d'autres galaxies, la preuve du théorème n'est plus possible. Pour une discussion générale du théorème de Bell, voir par exemple [56, 95, 132, 133].

Au Chapitre V, nous démontrerons un certain nombre d'autres inégalités qui découlent également du réalisme local, et nous examinons plus en détail les relations entre le théorème de Bell et la relativité (impossibilité de transmission instantanée de signaux à distance).

## A. Inégalités de Bell

Les inégalités de Bell sont des relations satisfaites par les valeurs moyennes de produits de variables aléatoires qui sont corrélées classiquement – nous entendons par là que leurs corrélations proviennent des fluctuations d'un événement qui s'est produit dans le passé et qui a influencé leurs valeurs, comme dans le chapitre précédent pour les pois. L'intérêt principal de ces inégalités est qu'elles peuvent se révéler contradictoires avec la mécanique quantique ; une situation où cela se produit est la version avec spins de l'argument EPR [120], déjà introduite au § C-1 du Chapitre III, où deux particules de spin 1/2 sont soumises à des mesures en des points éloignés de l'espace. C'est pourquoi nous commençons par brièvement rappeler quelles sont les prédictions de la mécanique quantique pour un tel système – le seul ingrédient dont nous aurons besoin pour le moment se limite aux prédictions de la mécanique quantique concernant les résultats possibles. Ensuite nous reviendrons à l'argument EPR-Bell, discuterons les contradictions avec la mécanique quantique, le contenu logique du théorème et les contradictions avec les expériences.

### A-1. Mécanique quantique : deux spins dans un état singulet

Nous supposons que deux particules de spin 1/2 dans un état singulet de spin se propagent dans des directions opposées après avoir été émises par

une source commune. Leur état de spin est alors donné par :

$$| \Psi >= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |+,-\rangle - |-,+\rangle \right] \tag{IV-1}$$

où, selon la notation habituelle, l'état à deux spins $|\pm,\mp\rangle$ contient le premier spin dans un état propre de valeur propre $\pm\hbar/2$ de la composante de son spin sur $Oz$[1], et le second dans un état propre de valeur propre $\mp\hbar/2$. Comme indiqué sur la Figure III.2, lorsqu'elles atteignent des régions éloignées, elles sont alors soumises à des mesures de leurs spins, au moyen d'appareils de Stern et Gerlach orientés selon les angles $a$ et $b$ autour de la direction de propagation, ce qui signifie que ce sont les composantes des spins le long de $a$ et $b$ qui sont mesurées.

Si :

$$\theta_{ab} = a - b \tag{IV-2}$$

est l'angle entre les directions définies par $a$ et $b$, la mécanique quantique prédit que la probabilité d'une double détection de résultats $+1$, $+1$ (ou $-1$, $-1$) est :

$$\mathcal{P}_{(+,+)} = \mathcal{P}_{(-,-)} = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \tag{IV-3}$$

tandis que la probabilité de deux résultats opposés est :

$$\mathcal{P}_{(+,-)} = \mathcal{P}_{(-,+)} = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta_{ab}}{2} \tag{IV-4}$$

Nous n'avons pour le moment pas besoin d'en savoir plus sur les prédictions de la mécanique quantique, il nous suffit des probabilités d'observer les résultats de mesure. Une remarque essentielle est que, si $\theta_{ab} = 0$ (donc lorsque les orientations des deux mesures sont parallèles), les formules prédisent que deux probabilités s'annulent, alors que les deux autres sont égales à $1/2$. On est alors toujours certain d'obtenir le même résultat dans les deux mesures, ce qui signifie que les corrélations parfaites nécessaires au raisonnement EPR se produisent effectivement (en fait, pour un état singulet les résultats des mesures sont toujours opposés, et non égaux, mais cela revient au même puisqu'il suffit de changer l'orientation d'un des axes pour qu'ils redeviennent égaux – voir la discussion du § C-1-a au Chapitre III).

Un état tel que (IV-1), où les propriétés des deux sous-systèmes physiques (ici les deux spins) sont corrélées dans le vecteur d'état lui-même, est appelé en mécanique quantique "état intriqué" ; nous reviendrons plus en détail au Chapitre VII sur la notion d'intrication quantique.

[1] On peut montrer que le vecteur d'état (IV-1) est invariant dans toute rotation, ce qui implique qu'il garde la même expression quel que soit le choix de l'axe de quantification $Oz$.

### A-2. Réalisme local : démonstration de l'inégalité BCHSH

Nous partons donc du théorème EPR et, comme Bell, nous supposons que $\lambda$ représente les "éléments de réalité" associés aux spins ; en fait $\lambda$ n'est qu'une notation concise qui peut parfaitement sous-entendre un vecteur avec de très nombreuses composantes, de sorte que le nombre d'éléments de réalité inclus dans $\lambda$ est totalement arbitraire – aucune restriction n'est donc introduite par cette notation. Il est d'ailleurs possible d'inclure dans $\lambda$ des composantes qui ne jouent aucun rôle particulier dans le problème ; la seule chose importante est que $\lambda$ contienne suffisamment d'information pour donner les résultats de toutes les mesures envisageables sur les spins. Nous faisons usage d'une autre notation usuelle pour les résultats, $A$ et $B$, à ne pas confondre avec les lettres minuscules $a$ et $b$ utilisées pour les paramètres de la mesure des deux appareils. Bien évidemment, $A$ et $B$ peuvent dépendre, non seulement de $\lambda$, mais également des paramètres de mesure $a$ et $b$ ; néanmoins, la localité impose que $b$ n'ait aucune influence sur le résultat $A$ (du fait que la distance entre les mesures est arbitrairement grande) ; inversement, $a$ n'a aucune influence sur le résultat $B$. Nous notons donc $A(a,\lambda)$ et $B(b,\lambda)$ les fonctions correspondantes, qui prennent les deux valeurs $+1$ ou $-1$.

Dans ce qui suit, il est suffisant de prendre en compte deux directions seulement pour chaque mesure individuelle ; nous utiliserons donc la notation plus simple :

$$A \equiv A(a,\lambda) \qquad A' \equiv A(a',\lambda) \tag{IV-5}$$

et :

$$B \equiv B(b,\lambda) \qquad B' \equiv B(b',\lambda) \tag{IV-6}$$

Pour chaque paire de particules émise, $\lambda$ est fixé, et les quatre nombres ont des valeurs bien définies, qui ne peuvent chacune être que $\pm 1$. Avec Eberhard [134] nous remarquons que la somme de produits :

$$M(\lambda) = AB - AB' + A'B + A'B' = A(B - B') + A'(B + B') \tag{IV-7}$$

est toujours égale à, soit $+2$, soit $-2$ ; en effet une des parenthèses dans le membre de droite de cette équation s'annule toujours, tandis que l'autre vaut $\pm 2$. Si maintenant nous prenons la valeur moyenne $\langle M \rangle$ de $M(\lambda)$ sur un grand nombre de paires émises (moyenne sur $\lambda$), nous avons :

$$\langle M \rangle = \langle AB \rangle_\lambda - \langle AB' \rangle_\lambda + \langle A'B \rangle_\lambda + \langle A'B' \rangle_\lambda \tag{IV-8}$$

où $\langle AB \rangle_\lambda$ désigne la valeur moyenne sur $\lambda$ du produit $AB \equiv A(a,\lambda)B(b,\lambda)$, et où des notations similaires sont utilisées pour les 3 autres termes. Comme chaque $M(\lambda)$ ne peut prendre que les deux valeurs $\pm 2$, nous avons donc nécessairement :

$$-2 \leq \langle M \rangle \leq +2 \tag{IV-9}$$

Ce résultat est la forme dite BCHSH (Bell, Clauser, Horne, Shimony et Holt) du théorème de Bell [135]. L'inégalité est satisfaite pour toutes les sortes de paires de mesures qui fournissent des résultats aléatoires[2], quel que soit le mécanisme qui crée les corrélations, pourvu que la condition de localité soit respectée : $A$ est indépendant du paramètre de mesure $b$, et $B$ est indépendant de $a$.

Toute théorie entrant dans le cadre du "réalisme local" doit donc conduire à des prédictions qui satisfont la relation (IV-9). Le réalisme est nécessaire puisque nous avons fait usage dans la démonstration de la notion d'éléments de réalité EPR pour en déduire l'existence des fonctions $A$ et $B$ ; la localité (§ C-3 du Chapitre III) l'est également puisque c'est elle qui interdit à $A$ de dépendre de $b$ et inversement à $B$ de dépendre de $a$. Au § A-4 nous reviendrons plus en détail sur le contenu logique du théorème de Bell.

Dans ce contexte, le caractère aléatoire des observations ne peut provenir que des fluctuations d'une source commune fluctuant dans le passé ; on peut également voir ceci comme une hypothèse générale très naturelle qui concerne tous les processus physiques. La Figure IV.1 schématise cette situation, et la Figure IV.2 montre la représentation spatio-temporelle correspondante ; les lignes connectant la cause et les effets doivent se trouver à l'intérieur du cône de lumière $x = \pm ct$ pour que la relativité soit satisfaite ($x$ est la position, $t$ le temps et $c$ la vitesse de la lumière). Mais les inégalités restent en fait valables si, par exemple, d'autres causes fluctuantes agissent également sur les particules durant leur propagation vers les appareils de mesure, ou directement sur les appareils de mesure eux-mêmes (Fig. IV.3). Il faut alors inclure dans $\lambda$ des composantes stochastiques associées aux processus aléatoires correspondants, ce qui peut complètement changer la distribution de cette variable multidimensionnelle, mais pas le fait que la moyenne d'un nombre $M$ toujours égal à $\pm 2$ satisfait nécessairement l'inégalité (IV-9).

La simplicité de cette démonstration est telle qu'on peut s'attendre à ce que l'inégalité reste valable dans de nombreuses situations ; c'est effectivement le cas, comme nous le verrons plus en détail dans les §§ B-1 et B-2. Pour le moment, contentons-nous de remarquer que le résultat est indépendant de l'interprétation de la variable $\lambda$, qui n'est pas nécessairement définie comme une variable supplémentaire ou un élément de réalité. On peut par exemple supposer que cette variable sert simplement à repérer la réalisation de l'expérience : $\lambda = 1$ correspond à la première expérience, $\lambda = 2$ à la seconde,..., $\lambda = N$ à la dernière d'une série d'expériences. Si, pour chaque réalisation, les 4 nombres $A$, $B$, $A'$ et $B'$ ont des valeurs bien définies, toutes égales à $\pm 1$, le

[2]Dans notre définition (IV-7) de $M$, le terme $AB'$ est précédé d'un signe moins alors que les trois autres termes ont un signe plus, mais la position du singe moins est arbitraire. En effet, si l'on écrit $AB + AB' \pm A'B \mp A'B' = A(B + B') \pm A'(B - B')$ et $\pm AB \mp AB' + A'B + A'B' = \pm A(B - B') + A'(B + B')$ on peut obtenir quatre inégalités où le signe moins est attribué à l'un quelconque des quatre termes de la somme.

nombre $M$ est lui aussi bien défini pour chaque réalisation et est égal à $-2$ ou $+2$. Quelles que soient les valeurs qui peuvent apparaître dans une série quelconque de $N$ mesures, il est mathématiquement impossible à la somme des $M$ de dépasser $2N$ ou d'être plus petite que $-2N$. En conséquence, la valeur moyenne obtenue en divisant cette somme par $N$ satisfait nécessairement (IV-9) : la simple existence des 4 nombres pour chaque réalisation est suffisante pour obtenir l'inégalité. En d'autres termes, l'existence de 2 fonctions $A(a, \lambda)$ et $B(b, \lambda)$ des paramètres de mesure $a$ et $b$ et du numéro de l'expérience $\lambda = 1, 2, 3,...$ est suffisante pour obtenir les inégalités BCHSH.

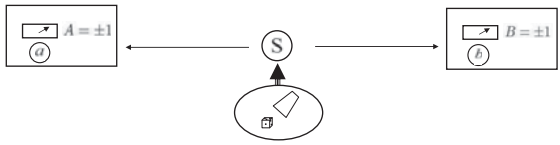


FIGURE *IV.1 – Une source S émet des particules vers deux appareils de mesure situés en des points éloignés, réglés avec des paramètres de mesure respectifs a et b ; chaque appareil fournit un résultat* $\pm 1$. *L'ovale sous la source symbolise un processus aléatoire fluctuant qui contrôle les conditions d'émission des particules émises, et donc leurs propriétés. On observe des corrélations entre les résultats obtenus ; ces corrélations sont conséquence des propriétés aléatoires communes que les particules ont acquises lors de leur émission sous l'effet du processus fluctuant.*

### A-3. Contradiction entre l'inégalité et la mécanique quantique

Au vu de la généralité et de la simplicité de la démonstration ci-dessus, on pourrait s'attendre à ce que toute théorie physique raisonnable donne automatiquement des prédictions qui satisfassent cette inégalité. La surprise est de réaliser que la mécanique quantique n'est pas dans ce cas. Calculons en effet la valeur moyenne du produit des résultats $\pm 1$ fournis par des mesures des deux spins selon des directions faisant entre elles un angle $\theta_{ab}$ ; compte tenu de (IV-3) et (IV-4), cette valeur moyenne $\langle \Pi(a, b) \rangle$ est donnée par :

$$\langle \Pi(a,b) \rangle = \mathcal{P}_{(+,+)} \; + \; \mathcal{P}_{(-,-)} \; - \; \mathcal{P}_{(+,-)} \; - \; \mathcal{P}_{(-,+)} = -\cos\theta_{ab} \qquad \text{(IV-10)}$$

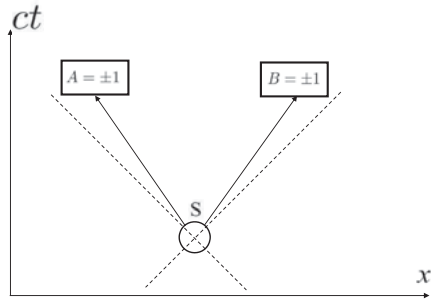


FIGURE *IV.2 – Diagramme d'espace-temps associé aux événements schématisés sur la Fig. IV.1. L'axe horizontal représente l'espace (dans une vue simplifiée à une seule dimension), l'axe vertical le produit ct du temps t par la vitesse de la lumière c. La relativité impose que les deux flèches joignant l'émission des particules aux événements de mesure soient contenues dans le cône de lumière $x = \pm ct$ (lignes tiretées).*

Ce résultat est l'équivalent quantique de la valeur moyenne sur la variable $\lambda$ du produit $A(a,\lambda)B(b,\lambda)$ dans une théorie réaliste locale. Pour obtenir l'équivalent quantique $\langle Q\rangle$ de la combinaison des quatre produits de résultats figurant dans l'expression (IV-7), on calcule la même combinaison des valeurs moyennes de produits de résultats, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\langle Q\rangle &= \langle \Pi(a,b)\rangle - \big\langle \Pi(a,b')\big\rangle + \big\langle \Pi(a',b)\big\rangle + \big\langle \Pi(a',b')\big\rangle \\ &= -\cos\theta_{ab} + \cos\theta_{ab'} - \cos\theta_{a'b} - \cos\theta_{a'b'} \qquad \text{(IV-11)}\end{aligned}$$

Supposons alors que les quatre directions soient dans un même plan, et que les vecteurs rangés dans l'ordre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}'$ et $\mathbf{b}'$ font chacun un angle de 45° avec le précédent (*cf.* Fig. IV.4) ; tous les cosinus valent alors $1/\sqrt{2}$, sauf $\cos\theta_{ab'}$ qui vaut $-1/\sqrt{2}$. On obtient ainsi $\langle Q\rangle = -2\sqrt{2}$ ; si l'on renverse les directions de $\mathbf{b}$ et $\mathbf{b}'$, on obtient $\langle Q\rangle = 2\sqrt{2}$. Dans les deux cas, on obtient ainsi une violation de l'inégalité BCHSH (IV-9) par un facteur $\sqrt{2}$, donc plus de 40 % (il se trouve que $\sqrt{2}$ est la plus grande violation possible autorisée par la mécanique quantique – *cf.* § B du Chapitre V). Malgré l'apparente simplicité de la variation en cosinus contenue dans l'expression (IV-11), aucune théorie locale réaliste n'est capable de la reproduire, puisque qu'elle ne peut

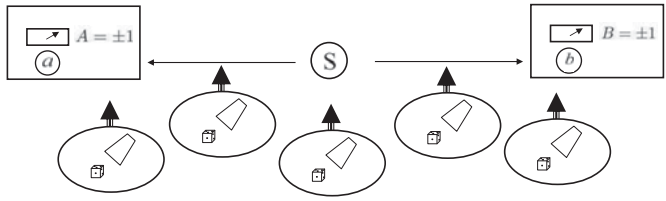


FIGURE *IV.3 – Des causes fluctuantes non contrôlées peuvent influencer, non seulement l'émission des particules, mais aussi leur propagation, ainsi que les appareils de mesure, sans que cela ne change en rien la validité des inégalités BCHSH.*

violer l'inégalité générale (IV-9). Ainsi le raisonnement de EPR-Bell conduit à une contradiction quantitative importante avec la mécanique quantique, montrant que cette dernière n'est pas une théorie réaliste locale dans le sens de EPR.

Comment cette contradiction est-elle possible, et comment un raisonnement apparemment aussi inattaquable peut-il ne pas s'appliquer à la mécanique quantique ? Plusieurs réponses sont possibles :

(i) Bohr est mort en 1962 et n'a pas pu réagir à la publication du théorème de Bell en 1964. Mais nous savons qu'il avait rejeté le raisonnement EPR, comme nous l'avons vu dans le Chapitre III ; il aurait donc très probablement rejeté l'existence de 4 nombres pré-existants $A$, $A'$, $B$, $B'$. Dans ces conditions, le raisonnement du § A-2 n'est plus possible et l'inégalité BCHSH disparaît. Ainsi, Bohr aurait probablement considéré le théorème comme mathématiquement correct mais inapproprié pour la physique quantique, car sans rapport avec la description de l'expérience considérée.

Peut-être cependant aurait-il accepté de raisonner sur ces nombres comme des inconnues qui seront déterminées plus tard, comme on le fait souvent en algèbre ; mais n'est-il alors pas possible d'obtenir l'inégalité ? A nouveau,

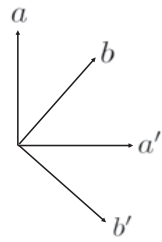


FIGURE *IV.4 – Position des quatre vecteurs a, b, a′ et b′ donnant lieu à une violation maximale de l'inégalité BCHSH avec deux spins* 1/2 *dans un état singulet. Ces vecteurs définissent les composantes des spins à mesurer, selon a ou a′ pour le spin de gauche, selon b ou b′ pour celui de droite, conduisant ainsi à quatre dispositifs expérimentaux distincts. Le seul couple d'angles conduisant à une corrélation négative entre les résultats des deux mesures est (a, b′), du fait que l'angle entre les directions dépasse 90°.*

la réponse à cette question est en fait non, toujours en se plaçant dans la logique de Bohr. Comme nous l'avons déjà indiqué au § C-2 du Chapitre III, son point de vue est que seul l'ensemble de l'expérience doit être pris en compte, comme un tout. Il ne faut pas y distinguer deux mesures séparées qui seraient effectuées chacune sur l'une des particules : l'unique véritable processus de mesure concerne l'ensemble des deux particules à la fois. Un processus fondamentalement indéterministe se produit dans toute la région de l'espace occupée par l'expérience ; il est délocalisé, comme l'illustre le schéma de la Figure IV.5, que l'on peut comparer à celui des Figures IV.1 et IV.3. Le processus n'a pas de localisation spatio-temporelle ; il échapppe à toute description précise dans l'espace-temps habituel. Nous revenons plus en détail sur une discussion du hasard non local à la fin du § B-2-b.

Les fonctions $A$ et $B$ dépendent alors toutes deux des deux paramètres de mesure, de sorte qu'elles doivent être écrites $A(a, b)$ et $B(a, b)$, donc de façon explicitement non locale. Au lieu de 2 nombres $A$ et $A'$, nous en avons maintenant 4, qui sont $A = A(a, b)$, $A' = A(a', b)$, ainsi que $A'' = A(a, b')$ et $A''' = A(a', b')$ ; il en est de même pour $B$ et $B'$, qui sont remplacés par 4 nombres. Ainsi, il faut maintenant prendre en compte 8 nombres en tout, au lieu de 4. La démonstration de l'inégalité BCHSH n'est alors plus possible, et la contradiction disparaît.

(ii) On peut préférer un point de vue plus local sur le processus de mesure, et conserver le concept de mesure sur une seule particule comme valable dans

ce contexte. Pour éviter la contradiction avec les prédictions de la mécanique quantique, on considère alors qu'il est dépourvu de sens d'attribuer quatre valeurs bien définies $A$, $A'$, $B$, $B'$ à chaque paire. Au maximum, seulement deux d'entre elles peuvent être mesurées dans chaque réalisation de l'expérience ; nous ne pouvons donc pas parler de ces quatre nombres ou raisonner sur eux, même comme des quantités inconnues (nous revenons sur ce sujet dans la discussion de la contrafactualité, au § C-2). Comme le résume très clairement Peres [136], "des expériences qui n'ont pas été réalisées n'ont aucun résultat", c'est tout[3] ! Wheeler va dans la même direction quand il écrit : "aucun phénomène élémentaire n'est un phénomène tant qu'il n'est pas un phénomène enregistré (observé)" (p. 184 de [137]). Ce point de vue conserve une définition relativement locale du processus de mesure, contrairement à l'approche de Bohr.

(iii) Quant à Wigner, il met en avant dans [138] que la preuve du théorème de Bell, et donc les inégalités correspondantes, repose sur une notion très simple dans le cadre du réalisme (non nécessairement local) : le nombre de catégories dans lesquelles on peut ranger toutes les paires de particules[4] (ou, de façon équivalente, toutes les réalisations de l'expérience). Chaque catégorie est associée avec des résultats bien définis de mesures pour les divers choix des paramètres $a$ et $b$ qui sont choisis (configuration de l'expérience) ; dans une séquence suffisamment longue de mesures, chaque catégorie contribue avec un poids déterminé, sa probabilité (positive ou nulle). Pour une configuration unique d'une expérience pouvant donner $R$ résultats différents, le nombre de catégories est simplement $R$. Lorsqu'on considère $P$ configurations différentes de l'expérience, chacune pouvant donner $R$ résultats, le nombre de catégories possibles devient $R^P$.

Pour simplifier, nous supposerons que chacun des paramètres $a$ et $b$ peut prendre deux valeurs différentes (dans le § A du Chapitre V, nous étudions le cas de l'article original de Wigner, celui de trois valeurs). Si, comme Bohr, nous considérons l'expérience comme un tout, alors $P = 4$, puisque 4 choix possibles du couple $a$, $b$ sont possibles ; comme chaque réalisation peut donner 4 couples de résultats différents $(\pm 1, \pm 1)$, le nombre de catégories est $4^4$. A ce stade, il n'y a pas de difficulté particulière à attribuer des poids aux catégories afin de reproduire la mécanique quantique, sans contradiction particulière.

[3] Dans le point de vue de Bohr, il n'est pas interdit de considérer que "des expériences qui n'ont pas été réalisées ont des résultats bien définis", mais expériences et résultats ne sont exprimables qu'en fonction de l'ensemble du dispositif expérimental, donc des deux paramètres $a$ et $b$.

[4] Dans cette référence, Wigner raisonne en fait explicitement en termes de variables cachées ; il définit des domaines pour ces variables, qui correspondent à des résultats déterminés pour plusieurs choix possibles des paramètres. Cependant ces domaines correspondent aussi dans le point de vue de EPR à des catégories de paires de particules émises, ce qui explique pourquoi nous utilisons ici cette notion de catégories, sans faire appel aux variables supplémentaires.

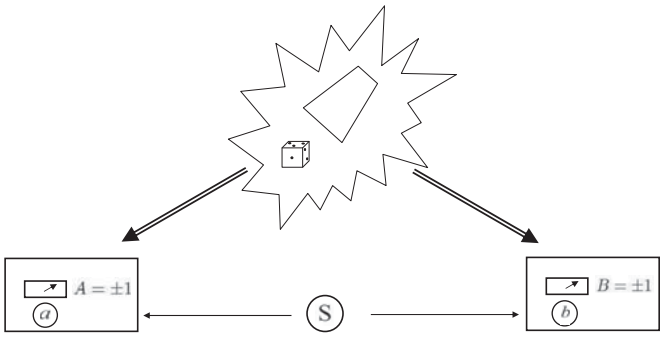


FIGURE *IV.5 – Schéma de la description quantique d'une mesure mettant en jeu deux appareils de mesure éloignés ; on pourra le comparer avec ceux des Figsures IV.1 et IV.3. Le grand zigzag placé en haut de la figure symbolise un processus fondamentalement indéterministe et non local, par opposition avec les ovales placés en dessous des événements dans les figures précédentes qui représentaient des processus stochastiques résultant de l'effet de perturbations locales incontrôlées et fluctuantes. La délocalisation spatiale d'un tel processus quantique est irréductible, de sorte qu'il n'est pas possible de lui associer une représentation spatio-temporelle analogue à celle de la Figure IV.2 (dans ce cas, le hasard "ne vient de nulle part").*

Mais Wigner remarque que, si l'on ajoute la notion de localité, pour chaque paire le résultat obtenu d'un côté devient indépendant du paramètre de mesure dans l'autre région de l'espace ; seule subsiste une dépendance par rapport au paramètre local. Chaque catégorie devient alors l'intersection de deux sous-ensembles : l'un qui caractérise la première partie de la mesure ne dépendant que de $a$, choisi parmi $2 \times 2 = 4$ sous-ensembles possibles (2 pour les deux valeurs possibles de $a$, et 2 pour les deux résultats possibles) ; l'autre qui caractérise la seconde partie de la mesure dépendant de $b$ seulement, choisi également parmi 4 possibilités. Pour finir, dans ce cas le nombre total de catégories n'est plus que $2^4$. A chaque catégorie on peut alors associer quatre nombres $A$, $A'$, $B$ et $B'$ qui sont bien définis et valent tous $\pm 1$, et former la combinaison (IV-7), qui ne peut valoir que $\pm 2$ ; les inégalités BCHSH en découlent alors immédiatement. En d'autres termes, Wigner fait remarquer que l'origine mathématique des inégalités de Bell tient à la possibilité de distribuer les paires avec des probabilités positives dans un nombre de catégories[5] plus faible que dans un raisonnement non local ; ainsi la différence entre $4^4$ et $2^4$ est l'origine de la contradiction.

### A-4. Contenu logique

La Figure IV.6 résume les deux lignes parallèles de raisonnement qui mènent à des conclusions contradictoires, la première en suivant le réalisme local, la seconde en considérant que les prédictions de la mécanique quantique sont correctes.

Une façon générale d'énoncer le théorème de Bell en termes logiques est de dire que l'ensemble des trois hypothèses[6] suivantes (que l'on pourrait appeler hypothèses EPR) est auto-contradictoire :

(1) Validité de la notion EPR d'éléments de réalité

(2) Localité (§ C-3 du Chapitre III))

(3) Les prédictions de la mécanique quantique sont toujours correctes.

Effectivement, si l'on part des deux premières hypothèses, on peut arriver à des situations où la troisième est réfutée, d'où une auto-contradiction. Vu de cette façon, le théorème de Bell apparaît comme un outil permettant de construire un raisonnement par l'absurde ; il montre que, parmi les trois hypothèses, une au moins doit être abandonnée. Si le but d'Einstein était de partir du réalisme local et, de plus, de supposer que toutes les prédictions

[5] Il a également été remarqué [139] que les inégalités de Bell sont des applications de théorèmes généraux concernant les distributions marginales en théorie des probabilités [140] ; la preuve mathématique des inégalités suppose l'existence d'un espace des probabilités commun aux variables aléatoires qui sont prises en compte (mesurées) dans le raisonnement (on trouve là un lien avec la notion de contrafactualité).

[6] Pour le moment nous ne discutons qu'un seul groupe d'hypothèses logiques conduisant au théorème, celles que nous avons utilisées plus haut. Il en existe cependant d'autres qui permettent également de démontrer le théorème – voir § B-1.

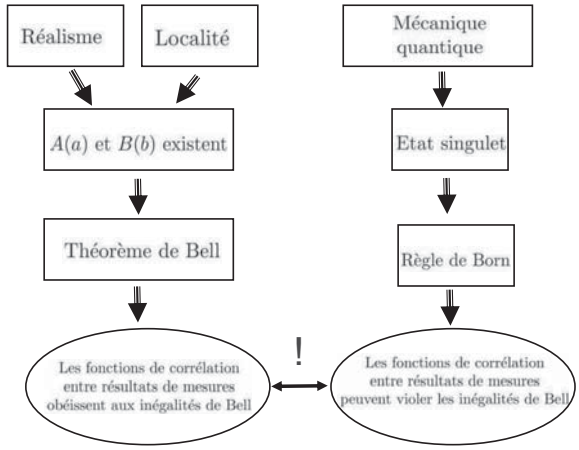


FIGURE *IV.6 – Deux raisonnements parallèles distincts, partant d'hypothèses différentes, arrivent à des conclusions contradictoires : le réalisme local implique que les inégalités de Bell devraient toujours être satisfaites, alors que la mécanique quantique prédit qu'elles peuvent être violées. En conséquence, parmi les trois hypothèses (réalisme EPR, localité, les prédictions de la mécanique quantique pour un état de spin singulet sont correctes) il faut nécessairement en abandonner une.*

de la mécanique quantique sont correctes, le théorème de Bell montre que ce programme est impossible à réaliser – la conclusion est purement logique, indépendante de toute vérification expérimentale.

On peut remarquer qu'il existe une quatrième hypothèse cachée dans le raisonnement :

(4) Les paramètres de mesure $a$ et $b$ sont des variables qui sont choisies de façon totalement libre par les expérimentateurs[7] ; ce ne sont pas les conséquences physiques d'un événement du passé qui les détermine.

C'est l'hypothèse du "libre arbitre". Elle est tellement générale dans toutes les sciences expérimentales que, bien souvent, on ne la mentionne même pas : on suppose tout naturellement que les expérimentateurs sont libres de décider de la nature des expériences qu'ils vont réaliser et de leurs paramètres. L'inverse serait de considérer que leur décision est prédéterminée par un évé-

[7]On peut même supposer qu'ils puissent choisir leurs valeurs après l'émission des deux particules par la source, tandis qu'elles sont en chemin vers leurs laboratoires respectifs.

nement passé inconnu dont les conséquences se sont propagées jusqu'aux deux expérimentateurs (voir la discussion du § C-1-c sur le fatalisme et le superdéterminisme.). C'est la notion même de variable libre d'une théorie qui est en jeu : les paramètres de mesure $a$ et $b$ sont considérés comme des variables libres externes à la théorie, et non comme les conséquences d'un événement passé dont les influences se seraient propagées jusqu'aux deux laboratoires en obéissant à une équation dynamique de la théorie.

Enoncé de cette façon, le théorème de Bell est conceptuellement très général, mais bien évidemment impossible à vérifier expérimentalement du fait de la trop grande généralité de l'hypothèse 3. On peut alors préférer une autre forme d'auto-contradiction logique, où cette hypothèse est remplacée par deux autres qui sont plus particulières, ne concernant qu'une expérience donnée (par exemple : deux spins 1/2 dans un état singulet, ou deux photons émis dans une cascade atomique 0-1-0) :

(3') Dans cette expérience, les prédictions de la mécanique quantique concernant les corrélations parfaites qui sont observées avec les mêmes paramètres d'expériences ($a = b$) sont correctes (c'est cette hypothèse qui mène à l'existence des éléments de réalité EPR).

(3") Les prédictions concernant les corrélations pour des paramètres différents sont également correctes.

Retirer soit (3'), soit (3"), de l'ensemble des hypothèses est suffisant pour supprimer l'auto-contradiction. La motivation des expériences qui ont testé les inégalités de Bell était précisément de vérifier si ce n'était pas l'hypothèse (3") qui devrait être abandonnée. Peut-être, après tout, que le théorème de Bell n'est autre qu'un indicateur très efficace pour pointer du doigt les rares situations où les prédictions de la mécanique quantique deviennent tellement paradoxales qu'elles sont en fait fausses ? C'était l'espoir d'un certain nombre de théoriciens, et en même temps un défi à relever pour les expérimentateurs.

La référence [141] contient une discussion claire du contenu logique de l'argument EPR et du théorème de Bell ainsi que de leurs relations avec le réalisme, la localité, et la séparablité.

### A-5. Contradiction avec les expériences

Dans une expérience, il est évidemment impossible de mesurer à la fois l'ensemble des 4 résultats correspondant à $A$, $A'$, $B$, $B'$ ; pour chaque réalisation de l'expérience, il faut faire un choix pour les paramètres de mesure d'Alice et Bob, de sorte que seuls deux de ces résultats seront enregistrés. Mais, si deux réalisations successives sont faites, n'est-il pas possible d'obtenir plus d'information ? Le problème est que, même si l'on sélectionne deux réalisations pour lesquelles les valeurs de $A$ sont restées les mêmes, rien ne garantit que les valeurs de $B$ et $B'$ restent identiques (puisque chacune n'est mesurée qu'une seule fois). De façon générale, il est impossible d'associer ces

4 nombres à chaque réalisation de l'expérience – voir les citations de Peres et de Wheeler dans le § A-3 (ii). L'expression (IV-7) est donc inaccessible en mécanique quantique.

On peut néanmoins avoir accès à des valeurs moyennes. La première étape est d'effectuer un choix donné des paramètres de mesure, de réaliser une série arbitrairement longue de mesures pour ce choix, et d'enregistrer les résultats. On calcule alors pour chaque réalisation le produit des deux résultats, puis la valeur moyenne de ce produit sur toutes les réalisations ; ceci fournit $\langle \Pi(a,b) \rangle$ par exemple. Puis, répétant l'expérience pour les 3 autres choix possibles des paramètres de mesure, on obtient d'autres séries de résultats, à partir desquels on peut déduire les valeurs moyennes $\langle \Pi(a,b') \rangle$, $\langle \Pi(a',b) \rangle$ et $\langle \Pi(a',b') \rangle$. Enfin, par somme et différence comme dans (IV-11), on calcule la valeur moyenne $\langle M \rangle$ ; on peut alors vérifier si cette valeur moyenne obéit ou non à l'inégalité (IV-9).

En 1967, une expérience fut réalisée par Kocher et Commins [142] avec des photons émis lors d'une cascade atomique entre trois niveaux du Mercure ayant des moments angulaires $J = 0 \to 1 \to 0$. Dans ce cas, la mécanique quantique prédit des corrélations qui sont semblables à celles pour deux spins $1/2$ dans un état singulet ; les directions des analyseurs de polarisation de photons jouent le rôle des orientations des analyseurs de Stern et Gerlach pour des spins $1/2$ (il faut juste diviser les angles par deux pour passer du cas des spins à celui des photons). Cette expérience a permis de vérifier que les prédictions de la mécanique quantique sont parfaitement correctes quand les analyseurs sont parallèles (ou perpendiculaires), donc dans les cas de corrélations parfaites – en d'autres termes, l'hypothèse (3') fut testée avec succès pour cette expérience.

Deux ans plus tard, Clauser, Horne, Shimony et Holt [135] firent remarquer que ce type d'expérience peut parfaitement être généralisé afin de fournir un test de l'hypothèse plus générale (3"), en faisant des mesures des taux de corrélation pour des angles variés des analyseurs. Ils proposèrent alors une généralisation du théorème de Bell sous une nouvelle forme (l'inégalité BCHSH, déjà discutée plus haut) plus appropriée à des tests expérimentaux que l'inégalité originale de Bell. Dans cette ligne, en 1972 des corrélations pour des angles différents (et donc l'hypothèse 3") furent testées par Freedman et Clauser [143], dans une cascade atomique $J = 0 \to 1 \to 0$ de l'atome de Calcium ; cette expérience fournit une confirmation des prédictions de la mécanique quantique et conduisit à une violation des inégalités du réalisme local par 6 déviations standard. En 1976, trois autres expériences furent réalisées, deux avec des photons émis dans des cascades $J = 1 \to 1 \to 0$ dans le Mercure [144, 145], et une avec des protons [146] ; à nouveau, les prédictions de la mécanique quantique furent pleinement confirmées. La Ref. [147], en particulier son Chapitre 7, rend compte de façon détaillée comment l'évolution des idées, à la fois sur le plan théorique et expérimental, a permis

d'arriver à ces résultats.

Dans les années 80, ils devinrent de plus en plus spectaculaires grâce à une série d'expériences réalisées par Aspect et son groupe, utilisant la même transition du Calcium que dans la Ref. [143]. Une des nouvelles expériences [148] incluait une étude de l'effet de la distance entre les détecteurs et la source sur les corrélations pour les polarisations variées, afin de vérifier que cette distance ne joue aucun rôle (comme le prédit la mécanique quantique). Une autre mit en œuvre des détections à deux canaux de polarisation [149] fournissant réellement des signaux $\pm 1$, alors que dans toutes les expériences précédentes une des deux polarisations était tout simplement absorbée et ne donnait lieu à aucun signal (cette expérience permit d'obtenir une violation par 15 écarts standard !). La troisième mettait en jeu une composante temporelle grâce à un choix aléatoire des polarisations détectées [150] – voir aussi la Ref. [151] pour la description d'expériences mettant en jeu des transitions à deux photons entre deux niveaux du deutérium de moment angulaire nul.

Depuis, les expériences n'ont jamais cessé d'être améliorées. Un grand pas en avant a été l'utilisation d'une source de conversion paramétrique de photons afin d'obtenir une source plus efficace de paires de photons, ce qui a permis d'obtenir une violation par 22 écarts standard [152], ainsi que par des mesures de corrélations sur plus de 10 km. [153], en 2010 de plus de 100 km [154], et en 2017 de plus de 1 200 km [155][8]. Des violations avec quatre photons, équivalentes à celles de deux spins 1 dans un état singulet, ont été observées [157]. En 2015, trois expériences différentes ont obtenu des violations des inégalités de Bell dans des conditions où les "échappatoires" (ou "loopholes", voir § C-1) sont fermées [158–160]. Il n'est hélas pas possible de donner ici une liste complète de références, mais nous aurons l'occasion d'en citer quelques autres lors de notre discussion des échappatoires ; une revue synthétique de l'ensemble des résultats expérimentaux peut être trouvée dans la référence [161].

Pour résumer la situation actuelle, même dans les dispositifs les plus élaborés inventés par les expérimentateurs, pour le moment personne n'a jamais réussi à mettre en défaut la mécanique quantique. En ce sens, nous pouvons dire que la Nature obéit à des lois qui sont, ou non locales, ou non réalistes, ou les deux à la fois. Il va sans dire qu'aucune expérience de physique n'est jamais parfaite, de sorte qu'il est toujours possible d'inventer des scénarios ad hoc où des processus physiques totalement inconnus pour le moment "conspirent" pour donner une illusion de parfaite reproduction de la mécanique quantique – nous reviendrons sur ce point dans le § C-1 – mais le moins qu'on puisse dire est que cette attitude n'est pas très crédible du fait du nombre et de la qualité des expériences qui convergent vers une

[8] En ce qui concerne les effets de la gravité, il a même été montré [156] que les corrélations du type EPR peuvent subsister à des échelles cosmiques.

vérification complète des prédictions de la mécanique quantique.

## B. Diverses démonstrations du théorème

Ce qui est généralement désigné sous le nom de "théorème de Bell" ne se limite pas à une seule inégalité, dont le domaine de validité serait restreint à des circonstances bien précises ; il recouvre en fait toute une série d'inégalités s'appliquant à des cas relativement divers. Nous donnons maintenant quelques exemples d'autres démonstrations qui s'appuient sur des systèmes d'hypothèses variés, et qui élargissent ainsi le domaine d'application du théorème. Au § A du Chapitre V nous introduirons d'autres formes du théorème, c'est-à-dire d'autres inégalités qui découlent du réalisme et de la localité, mais sont également violées par les prédictions de la mécanique quantique.

### B-1. Autres hypothèses de départ

Nous avons donné une démonstration du théorème de Bell qui part d'un groupe possible d'hypothèses permettant de l'établir (§ A-4). La seule condition pour que la démonstration soit possible est en fait l'existence de quatre nombres $A$, $B$, $A'$ et $B'$, tous égaux à $\pm 1$, qui doivent être bien définis mais peuvent être inconnus (de façon équivalente, on peut supposer l'existence d'une distribution de probabilité commune aux résultats des quatre mesures [162]). Il n'est donc pas surprenant que d'autres groupes d'hypothèses puissent également servir de point de départ au raisonnement, ce qui ajoute à la portée du résultat de Bell : une violation des inégalités signifie alors que, dans chacun de tous ces groupes, une des hypothèses au moins doit être rejetée, de sorte que la discussion du § A-4 peut être généralisée. Pour illustrer cette possibilité, nous donnons ici quelques exemples de groupes d'hypothèses possibles ; nous ne mentionnons pas à chaque fois l'hypothèse du "libre arbitre" déjà évoquée (voir aussi § C-1-c), car elle est commune à tous les groupes.

(i) Dans l'introduction de ce chapitre, nous avons déjà mentionné que le théorème de Bell peut être vu comme un théorème s'appliquant spécifiquement aux théories à variables cachées. Dans ce cas, les $\lambda$ proviennent, non du raisonnement EPR et de leur notion de réalisme, mais tout simplement du fait qu'on suppose a priori l'existence de ces $\lambda$. Une fois la démonstration faite, la conclusion du théorème est que, si ces variables évoluent localement, les résultats des mesures doivent satisfaire les inégalités de Bell. Réciproquement, une violation des inégalités signifie, soit que les variables cachées n'existent pas, soit qu'elles évoluent non localement (ou encore que le libre arbitre n'existe pas, en d'autres termes que $a$ et $b$ sont des fonctions d'une composante supplémentaire de $\lambda$). Ce point de vue est moins général que celui que nous avons choisi jusqu'ici, mais aussi plus simple, ce qui explique

probablement pourquoi il est souvent utilisé. Par exemple, dans l'un de ses fameux livres sur la mécanique quantique [58], Jammer introduit le théorème de Bell au cours d'un chapitre consacré spécifiquement aux théories à variables cachées.

Ce n'est cependant pas le point de vue pris par Bell dans son article historique [131], où il introduit clairement son raisonnement comme un prolongement de l'argument EPR. Le titre est "Sur le paradoxe de Einstein Podolsky Rosen" et les premières phrases de l'introduction sont "Le paradoxe d'Einstein, Podolsky et Rosen a été proposé comme un argument selon lequel la mécanique quantique ne pouvait pas être une théorie complète, mais devait être complétée par des variables supplémentaires. Le but de ces variables supplémentaires était de restaurer causalité et localité dans la théorie. Dans cette note *cette idée est formulée mathématiquement* (italiques ajoutées) ; on montre qu'elle est incompatible avec les prédictions statistiques de la mécanique quantique. C'est la contrainte de localité,..., qui crée la difficulté essentielle". En d'autres termes, la variable supplémentaire $\lambda$ qu'il considère n'est pas introduite a priori, en postulant l'existence d'une nouvelle "variable cachée" ; c'est simplement l'objet mathématique qui décrit les éléments de réalité dont EPR ont démontré l'existence. Bell distingue donc clairement entre "variables supplémentaires" et "variables cachées", et continue ensuite en discutant ces dernières dans le cas particulier de la théorie de Bohm : "Il a existé des tentatives pour montrer que, même sans une telle contrainte de séparabilité ou de localité, aucune interprétation à 'variables cachées' de la mécanique quantique n'est possible. Il a été cependant montré que ces tentatives ont échoué. De plus, une interprétation à variables cachées de la théorie quantique élémentaire a été construite explicitement". Le point de vue de Bell est donc sans ambigüité.

(ii) Supposer la contrafactualité est une autre façon de pouvoir démontrer le théorème de Bell : la pré-existence de tous les résultats possibles d'expériences permet d'en déduire les inégalités BCHSH et d'autres inégalités. En effet, dès que les 4 quantités $A$, $A'$, $B$ et $B'$ (toutes égales à $\pm 1$) peuvent être définies pour chaque réalisation de l'expérience, la méthode du § A-2 s'applique immédiatement pour obtenir (IV-9), ce qui conduit à une preuve de l'inégalité. La contrafactualité n'est pas nécessairement reliée à la notion d'espace et à la localité[9], de sorte que ce point de vue fournit effectivement un autre cadre de raisonnement indépendant.

La citation de Peres du § A-3 [136] fournit la conclusion à tirer d'une violation des inégalités, qui est équivalente à la discussion de la fin du § A-2 :

[9]La contrafactualité peut être postulée ab initio, sans aucune référence particulière à la localité. Inversement, si l'on suppose localité et réalisme, alors le raisonnement EPR permet de montrer l'existence d'éléments de réalité qui peuvent jouer le rôle d'éléments contrafactuels. Toutefois il demande de supposer plus que la seule localité, puisqu'il fait aussi intervenir l'hypothèse du réalisme EPR.

une violation des inégalités BCHSH montre qu'il est impossible de trouver deux fonctions $A(a, \lambda)$ et $B(b, \lambda)$ des paramètres de mesure $a$ et $b$ et du numéro de l'expérience qui donnent les valeurs des résultats de mesure.

(iii) Supposer la non-contextualité est encore une autre possibilité pour obtenir les inégalités ; cette question sera discutée plus en détail au § D du Chapitre VI. A nouveau, la non-contextualité peut, si on le désire, être vue comme une conséquence naturelle de la séparation spatiale entre les laboratoires d'Alice et Bob ; mais elle peut aussi être acceptée comme un principe indépendant et même plus général (satisfait par exemple par la physique classique, locale ou non locale).

### B-2. Généralisations du théorème, théories non déterministes

On peut en fait obtenir ainsi le théorème de Bell dans toute une série de contextes logiques en combinant entre elles des hypothèses assez diverses, comme la séparabilité, l'existence de causes communes dans les cônes du passé (causalité relativiste, comme dans la Figure IV.2), etc. Toutes les démonstrations ainsi obtenues sont intéressantes, dans la mesure où elles élargissent la liste des ensembles d'hypothèses qui sont incompatibles avec la mécanique quantique, et donc la portée du théorème. Nous en présentons maintenant quelques-unes.

#### B-2-a. Généralisations simples, rôle de la localité

Une première généralisation simple du théorème de Bell est de supposer que les résultats des expériences deviennent une fonction de plusieurs causes fluctuantes : celles se produisant dans la source, celles se produisant dans les appareils de mesure [163], ou encore des perturbations agissant sur les particules durant leur vol vers des appareils de mesure. Ces cas sont simples à traiter, puisque de telles situations conduisent juste à ajouter des dimensions supplémentaires à la variable vectorielle $\lambda$, sans changer la démonstration. Le caractère aléatoire des résultats peut donc provenir de nombreuses sources différentes, sans modifier la conclusion du théorème.

On peut donc s'attendre à ce que des processus, même fondamentalement non déterministes, puissent être pris en compte dans la démonstration du théorème. Effectivement, le théorème de Bell reste valable [123, 164] dans un cadre de non-déterminisme local, donc dans des situations telles que celle illustrée par la Figure IV.7 où des processus aléatoires indépendants se produisent dans deux régions éloignées de l'espace. Il faut alors remplacer les fonctions déterministes $A$ et $B$ par des probabilités, mais cela ne pose pas de problème particulier [133] (voir également la note 10 en bas de page dans [163] et l'Appendice B). Nous revenons plus en détail sur les théories non déterministes au § B-2-b, en particulier pour analyser l'origine de la factorisation des

probabilités ; voir aussi la discussion des boîtes stochastiques aux §§ D-2-b et D-2-c du Chapitre V.

De façon générale, il faut bien comprendre que le rôle des fonctions $A$ et $B$ ne se limite pas à une classe particulière de théories. Ce rôle est seulement de relier les conditions de production d'une paire de particules (ou de leur propagation) à leur comportement lorsqu'elles atteignent les appareils de mesure, ainsi qu'aux effets qu'elles produisent en interagissant avec eux. Ces fonctions sont, en quelque sorte, des solutions des équations du mouvement, quelles que soient ces équations. Elles peuvent donc parfaitement inclure, dans une notation condensée, une grande variété de phénomènes physiques : propagation de particules ponctuelles, propagation d'un ou plusieurs champs depuis la source jusqu'aux détecteurs (voir par exemple la discussion du § 4 de [95]), particules et champs en interaction, ou n'importe quel autre processus imaginable (même des propagations aléatoires peuvent être prises en compte) – la seule condition est que ces phénomènes ne doivent pas dépendre de l'autre paramètre de mesure. La forme mathématique de ces équations de propagation est sans importance ; l'essentiel est seulement que ces fonctions existent, même si elles sont bien trop compliquées pour être écrites explicitement.

La localité, exprimée mathématiquement dans une dépendance en fonction des paramètres de mesure $a$ et $b$, est donc l'ingrédient le plus essentiel de la démonstration du théorème de Bell (dès lors que l'existence des $\lambda$ est acceptée) : il faut impérativement que la fonction $A$ dépende de $a$ seulement, alors que la fonction $B$ dépend seulement de $b$. Par exemple, si nous le souhaitons, nous pourrions supposer que le résultat $A$ d'une mesure est également une fonction des variables aléatoires attachées à l'autre appareil de mesure, ce qui introduit évidemment un processus non local ; mais cela n'invaliderait en rien la démonstration du théorème tant que ces variables restent indépendantes du paramètre $b$. En revanche, si $A$ devient une fonction de $a$ et $b$ (et/ou de même pour $B$), on voit immédiatement que la situation est radicalement changée : dans le raisonnement du § A-2 nous devons maintenant associer 8 nombres à chaque paire de particules (puisqu'il y a deux résultats à spécifier pour 4 différentes combinaisons possibles des paramètres), au lieu de 4, de sorte que la preuve devient impossible. L'Appendice C donne une autre illustration concrète du fait que c'est la localité, et non le déterminisme, qui est en jeu dans le théorème ; voir également l'Appendice de [133].

#### B-2-b. Propagation spatiale de la causalité, corrélations localement explicables

D'autres démonstrations du théorème mettent plus l'accent sur la propagation des influences et ses conséquences sur les corrélations. Cette idée peut être prise comme une définition de la localité : selon Bell (tel que cité dans [165]), “La localité est l'idée que les conséquences se propagent de fa-

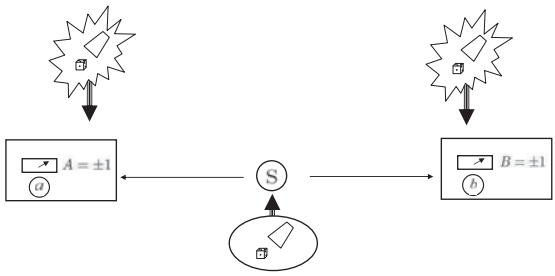


FIGURE *IV.7 – Schéma d'une théorie fondamentalement non déterministe mais locale. Comme dans les figures précédentes, les zigzags au-dessus des événements symbolisent des processus fondamentalement indéterministes, par opposition aux ovales en dessous qui représentent des événements stochastiques compatibles avec un cadre déterministe (effet de perturbations locales incontrôlées). De fait, pour la présente discussion, la nature du processus au centre de la figure, fondamentalement indéterministe ou pas, importe peu tant que le processus reste local ; on peut donc remplacer l'ovale central déterministe par un zigzag stochastique au-dessus de la source et n'agissant que sur elle, sans changer les résultats. Ce schéma peut être comparé avec celui de la Figure IV.5 correspondant à la mécanique quantique, où le processus aléatoire est délocalisé dans l'espace. Une théorie de ce type non déterministe, mais locale, conduit à des prédictions qui obéissent nécessairement aux égalités de Bell.*

çon continue, qu'elles n'effectuent pas de sauts dans l'espace". Une autre hypothèse découle de la relativité : cette propagation ne peut pas se faire à une vitesse dépassant celle de la lumière (elle a lieu à l'intérieur du cône de lumière du futur) ; on crée ainsi un lien plus étroit entre théorème de Bell et relativité. Nous discutons maintenant les conséquences de cette notion de localité relativiste sur les prédictions possibles des théories, qu'elles soient déterministes ou non. Nous suivrons de près l'analyse de Bell dans son fameux article "La nouvelle cuisine" [166] – voir également [167] et Norsen [165].

Considérons les événements se produisant dans une région donnée de l'espace-temps $R$, comme représenté sur la Figure IV.8 ; l'axe horizontal représente l'espace (symbolisé ici par une seule dimension le long d'un axe $Ox$) et l'axe vertical le temps (multiplé par la vitesse de la lumière $c$). Les causes de tous ces événements ne peuvent se trouver que dans le cône de lumière du passé de la région $R$ ainsi que, si un expérimentateur fait une expérience dans cette région, du choix qu'il peut faire pour le paramètre de mesure $a$ de ses expériences (hypothèse du "libre choix", § C-1-c). Introduisons maintenant une région $C$ d'espace-temps qui couvre toute une tranche du cône du passé de la région $R$, comme le montre la figure. Si les influences se propagent de façon continue, pour atteindre $R$ en venant de loin dans le passé, elles doivent croiser $C$ ; ainsi, pour rendre compte de l'effet de toutes les causes lointaines dans le passé, il est suffisant de spécifier toutes les causes se produisant dans $C$. En d'autres termes, cette spécification "écrante" la région $R$ de toutes les causes plus lointaines dans le passé ; elle rend redondante toute information sur ces causes par comparaison avec celles déjà contenues dans $C$ (autrement dit : la connaissance de causes plus lointaines du passé fournissant des informations superflues).

### $\alpha$. *Variables et "existables"*

Il est utile à ce stade de préciser quels types de causes doivent être pris en compte dans notre raisonnement. Il est clair que n'importe quel objet mathématique qui apparaît dans une équation physique ne convient pas pour caractériser une cause. En électromagnétisme classique par exemple, il est connu que le potentiel de Coulomb ne se propage pas dans l'espace, mais dépend de la position instantanée de toutes les charges ; ceci n'est pas contradictoire avec la relativité car les effets instantanés du potentiel sont compensés par d'autres effets du potentiel vecteur ; les "véritables" champs électromagnétiques (champ électrique $\mathbf{E}$ et magnétique $\mathbf{B}$) se propagent bien à la vitesse finie $c$. Ainsi, les équations de la physique peuvent contenir des fonctions mathématiques qui ne sont que des quantités intermédiaires à partir desquelles on peut obtenir des quantités réellement physiques ; ces fonctions ne se propagent pas nécessairement dans l'espace avec une vitesse finie, et jouent juste

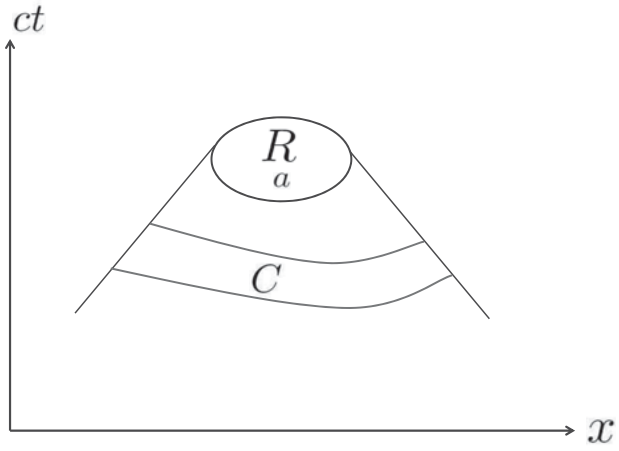


FIGURE *IV.8 – Dans cette représentation d'espace-temps, l'axe horizontal Ox représente l'espace (dans une vue simplifiée à une seule dimension le long de l'axe Ox), l'axe vertical représente le produit ct du temps t par c (la vitesse de la lumière). Nous nous intéressons à tous les événements se produisant dans une région R d'espace-temps ; les causes possibles de ces événements ne peuvent être trouvées que dans le cône de lumière du passé de R, limité sur la figure par deux lignes inclinées de pente* $\pm 1$*. Si un physicien fait une expérience dans R et choisit librement un paramètre de mesure a, les résultats qu'il obtient ne peuvent être conséquences que de ce choix ainsi que des causes contenues dans ce cône du passé. De plus, si les conséquences ne se propagent que de façon continue (définition de Bell de la localité), les effets de toutes ces causes sur R sont contenus dans les événements se produisant dans la région C, qui "écrante" R de toutes les causes plus lointaines dans le passé (rend leur connaissance redondante avec celle du contenu de C).*

le rôle de variables commodes[10]. Par opposition avec ces variables, Bell introduit [166] ce qu'il appelle "beables", et que nous traduirons par "existables", jeu de mots construit à partir du début du mot "exister" et de la fin du mot "variable". Elles sont définies par : "les *exist*ables de la théorie sont ces entités de cette théorie qui sont, au moins putativement, à prendre au sérieux, comme correspondant à quelque chose de réel". Dans [167], il oppose exis-

[10]"Des conventions peuvent se propager aussi vite qu'il se trouve que cela est pratique. Mais alors nous devons distinguer dans notre théorie ce qui est convention et ce qui ne l'est pas" [166].

tables à observables en écrivant : "Le concept d'observable est plutôt diffus. Il n'est pas facile d'identifier précisément quel processus physique doit recevoir le statut d'observation, et quel processus doit être relégué dans les limbes entre une observation et une autre. On peut donc espérer qu'une amélioration de la précision devienne possible si l'on se concentre sur les *exist*ables... parce qu'elles sont bien là".

Parmi les existables, certaines sont locales [166] : "Les existables locales sont celles qui sont sans nul doute associées à des régions d'espace-temps" ; le champ électrique **E** et le champ magnétique **B** (ou leurs intégrales dans des régions finies de l'espace) sont des existables de ce type. Dans tout ce qui précède, il faut comprendre par causes contenues dans un cône de lumière (ou une région d'espace-temps $C$) l'ensemble de toutes les existables contenues dans le cône (ou $C$).

### *β. Théories localement causales*

A ce stade, Bell introduit [166] un "principe de causalité locale", semblable à la causalité relativiste, qui s'applique aussi bien aux théories déterministes que stochastiques : "Une théorie est dite localament causale si les probabilités attachées aux existables locales dans une région d'espace-temps 1 ne sont pas fonction des valeurs d'existables locales dans une autre région 2 d'espace-temps séparée de la première par un intervalle du genre espace, à condition que ce qui se produit dans le cône du passé de 1 soit déjà suffisamment spécifié". Selon ce principe, un événement aléatoire se produisant dans la région $R$ peut être influencé par toutes sortes de causes dans le passé (causalité relativiste), mais tous leurs effets sont contenus dans la donnée des valeurs existables locales contenues dans $C$, pour lesquelles nous utilisons la notation raccourcie $\lambda$ (qui peut résumer un nombre arbitraire de composantes $\lambda_1$, $\lambda_2$,..., $\lambda_N$,...). Ces existables peuvent être de nature très variée, et par exemple inclure celles associées à l'appareil de mesure, ce dernier étant un système macroscopique avec de très nombreux degrés de liberté qui ne peuvent être connus que de façon statistique. Elles peuvent également être influencées par des événements lointains, comme un processus d'émission de particules, à condition qu'ils soient contenus dans le cône du passé de $R$. Enfin, la probabilité peut aussi dépendre de choix locaux faits par l'expérimentateur (le paramètre de mesure $a$). Le principe de causalité locale dit que la donnée de toutes les variables associées à ces causes possibles est suffisante pour déterminer la probabilité : une fois qu'elles sont spécifiées, il n'est pas nécessaire d'ajouter quoi que ce soit, en particulier concernant des événements se produisant hors du cône du passé de $R$.

Dans ces conditions, la probabilité $\mathcal{P}$ d'obtenir le résultat de mesure $A$ est une fonction de $\lambda$ et du choix du paramètre de mesure $a$ par l'expérimen-

tateur, mais de rien d'autre. Nous notons :

$$\mathcal{P}\left(A \mid a, \lambda\right) \tag{IV-12}$$

la probabilité conditionnelle d'obtenir le résultat $A$ si la valeur $a$ a été choisie et si les existables dans $C$ prennent la valeur $\lambda$. La localité, comme définie ci-dessus, interdit que $\mathcal{P}$ puisse dépendre d'autres variables (valeurs d'existables attachées à des régions d'espace-temps qui n'appartiennent pas au cône du passé de $R$).

Nous avons alors la combinaison de deux processus aléatoires : la sélection d'une valeur de $\lambda$, et le processus fondamentalement aléatoire qui fournit $A$ une fois que $\lambda$ est déterminé ; nous notons $\mathcal{P}\left(A, \lambda \mid a\right)$ la probabilité de ce double événement, pour un choix donné de la valeur du paramètre de mesure $a$. La probabilité $\mathcal{P}\left(A \mid a\right)$ d'obtenir le résultat $A$, quelle que soit la valeur de $\lambda$, est alors la somme des probabilités d'événements exclusifs :

$$\mathcal{P}\left(A \mid a\right) = \int d\lambda \; \mathcal{P}\left(A, \lambda \mid a\right) \tag{IV-13}$$

(la somme sur $d\lambda$ symbolise une intégrale à plusieurs dimensions, et couvrant toutes les valeurs possibles de $\lambda$). Or la loi des probabilités conditionnelles (loi de Bayes) indique que :

$$\mathcal{P}\left(A, \lambda \mid a\right) = \mathcal{P}\left(A \mid a, \lambda\right) \mathcal{P}\left(\lambda \mid a\right) \tag{IV-14}$$

où $\mathcal{P}\left(\lambda \mid a\right)$ est la probabilité que les existables de $C$ prennent la valeur $\lambda$ lorsque la valeur $a$ a été choisie par l'expérimentateur. Mais nous avons supposé que celle-ci résulte d'un choix par libre arbitre (§ C-1-c) effectué dans le futur de la region $C$, de sorte que $\lambda$ ne peut pas dépendre de $a$. Nous avons donc :

$$\mathcal{P}\left(\lambda \mid a\right) = \rho\left(\lambda\right) \tag{IV-15}$$

où $\rho\left(\lambda\right)$ est la distribution de $\lambda$, avec :

$$\rho\left(\lambda\right) \geq 0 \quad ; \quad \int d\lambda \; \rho\left(\lambda\right) = 1 \tag{IV-16}$$

La moyenne du résultat obtenu dans un grand nombre de réalisations de l'expérience avec le paramètre de mesure $a$ est alors :

$$\langle A \rangle = \sum_{A} A \; \mathcal{P}\left(A \mid a\right) \tag{IV-17}$$

ou encore, si nous insérons (IV-14) et (IV-15) dans (IV-13) :

$$\langle A \rangle = \int d\lambda \; \rho\left(\lambda\right) \sum_{A} A \; \mathcal{P}\left(A \mid a, \lambda\right) \tag{IV-18}$$

A partir de maintenant nous supposons que $A$ ne peut prendre que deux valeurs $\pm 1$. La somme des deux probabilités $\mathcal{P}(A = \pm 1 \mid a, \lambda)$ est alors 1, et il est pratique de les caractériser toutes deux par une seule fonction $X(A; a, \lambda)$ grâce à la relation :

$$\mathcal{P}(A = \pm 1 \mid a, \lambda) = \frac{1}{2}\left[1 \pm X(A; a, \lambda)\right] \tag{IV-19}$$

avec :

$$-1 \leq X(A; a, \lambda) \leq +1 \tag{IV-20}$$

l'équation (IV-17) se simplifie alors en :

$$\langle A \rangle = \int d\lambda \; \rho(\lambda) \;\; X(A; a, \lambda) \tag{IV-21}$$

*γ. Mesures en deux régions éloignées, conséquences de la localité*

Nous appliquons maintenant l'analyse précédente à une expérience de Bell : dans deux régions de l'espace-temps $R_1$ et $R_2$ séparées par un grand intervalle du genre espace (Fig. IV.9), deux expériences sont effectuées sur deux systèmes quantiques provenant d'une source commune. L'émission de ces systèmes quantiques a eu lieu loin dans le passé, dans une région d'espace-temps $S$ qui appartient au recouvrement entre les deux cônes du passé de $R_1$ et $R_2$. Dans chacune de ces régions, un expérimentateur choisit librement une valeur pour son paramètre de mesure, $a$ pour le premier, $b$ pour le second (par exemple la direction d'orientation d'un aimant de Stern et Gerlach). Dans les cônes du passé de $R_1$ et $R_2$, nous considérons deux régions intermédiaires d'espace-temps $C_1$ et $C_2$, choisies de façon que $C_1$ se trouve hors du cône du passé de $R_2$, et inversement $C_2$ hors du cône du passé de $R_1$. Nous utilisons la notation raccourcie $\lambda_1$ pour toutes les existables contenues dans $C_1$ (y compris, si nécessaire, celles associées avec une description statistique de l'appareil de mesure situé dans $R_1$), et $\lambda_2$ pour toutes les existables contenues dans $C_2$.

Nous pouvons alors directement appliquer l'analyse qui a été faite ci-dessus : la probabilité d'obtenir le résultat $A$ dans la région $R_1$ est $\mathcal{P}(A \mid a, \lambda_1)$, qui a la même forme que (IV-12), complètement indépendante des événements se produisant dans $R_2$ ; de même, la probabilité du résultat $B$ fourni par la mesure réalisée dans la région $R_2$ est $\mathcal{P}(B \mid b, \lambda_2)$, complètement indépendante des événements se produisant dans $R_1$. La probabilité de ces deux événements indépendants est alors le produit :

$$\mathcal{P}(A, B \mid a, b, \lambda_1, \lambda_2) = \mathcal{P}(A \mid a, \lambda_1)\, \mathcal{P}(B \mid b, \lambda_2) \tag{IV-22}$$

Une importante conséquence de la localité, comme définie ci-dessus, est donc que la probabilité se factorise pour des valeurs données de $\lambda_1$ et $\lambda_2$ (ce qui,

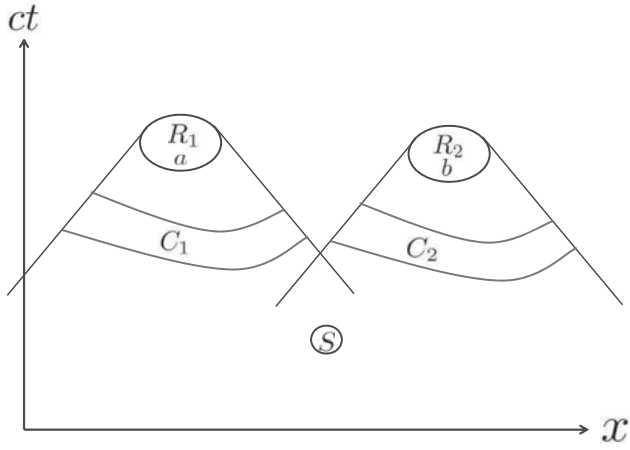


FIGURE *IV.9 – Deux systèmes quantiques sont émis au cours d'un processus se produisant dans une région d'espace-temps S, se propagent dans l'espace et le temps depuis leur source, et sont alors soumis à deux mesures dans deux régions de l'espace-temps* $R_1$ *et* $R_2$ *; ces deux régions sont séparées par un grand intervalle du genre espace. Dans chacune de ces deux régions, un expérimentateur choisit librement un paramètre de mesure, a dans* $R_1$ *et b dans* $R_2$*. Nous introduisons deux régions d'espace-temps intermédiaires* $C_1$ *et* $C_2$*, choisies de sorte que* $C_1$ *contienne toutes les informations concernant des influences pouvant agir sur les existables locales de* $R_1$*, tout en restant hors du cône du passé de* $R_2$ *(inversement,* $C_2$ *contient toute l'information concernant les influences pouvant agir sur les existables locales dans* $R_2$*, mais reste hors du cône du passé de* $R_1$*). L'ensemble des existables contenues dans* $C_1$ *(y compris celles associées à l'appareil de mesure) est noté* $\lambda_1$*, celui des existables contenues dans* $C_2$ *est noté* $\lambda_2$*.*

bien sûr, n'interdit pas les corrélations entre les résultats $A$ et $B$ lorsque $\lambda_1$ et $\lambda_2$ fluctuent de façon corrélée).

Comme dans (IV-15), le libre choix des paramètres $a$ et $b$ nous permet d'écrire :

$$\mathcal{P}(\lambda_1, \lambda_2 \mid a, b) = \rho(\lambda_1, \lambda_2) \tag{IV-23}$$

où $\rho(\lambda_1, \lambda_2)$ est la distribution des valeurs $\lambda_1$ et $\lambda_2$ des existables sur un grand nombre de réalisations de l'expérience. Nous avons :

$$\rho(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0 \quad ; \quad \int d\lambda_1 \, d\lambda_2 \, \rho(\lambda_1, \lambda_2) = 1 \tag{IV-24}$$

La probabilité $\mathcal{P}(A, B \mid a, b)$ d'obtenir les résultats $A$ et $B$ lorsque les paramètres $a$ et $b$ ont été choisis est, d'après la loi des probabilités conditionnelles :

$$\mathcal{P}(A, B \mid a, b) = \int d\lambda_1 \; d\lambda_2 \; \mathcal{P}(A \mid a, \lambda_1)\, \mathcal{P}(B \mid b, \lambda_2) \;\; \rho(\lambda_1, \lambda_2) \qquad \text{(IV-25)}$$

Lorsque les résultats ne prennent que les deux valeurs $\pm 1$, il est pratique d'introduire deux fonctions $X(A; a, \lambda_1)$ caractérisant les probabilités selon :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A = \pm 1 \mid a, \lambda_1) &= \frac{1}{2}\left[1 \pm X(a, \lambda_1)\right] \qquad && -1 \leq X(a, \lambda_1) \leq +1 \\ \mathcal{P}(B = \pm 1 \mid b, \lambda_2) &= \frac{1}{2}\left[1 \pm Y(b, \lambda_2)\right] \qquad && -1 \leq Y(a, \lambda_1) \leq +1 \end{aligned} \qquad \text{(IV-26)}$$

La moyenne sur un grand nombre de réalisations du produit des résultats s'écrit alors :

$$\langle AB \rangle = \int d\lambda_1 \; d\lambda_2 \; \rho(\lambda_1, \lambda_2) \;\; X(A; a, \lambda_1)\, Y(B; b, \lambda_2) \qquad \text{(IV-27)}$$

Nous obtenons donc ici aussi une factorisation des dépendances en $a$ et $b$ de la fonction sous l'intégrale, ce qui est l'élément clé de la démonstration de l'inégalité BCHSH.

### *δ. Démonstration de l'inégalité BCHSH*

Nous supposons maintenant que l'expérience réalisée en $R$ est faite pour deux choix différents $a$ et $a'$ du paramètre de mesure ; de même, deux valeurs différentes $b$ et $b'$ sont possibles pour l'expérience en $R_2$. De façon analogue à ce que nous avons posé en (IV-5) et (IV-6), nous utilisons la notation condensée :

$$\begin{aligned} X(\lambda_1) &\equiv X(a, \lambda_1) \qquad & X'(\lambda_1) &\equiv X\left(a', \lambda_1\right) \\ Y(\lambda_2) &\equiv Y(b, \lambda_2) \qquad & Y'(\lambda_2) &\equiv Y\left(b', \lambda_2\right) \end{aligned} \qquad \text{(IV-28)}$$

La combinaison de moyennes qui intervient dans l'inégalité BCHSH est :

$$\begin{aligned} \langle M \rangle &= \langle XY \rangle - \left\langle XY' \right\rangle + \left\langle X'Y \right\rangle + \left\langle X'Y' \right\rangle \\ &= \int d\lambda_1 \; d\lambda_2 \; \rho(\lambda_1, \lambda_2) \;\; F(\lambda_1, \lambda_2) \end{aligned} \qquad \text{(IV-29)}$$

avec :

$$\begin{aligned} F(\lambda_1, \lambda_2) &= X(\lambda_1)\, Y(\lambda_2) - X(\lambda_1)\, Y'(\lambda_2) \\ &\qquad + X'(\lambda_1)\, Y(\lambda_2) + X'(\lambda_1)\, Y'(\lambda_2) \\ &= X(\lambda_1)\left[Y(\lambda_2) - Y'(\lambda_2)\right] + X'(\lambda_1)\left[Y(\lambda_2) + Y'(\lambda_2)\right] \end{aligned} \qquad \text{(IV-30)}$$

La fonction $F$, moyennée sur toutes les valeurs possibles de $\lambda_1$ et $\lambda_2$, joue un rôle semblable à la fonction $M$ définie par la relation (IV-7) du § A-2. Il existe toutefois une différence : les résultats $A = \pm 1$ et $B = \pm 1$ qui figurent dans (IV-7) sont remplacés ici par des différences de probabilités $X$ et $Y$, qui sont des nombres réels compris entre les limites $-1$ et $+1$, mais qui en général ne leur sont pas égaux. Montrons cependant que, tandis que $M$ est toujours égal à $\pm 2$, la fonction $F$ satisfait à la condition plus faible :

$$-2 \leq F(\lambda_1, \lambda_2) \leq +2 \tag{IV-31}$$

Pour établir ce résultat, commençons pas supposer que chacune des 4 variables $X$, $X'$, $Y$ et $Y'$ prend l'une de ses valeurs extrémales $\pm 1$. Alors l'un des deux crochets $[Y(\lambda_2) \pm Y'(\lambda_2)]$ de la seconde ligne de (IV-30) s'annule, de sorte que $F$ est égal à $\pm 2$ – c'est vrai pour les 16 combinaisons possibles des valeurs extrêmes des variables. Puis, tout en maintenant les autres variables à leurs valeurs constantes, mettons $X$ à une valeur intermédiaire quelconque comprise entre $-1$ et $+1$ ; ce changement modifie $F$ par interpolation linéaire entre deux valeurs $\pm 2$, de sorte que le résultat est nécessairement lui aussi compris entre $-2$ et $+2$ – en fait, on obtient ainsi 8 résultats associés aux 8 combinaisons possibles des valeurs des 3 autres variables $X'$, $Y$ et $Y'$. Donnons maintenant à $X'$ une valeur quelconque comprise entre $-2$ et $+2$ ; une seconde interpolation s'ensuit et, à nouveau, des valeurs de $F$ entre $-2$ et $+2$ sont obtenues (elles sont au nombre de 4, correspondant aux 4 combinaisons pour les variables restantes $Y$ et $Y'$). De la même manière, deux étapes supplémentaires du raisonnement pour fixer $Y$ et $Y'$ permettent de voir que, à la fin, $F$ reste toujours compris entre les valeurs $-2$ et $+2$, quelles que soient les valeurs intermédiaires des 4 variables.

L'équation (IV-29) définit alors $\langle M \rangle$ comme la moyenne, avec une fonction de pondération normalisée et positive $\rho(\lambda_1, \lambda_2)$, d'une fonction qui est comprise entre $-2$ et $+2$ ; nous avons donc :

$$-2 \leq \langle M \rangle \leq +2 \tag{IV-32}$$

qui n'est autre que l'inégalité BCHSH pour des processus stochastiques.

### $\epsilon$. *Discussion*

Trois classes de théories non déterministes jouent un rôle dans ces considérations :

- Les théories où les probabilités des événements se produisant en des points différents de l'espace sont indépendantes l'une de l'autre, et de tout événement antérieur. De telles théories ne prédisent aucune corrélation, ce qui limite leur intérêt.

- Les théories où les probabilités d'événements se produisant en des points éloignés sont toujours indépendantes, mais où elles peuvent dépendre d'autres événements qui se sont produits dans leur cône du passé (causalité relativiste) ; des influences peuvent se propager depuis le passé et créer toutes sortes de corrélations, mais la composante fondamentalement aléatoire de la théorie reste locale.

- Les théories où les probabilités d'événements se produisant en des points quelconques de l'espace sont toutes interdépendentes. Lorsque ces événements se produisent, un processus aléatoire indivisible se produit qui les englobe tous simultanément, et qui est délocalisé dans l'espace.

La démonstration que nous avons donnée de l'inégalité BCHSH s'applique à la seconde catégorie de théories. L'idée de base est alors que des processus fondamentalement aléatoires se produisent dans la Nature, mais que de tels processus doivent rester des événements d'espace-temps : leurs probabilités peuvent certes être affectées par des influences qui se propagent à partir d'autres événements dans le cône du passé, mais le processus stochastique fondamental reste local.

Inversement, une violation des inégalités BCHSH au sein d'une théorie stochastique signifie qu'elle appartient à la troisième catégorie (c'est le cas de la mécanique quantique) : les processus aléatoires y sont fondamentalement non locaux. Chacun d'eux couvre une région de l'espace-temps arbitrairement grande ; il ne peut pas être décomposé en événements relativistes (cette impossibilité est bien dans l'esprit de la position de Bohr, comme discuté aux §§ C-1 du Chapitre V et A-1 du Chapitre VII ; voir également la citation extraite de sa conférence Nobel de 1933, note 17 page 67). En d'autres termes, une violation indique l'existence d'un hasard non local, qui émerge sans localisation précise[11] ; comme l'écrit Gisin [170] : "ces corrélations non locales semblent, en quelque sorte, surgir de l'extérieur de l'espace-temps !".

D'autres démonstrations similaires de l'inégalité dans le cadre des théories stochastiques ont été proposées par Jarrett, Ballentine, Shimony, et d'autres [171–175]. Ces auteurs utilisent également la loi des probabilités conditionnelles, mais mettent plutôt l'accent sur des notions telles que "predictive completeness" [172], ou de "parameter independence" et "outcome independence" [165, 173], qui permettent d'obtenir la factorisation (IV-25) des probabilités et de démonter l'inégalité BCHSH. Cette famille de démonstrations est résumée dans la seconde partie de l'Appendice B.

[11] Il a été remarqué que l'existence de corrélations quantiques sans ordre causal [168] peut être utilisée pour contrôler l'ordre de portes quantiques et rendre les calculs quantiques plus rapides [169].

#### B-2-c. Inégalités de Leggett-Garg

Le temps peut dans certains cas jouer le rôle des paramètres de mesure dans les inégalités BCHSH. Pour les systèmes macroscopiques, Leggett et Garg [176, 177] ont démontré l'existence d'inégalités de type BCHSH pour les valeurs à des instants différents d'une même grandeur physique macroscopique. Dans le même esprit que le raisonnement EPR, ils commencent par énoncer deux postulats :

(i) réalisme macroscopique : un système macroscopique ayant accès à deux (ou plus) états quantiques macroscopiquement distincts est toujours dans l'un de ces états (il n'est jamais dans une superposition cohérente de ces états).

(ii) possibilité de mesures non invasives au niveau macroscopique : il est en principe possible de déterminer l'état d'un système physique en lui imposant une perturbation arbitrairement faible sur son évolution future.

Ces hypothèses permettent d'obtenir toute une série d'inégalités mettant en jeu des moyennes de produits de résultats de mesures réalisées à des instants différents. Considérons par exemple un système macroscopique ayant accès à deux états macroscopiquement distincts $|\Phi_1\rangle$ et $|\Phi_2\rangle$. A quatre instants différents $t_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) nous associons un nombre $A_i = \pm 1$, égal à $+1$ si le système est dans l'état $|\Phi_1\rangle$, et égal à $-1$ si les système est dans l'état $|\Phi_2\rangle$. Pour chaque évolution du système (chaque réalisation de l'expérience), les quatre nombres $A_i$ possèdent des valeurs bien définies. Le raisonnement du § A-2 montre alors que la combinaison de nombres :

$$M = A_1A_2 - A_1A_4 + A_3A_2 + A_3A_4 = A_1\,(A_2 - A_4) + A_3\,(A_2 + A_4) \quad \text{(IV-33)}$$

est toujours égale à $\pm 2$. Si l'expérience est répétée un grand nombre de fois, et si l'on prend la valeur moyenne $\langle A_iA_j\rangle$ des différents termes, on obtient nécessairement :

$$-2 \leq \langle A_1A_2\rangle - \langle A_1A_4\rangle + \langle A_3A_2\rangle + \langle A_3A_4\rangle \leq +2 \quad \text{(IV-34)}$$

Cette relation constitue une inégalité de Leggett-Garg à quatre temps.

Une inégalité à trois temps peut être également obtenue. Considérons la combinaison des résultats :

$$N = A_1A_2 + A_2A_3 - A_1A_3 = A_1\,(A_2 - A_3) + A_2A_3 \quad \text{(IV-35)}$$

Si $A_3 = A_2$, nous avons $N = A_2A_3 = \pm 1$ ; si $A_3 = -A_2$, nous avons $N = 2A_1A_2 - (A_2)^2$, donc $N = 2A_1A_2 - 1$. Dans les deux cas, nous vérifions que $N \leq 1$ ; donc, si nous prenons la moyenne sur un grand nombre de réalisations :

$$\langle A_1A_2\rangle + \langle A_2A_3\rangle - \langle A_1A_3\rangle \leq 1 \quad \text{(IV-36)}$$

D'autres inégalités peuvent être obtenues par des méthodes similaires.

Or Leggett et Garg [176] ont montré que la mécanique quantique prédit la violation de certaines de ces inégalités, avec des systèmes physiques qui peuvent effectivement être considérés comme macroscopiques tels que des SQUIDs (Superconducting Quantum Interference Devices). Les deux états macroscopiquement distincts correspondent dans ce cas à des situations où le quantum de flux traverse le SQUID dans une direction, ou dans la direction opposée. Pour une revue des inégalités et des expériences les testant, voir [178]. En sus des SQUIDS, les systèmes physiques étudiés ont été des photons, des spins en résonance magnétique, des impuretés dans le Silicium, etc. Ce systèmes ne sont évidemment pas macroscopiques, et pour eux le postulat (ii) ci-dessus n'est pas nécessairement satisfait : en général, un système microscopique est perturbé par les mesures (réduction du vecteur d'état). C'est pourquoi diverses techniques de "mesure idéale non invasive", "mesure faible continue" (§ C du Chapitre IX), ou encore "mesures négatives" (§ D du Chapitre II) ont été mises en œuvre. Des références expérimentales récentes sont par exemple [79, 179, 180].

#### B-2-d. Autres généralisations

Les violations du théorème de Bell ne demandent pas nécessairement l'utilisation de paires de particules dont les spins sont décrits par un état intriqué, donc un état intriqué des polarisations pour des photons (Chapitre VIII). Par exemple, Grangier et al. [181] ont proposé l'utilisation de paires de photons obtenues par conversion paramétrique dans un cristal, et ensuite mélangées avec de faibles faisceaux lumineux cohérents. Un autre schéma intéressant mettant en jeu deux photons émis en cascade par un atome a été proposé par Franson [182], en considérant une situation où la fréquence de chaque photon fluctue (du fait que le niveau atomique intermédiaire a une durée de vie très courte) mais presque pas leur somme (le niveau atomique initial a une durée de vie très longue). Ce schéma a été mis en œuvre expérimentalement pour obtenir des violations significatives des inégalités de Bell (voir par exemple [183] et [184]).

De façon plus générale, les violations des inégalités de Bell ne sont pas limitées à quelques états quantiques particuliers (singulet de spin par exemple) ; elles sont en fait possibles avec tous les états quantiques purs qui ne sont pas des produits [185–188]. Avec des mélanges statistiques d'états, des violations des inégalités BCHSH sont également possibles [189] mais, inversement, des mélanges intriqués ne conduisent pas nécessairement à des violations [190] ; il faut alors recourir à des séquences de mesures plus élaborées pour mettre en évidence la non-localité [191, 192]. Deux sources indépendantes peuvent aussi être utilisées pour observer des violations, à condition d'effectuer des mesures d'interférence appropriées [193]. La généralisation à un nombre arbitraire de particules est possible [194]. Des schémas ont été proposés pour observer une

non-localité avec un seul photon [195–197] (mais, dans le processus de mesure, plus d'un photon est mis en jeu, par exemple des photons venant d'un oscillateur local). Pour une discussion générale de l'impact conceptuel d'une violation des inégalités, nous renvoyons au livre regroupant les articles de Bell [6].

### B-3. Statut du théorème ; tentatives de le contourner

Pourvu que le réalisme local soit admis (plus précisément les hypothèses du § A-4), le théorème de Bell est très général ; il est donc particulièrement difficile de construire une théorie raisonnable qui viole les inégalités, plus difficile en fait que beaucoup ne le croient. Les auteurs potentiels qui pensent avoir trouvé une explication simple aux violations devraient réfléchir à deux fois avant de prendre leur plume et d'envoyer un manuscrit à un journal scientifique ! Chaque année un nombre important de textes de ce type sont soumis, avec pour objectif de proposer une "nouvelle" façon d'échapper aux contraintes du théorème de Bell, et donc d'expliquer simplement pourquoi les expériences ont donné des résultats qui sont en contradiction avec les inégalités. Par exemple, les violations pourraient provenir d'une nouvelle sorte de statistique, de perturbations créées par les rayons cosmiques, de collisions gazeuses avec des paramètres fluctuants, des effets aléatoires de la gravité, etc. L'imagination n'a pas de limites pour invoquer des processus physiques toujours nouveaux. Mais il reste vrai que nous savons depuis le début que toutes les tentatives sont vouées à l'échec : si élaborées que soient ces théories, il n'est pas possible d'obtenir des violations des inégalités dans le cadre de théories classiques locales.

D'une certaine façon, la situation rappelle les tentatives des siècles passés pour inventer des mouvements perpétuels : même si certaines de ces inventions étaient extrêmement ingénieuses, à tel point qu'il peut parfois être difficile de trouver la raison exacte qui leur interdit de fonctionner, il reste vrai que la loi de conservation de l'énergie nous permet de savoir dès le départ qu'elles ne fonctionnent certainement pas. De même, certains de ces schémas pour vaincre les contraintes du théorème de Bell sont remarquablement construits, mais nous savons que le théorème est un résultat tout à fait général de statistique : dans toutes les situations qui entrent dans le cadre des mathématiques permises par l'utilisation des $\lambda$ ainsi que des fonctions $A$ et $B$ (et il y en a beaucoup !), il est impossible d'échapper aux inégalités. En fait, une violation est une situation extrêmement rare, si rare qu'en pratique elle n'a jamais été observée que dans des expériences conçues précisément dans ce but. Si nous voulions construire des automates avec des mécanismes complexes et des ordinateurs puissants, nous ne pourrions jamais reproduire tous les résultats de la mécanique quantique sans introduire de communication entre eux ; il est même possible de calculer la quantité minimale d'in-

formation qu'ils doivent échanger pour réussir cette simulation [198]. Cette impossibilité ne disparaîtra jamais – du moins tant que des ordinateurs totalement différents fonctionnant sur des principes purement quantiques ne sont pas construits[12].

La seule façon de contourner le théorème de Bell est de renoncer explicitement à l'une au moins des hypothèses mentionnées au § A-4 ; nous revenons au § C-1 sur l'hypothèse du libre arbitre des expérimentateurs.

## C. Impact du théorème de Bell, échappatoires

Compte tenu des résultats expérimentaux mentionnés au § A-5, qui sont en accord complet avec les prédictions de la mécanique quantique, certains physiciens concluent triomphalement "Bohr avait raison !", et ceci bien avant qu'il ait pu avoir connaissance de ces résultats. D'autres, avec le même enthousiasme, proclameront "Einstein avait raison !", en soulignant son rôle précurseur dans un domaine de plus de la physique. Ces deux opinions peuvent se justifier, en fonction des aspects du débat que l'on privilégie. Que l'on préfère personnellement les positions du camp orthodoxe ou le réalisme local, il est clair que c'est la voie ouverte par Einstein et Bell qui a joué le rôle décisif au cours des 50 dernières années. Ce sont eux qui ont mis en avant le rôle essentiel de la notion de localité, qui a permis des progrès considérables, alors qu'une simple répétition de la position orthodoxe ne l'aurait pas permis. Par exemple, l'introduction du postulat de réduction du vecteur d'état est encore parfois "expliquée" de nos jours en invoquant "les perturbations inévitables que l'appareil de mesure impose au système mesuré" – voir par exemple la discussion traditionnelle du microscope de Heisenberg qui subsiste dans de nombreux ouvrages d'enseignement ! Et pourtant, précisément, ce que nous dit l'argument EPR-Bell est que ceci n'est qu'une explication à bon marché : en réalité, la description quantique d'une particule peut parfaitement être modifiée sans qu'aucune action mécanique n'agisse sur elle, pourvu que la particule en question soit corrélée avec une autre. Dans ces conditions, un effet trivial comme l'effet de recul dans une collision photon-électron ne peut pas apporter une explication satisfaisante sur la nature profonde de la réduction du vecteur d'état. Nous savons maintenant que c'est un phénomène bien plus fondamentalement quantique, qui peut mettre en jeu la non-localité.

Une autre leçon que nous avons apprise est que, même si la mécanique quantique et la relativité ne sont pas incompatibles, elles ne vont pas très bien ensemble. En relativité, la notion d'événements en tant que processus ponctuels dans l'espace-temps, ou celle de causalité, restent très fondamen-

[12] Si nous revenons à la parabole de Mendel, une observation d'une violation des inégalités de Bell avec la couleur des fleurs impliquerait que quelque chose de caché dans les pois (peut-être une paire de molécules d'ADN ?) est resté dans une superposition quantique cohérente, sans décohérence, même si la distance entre les pois est grande.

tales, mais le théorème de Bell montre qu'elles ne sont pas aussi universelles qu'on aurait pu le penser auparavant. La mécanique quantique nous force à les adopter "avec un petit grain de sel". Un autre aspect provient des progrès incroyables qu'ont effectué les méthodes expérimentales au cours du XX$^{e}$ siècle, stimulés par la mécanique quantique. On en retire l'impression que nous pouvons maintenant, ou pourrons bientôt, avoir accès à des objets de toutes les échelles intermédiaires, passant continûment du macroscopique au microscopique. En conséquence, alors qu'à l'époque de Bohr on pouvait raisonnablement penser que la définition précise de la frontière entre le monde macroscopique des appareils de mesure et les objets microscopiques n'était pas cruciale, voire académique, la question va probablement devenir d'une importance pratique croissante. Dans le § D-2 du Chapitre III, nous avons donné un exemple (systèmes macroscopiques dans un état de Fock), mais probablement bien d'autres possibilités vont apparaître ; on peut l'espérer qu'elles donnent lieu à des expériences dans les années qui viennent. Tous ces changements, mis ensemble, donnent l'impression que la forme définitive de la théorie n'est pas encore nécessairement atteinte et que des révolutions conceptuelles sont toujours possibles ; mais pour le moment aucun résultat nouveau précis n'est venu affaiblir l'interprétation standard, au contraire.

Du fait de l'impact conceptuel important du théorème de Bell, de nombreux auteurs se sont penchés sur les résultats expérimentaux afin d'en scruter la signification ; dans quelle mesure démontrent-ils réellement que la Nature viole les inégalités, et donc le réalisme local. Bien évidemment, personne ne nie que l'interprétation de toute expérience ne peut se faire que dans un cadre où l'on pose un certain nombre d'hypothèses. En fait, les auteurs eux-mêmes des expériences se sont inquiétés dès le début de l'existence possible d'explications de leurs résultats en termes de théories réalistes et locales, mais inconnues. Si c'était possible, cela fournirait une échappatoire au conflit entre résultats et réalisme local (ce que l'on appelle en anglais "loopholes"). Même si le consensus général est maintenant que ces échappatoires ont été fermées l'une après l'autre (en particulier grâce à une remarquable série d'expériences en 2015 et 2016, *cf.* § C-1-e), il est toujours intéressant d'examiner leur nature, car cela éclaire le contenu logique du théorème de Bell.

### C-1. Echappatoires (loopholes), conspirations

Il existe en fait plusieurs façons de nier l'existence d'un conflit entre les résultats expérimentaux et le réalisme local. En premier lieu, évidemment, on peut toujours invoquer des erreurs triviales, des fluctuations statistiques aléatoires très improbables, pour expliquer pourquoi les expériences "feraient semblant" de confirmer la mécanique quantique ; par exemple, certains auteurs ont évoqué des fluctuations ad hoc du bruit de fond des photomultiplicateurs, fluctuations qui par magie modifieraient les résultats expé-

rimentaux d'une façon qui donne l'impression d'un accord parfait avec la mécanique quantique. Dans cette optique, on pourrait aussi bien remettre en question tous les résultats expérimentaux de la physique, et les attribuer à des erreurs dues au hasard et à des fluctuations ! Mais la variété et le nombre des résultats qui confirment la mécanique quantique avec des appareillages très divers font que les physiciens ne prennent pas cette explication au sérieux.

On pourrait aussi penser à des scénarios plus compliqués : par exemple, des variables physiques locales inconnues pourraient se coupler entre elles pour donner la (fausse) impression de résultats non locaux, alors qu'en réalité elles obéissent à des mécanismes qui restent locaux. En d'autres termes, ces variables mystérieuses "conspireraient" contre les physiciens afin de les tromper, et de les conduire à des conclusions erronées. Nous discutons maintenant certains de ces scénarios ; pour des revues sur les échappatoires, voir par exemple [199], [200], ainsi que [201] pour le cas spécifique des expériences avec des photons.

#### C-1-a. Echappatoire de l'échantillon biaisé ("efficiency loophole")

Dans la démonstration du § A-2, nous avons supposé que l'émission des paires est indépendante du choix des direction d'analyse $a$ et $b$ effectués par Alice et Bob, par exemple parce que ce choix est fait après l'émission des particules. La conséquence est que les propriétés de la particule que reçoit Alice sont statistiquement complètement indépendantes de $b$ ; inversement, les propriétés de la particule qui arrive dans le laboratoire de Bob sont indépendantes de $a$. De plus, nous avons supposé que chaque paire émise dans chaque expérience est détectée ; la paire donne lieu à des résultats $A$ et $B$ qui sont égaux à $\pm 1$, quelles que soient les valeurs choisies pour $a$ et $b$. Dans ces conditions, les propriétés statistiques des particules détectées sont les mêmes que celles des particules émises. Il s'ensuit que l'inégalité BCHSH contenant des moyennes de résultats expérimentaux peut être établie.

De même, dans la démonstration de l'inégalité BCHSH du § B-2-b, nous avons supposé que la distribution $\rho(\lambda_1, \lambda_2)$, qui décrit les propriétés statistiques des paires détectées dans l'expérience, est indépendante de $a$ et $b$ ; on voit sans difficulté que cette démonstration n'est plus valable si $\rho$ devient également une fonction de $a$ et $b$. De façon générale, l'obtention d'inégalités de Bell demande que les propriétés statistiques de chaque particule mesurée soit totalement indépendante du choix de la direction d'analyse pour l'appareil qui mesure l'autre particule. La limitation de la validité des inégalités aux situations où l'ensemble des paires détectées est indépendant de $a$ et $b$ est un point très important, qui a été compris avant même que soient réalisées les premières expériences [123,164,202]. C'est pourquoi plusieurs auteurs ont souligné qu'un résultat expérimental semblant mener à une violation des

inégalités de Bell, mais sans preuve expérimentale directe de cette indépendance, n'est pas réellement concluante : elle peut en principe être interprétée dans un cadre réaliste local en invoquant ce qui est souvent appelé en anglais le "pair selection loophole" (ou encore "detection loophole", "efficiency loophole", "(un)fair sampling loophole", etc.). Nous discutons maintenant cette échappatoire.

Revenons donc au raisonnement du § A-2 plus en détail. Nous avons supposé que les quatre nombres $A$, $A'$, $B$, et $B'$ sont tous attachés à une même paire. Il est alors possible d'obtenir la moyenne d'ensemble $\langle M \rangle$ à partir des mesures successives de quatre valeurs moyennes $\langle AB \rangle$, $\langle AB' \rangle$, etc. Cependant, si $M$ est construit à partir de plus de quatre nombres, comme ceux qui seraient associés à deux paires ou plus, l'algèbre de la démonstration ne fonctionne plus, comme nous l'avons déjà noté au § B-2-a, et le reste de la démonstration s'écroule[13].

Si Alice mesure ses particules avec un appareil de Stern et Gerlach (ou, pour des photons, un analyseur de polarisation à deux canaux), aucune particule n'échappe à la mesure ; même avec une expérience imparfaite, il semble n'y avoir aucune raison particulière pour laquelle l'échantillon des particules qu'elle détecte pourrait dépendre du paramètre de mesure $a$ qu'elle choisit. Toutefois, afin d'illustrer les effets d'une sélection éventuelle des paires, supposons l'inverse : pour une raison ou une autre, l'analyseur de polarisation d'Alice sélectionne seulement un sous-ensemble (une catégorie) de particules qui dépendent de $a$ ; les particules qui n'appartiennent pas à cette catégorie sont simplement ignorées par l'appareil de mesure (il ne fournit aucun clic). Toujours dans le cadre d'un point de vue réaliste local, nous pouvons même supposer que, dès que l'orientation de l'analyseur est changée de quelques degrés, c'est une catégorie complètement différente de particules qui est détectée. Comme les propriétés de deux particules d'une même paire sont initialement corrélées, pour les paires de particules qui sont détectées, les propriétés de la particule que reçoit Bob peuvent alors dépendre de $a$. Il devient ainsi possible d'attribuer à cette catégorie (qui dépend de $a$) n'importe quelles propriétés physiques *ad hoc* qui permettent de reproduire une dépendance en $b$ quelconque. On peut par exemple choisir de reproduire la dépendance sinusoïdale en $a$ et $b$ de la mécanique quantique, dont nous savons qu'elle viole les limites BCHSH. Comme, de chaque côté, ne sont comptés que des événements qui sont corrélés avec une détection de l'autre côté, on

[13]Supposons par exemple que les paires détectées des deux côtés pour les orientations $a$ et $b$ des analyseurs font partie d'un premier sous-ensemble, celles détectées pour les orientations $a$ et $b'$ d'un second. Si le choix de la première orientation est $a$, le résultat observé localement peut alors être écrit, ou bien $A_{a,b}$ si la paire appartient au premier sous-ensemble, ou $A_{a,b'}$ si elle appartient au second. Le nombre $M$ est donc la combinaison de 8 nombres différents $\pm 1$ au lieu de 4, et l'on ne peut plus démontrer l'existence de la limite de Bell.

compte en pratique des particules qui peuvent avoir des propriétés qui dépendent de l'autre paramètre de mesure, en un point éloigné ; dans une telle situation, la localité ne peut plus être exprimée simplement en fonction de $a$ et $b$ (voir l'Appendice E pour plus de détails). Nous obtenons ainsi un cas où les inégalités sont violées dans le cadre du réalisme local, seulement à cause d'un effet de sélection locale.

D'un point de vue expérimental, il n'y a aucune difficulté particulière à partir d'un ensemble de paires émises qui soit indépendant des paramètres de mesure, mais il est beaucoup plus difficile de s'assurer que toutes les paires sont détectées. Or, nous l'avons vu, si certaines paires échappent à la détection, il est alors envisageable que la statistique des paires détectées diffère de celle des paires émises ; en toute rigueur, il n'y a alors plus de raison pour que la limite de Bell soit toujours une conséquence du réalisme local – voir par exemple le cas étudié par Pearle dans [202] et l'Appendice E. En pratique, dans la plupart des expériences avec des photons, le rendement de détection est faible : seule une petite fraction des paires émises sont recueillies par les détecteurs. Ce qui est mesuré est un nombre de coïncidences pendant un temps donné, mais le nombre de paires émises pendant ce temps n'est pas accessible. Bien sûr, en théorie ce nombre dépend de paramètres connus comme le rendement quantique des détecteurs, les angles de collecte des photons, etc. et ces paramètres sont en principe indépendants de $a$ et $b$. Il reste vrai que, en toute généralité et en l'absence de toute hypothèse théorique, ce nombre pourrait dépendre de $a$ et $b$, ce qui ouvre la possibilité d'une échappatoire.

Bien sûr, en pratique cela ne supprime pas l'intérêt des expériences avec des photons : on peut parfaitement supposer qu'aucun biais n'est introduit par la sélection des paires, ce qui est après tout une hypothèse très plausible : par exemple, il n'y a aucune raison pour laquelle les pertes géométriques de photons devraient dépendre de leur polarisation. Mais cela reste une hypothèse, et donc un point faible de la preuve.

Une situation idéale serait celle où l'on disposerait d'un dispositif avec un bouton actionné par un expérimentateur, qui puisse déclencher avec certitude l'émission d'une paire de particules qui serait doublement détectée également avec certitude (avec un rendement de 100 %). Le "loophole" serait ainsi définitivement refermé. Au cours de certaines discussions, Bell introduisait la notion de "détecteurs préliminaires" [203], des appareils qu'il représentait schématiquement comme des cylindres à travers lesquels toute particule devait nécessairement se propager avant d'atteindre les deux extrémités de l'expérience (où se trouvent les mesures dépendant de $a$ et $b$). Le rôle de ces détecteurs préliminaires était donc de signaler la présence de paires qui, plus tard, seraient toujours détectées par les deux appareils de mesure, quel que soit le choix de $a$ et $b$. En d'autres termes, ce but était de rendre la définition de l'ensemble plus précise, même si initialement les paires étaient émises dans toutes les directions. De tels dispositifs permettant une définition d'un

ensemble indépendant de $a$ et $b$ sont parfois appelés "event ready detectors". Voir également la Ref. [204] où Bell imagine une combinaison de détecteurs "veto" et "go" associés avec la première particule dans une émission ternaire, précisément dans le but d'obtenir une meilleure définition de l'échantillon détecté.

Inversement on peut délibérément choisir de biaiser l'échantillon en effectuant une post-sélection des paires observées. On peut alors, non seulement violer les inégalités de Bell dans un cadre local (Appendice E, § 2), mais aussi largement dépasser la limite de Cirelson (§ B du Chapitre V) [206–208]. Ceci illustre bien le caractère crucial de la condition d'échantillonage à respecter pour une mise en évidence expérimentale des effets de violation du réalisme local [14].

Remarque : nous verrons au chapitre suivant qu'il existe une autre inégalité, dite inégalité CH, qui ne demande pas de supposer que toutes les particules soient détectées ; toutefois, elle demande que la distribution des paires $\rho(\lambda)$ soit indépendante des paramètres de mesures $a$ et $b$, et que la probabilité de détection double se factorise pour chaque valeur de $\lambda$.

#### C-1-b. Conspiration des polariseurs ("communication loophole")

D'autres "loopholes" sont également possibles : même si les dispositifs de détection avaient des rendements de 100 %, on pourrait aussi invoquer d'autres processus physiques que la sélection de paires pour reproduire artificiellement les résultats de la mécanique quantique. L'un d'entre eux est souvent appelé "conspiration des polariseurs"[15] (en fait, "conspiration des analyseurs" serait plus approprié) – ou également "communication loophole". Supposons que, par un processus inconnu, chacun des analyseurs devienne sensible à l'orientation de l'autre analyseur ; il pourrait alors avoir une fonction de réponse qui dépende de l'autre paramètre de mesure, de sorte que la fonction $A$ pourrait acquérir une dépendance par rapport aux deux paramètres, $a$ et $b$. Dans ces conditions, la démonstration du théorème de Bell devient impossible. On arrive à la même situation si le choix du paramètre de mesure $a$ peut, d'une façon ou d'une autre, influencer la propagation de la seconde particule entre la source et l'appareil de mesure de paramètre $b$. Ainsi, des processus physiques inconnus pourraient conspirer pour reproduire des

[14] D'autres schémas que le biais de l'échantillon peuvent conduire à des prédictions qui semblent reproduire celles de la mécanique quantique dans le cadre du réalisme local. Voir par exemple la Ref. [205] pour une discussion des effets d'un changement de normalisation des fonctions de corrélation avec l'écart quadratique moyen des variables, au lieu de sommer sur des événements indépendants.

[15] Le mot polariseur se réfère aux expériences faites avec des photons où l'orientation de spin des particules est mesurée à l'aide de filtres polarisants. Il n'y a cependant rien de spécifique aux photons dans ce scénario, qui peut par exemple facilement être transposé à des particules massives de spin 1/2.

violations des inégalités sans violer le réalisme local, et donner aux physiciens la fausse impression que ce dernier est mis en défaut ; les conclusions à tirer des résultats des expériences seraient alors totalement différentes, puisqu'il s'agirait alors de la mise en évidence de nouvelles interactions, totalement inconnues jusqu'à présent.

Une façon d'exclure cette possibilité et l'existence de tels processus est d'utiliser la causalité relativiste. Si les distances entre les deux analyseurs et entre les analyseurs et la source sont suffisamment grandes, et si les paramètres de mesure sont choisis au tout dernier moment, alors aucune influence physique n'a le temps de se propager (à la vitesse maximale de la lumière) entre les différentes parties de l'expérience. A moins de violer la relativité, ces processus inconnus sont alors exclus, de sorte que l'échappatoire est donc close. Un premier pas dans cette direction a été fait par Aspect et al. en 1982 [150]. Mais, les progrès techniques aidant, des expériences plus récentes [209] ont permis d'effectuer des choix aléatoires extrêmement rapides de $a$ et $b$, excluant toute possibilité de conspiration des analyseurs, et refermant ainsi ce "loophole". Elles ont vérifié que la mécanique quantique continue à donner des prédictions parfaitement correctes dans ces conditions plus sévères, et confirmé l'absence d'effet d'interactions inconnues dans les résultats précédents. Les expériences de 2015 [158–160] ont également fermé cette échappatoire ; elles sont discutées plus en détail dans le § C-1-e.

#### C-1-c. Fatalisme contre libre arbitre

Un peu dans le même esprit, on trouve ce que l'on appelle parfois l'échappatoire fataliste ("fatalistic loophole"[16]), ou encore superdéterminisme. L'idée est de remettre en question une hypothèse implicite dans le raisonnement qui conduit aux inégalités de Bell : la possibilité pour les expérimentateurs de faire chacun un choix complètement arbitraire des paramètres de mesure $a$ et $b$. D'habitude, on considère effectivement $a$ et $b$ comme des variables libres : leurs valeurs sont une conséquence, non pas d'un événement préliminaire qui se serait produit dans le passé, mais d'un libre choix effectué par des êtres humains, éventuellement juste avant la mesure pour éviter mieux encore toute influence mutuelle possible. Mais il reste vrai que, pour deux événements quelconques (le choix des paramètres dans notre cas), il existe toujours un recouvrement dans le cône de passé, éventuellement lointain. Il est donc toujours possible en théorie de supposer qu'ils partagent une cause passée commune ; avec ce point de vue, $a$ et $b$ ne sont plus des paramètres libres, mais des variables qui peuvent fluctuer (en particulier, si la cause elle-même fluctue) avec toutes sortes de corrélations. Dans une telle éventualité,

[16] Ou parfois encore "freedom of choice loophole".

il est facile de voir que la preuve du théorème de Bell n'est plus possible[17], de sorte que toute contradiction entre réalisme local et la mécanique quantique est évitée. L'interprétation de la mécanique quantique par des "automates cellulaires" de G. 't Hooft [210] appartient à cette catégorie de théories.

Un tel point de vue remet en question la notion de libre choix des expérimentateurs, dont les décisions sont en fait supposées être prédéterminées par des événements antérieurs sans qu'ils s'en rendent compte. De façon tout à fait générale, la notion même de paramètres expérimentaux extérieurs et arbitraires perd son sens dans un tel cadre logique. Une fois qu'on a accepté de payer ce prix, on peut en principe construire une théorie qui est à la fois réaliste, locale, et (super)déterministe, incluant une sorte de théorie physique de la prise de décision humaine, et qui peut violer les inégalités de Bell – voir par exemple la Ref. [211]. Il s'agit là, bien évidemment, d'un point de vue peu répandu, car la notion de paramètres expérimentaux externes arbitraires est très généralement acceptée en physique ; Bell s'exprime en ces termes [212] : "une classe de théories fort respectables, incluant la mécanique quantique telle qu'elle est pratiquée, possèdent des variables 'externes libres' en plus des variables internes qui obéissent à la théorie... Ces variables représentent les conditions expérimentales. Elles fournissent également un levier d'action pour des expérimentateurs doués de libre choix... ".

En pratique, quand de nombreuses valeurs des paramètres expérimentaux sont choisies aléatoirement dans une expérience, ces valeurs ne sont pas décidées par un être humain mais créées automatiquement par un générateur de nombres aléatoires. Par exemple, dans l'expérience avec dépendance temporelle mentionnée plus haut [150], un double générateur de nombres aléatoires était utilisé pour déterminer les valeurs des paramètres expérimentaux aux deux extrémités du dispositif. Si l'on transpose la problématique du libre arbitre à cette situation, on arrive à la question : les générateurs de nombres sont-ils vraiment aléatoires ? Ou fournissent-ils des valeurs qui sont conséquences d'une cause commune dans le passé ? Si c'est le cas, ce sont des fonctions d'une variable $\lambda$, et le théorème de Bell ne peut plus s'appliquer. On peut également imaginer des influences du générateur de nombres aléatoires sur la source des particules, qui seraient alors émises dans un état corrélé avec le type de mesures qu'elles subiraient ensuite ; ceci empêcherait également la démonstration du théorème. Il n'est alors pas totalement exclu que les fluctuations de $\lambda$ arrivent à reproduire les prédictions de la mécanique quantique, mais à partir d'un mécanisme totalement différent et compatible avec le réalisme local. Une façon de diminuer la plausibilité de cette explication est de faire usage d'appareils de mesure très éloignés avec des générateurs

[17]Par exemple, dans la preuve qui fait usage d'une densité de probabilité $\rho(\lambda)$, si l'on suppose que $a$ et $b$ deviennent deux fonctions $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$, la comparaison des valeurs moyennes des résultats pour des valeurs fixées différentes de $a$ and $b$ revient à introduire des probabilités conditionnelles.

de nombres aléatoires indépendants, comme c'est le cas dans une expérience récente [154] ; voir par exemple [213] pour la description expérimentale d'un générateur ultra rapide de nombres aléatoires purs.

Une vue fataliste de l'univers physique laisse peu de place au développement des disciplines scientifiques expérimentales. La méthode scientifique suppose en effet que chaque expérimentateur est libre de faire des choix arbitraires concernant la conception de ses appareils de mesures et les paramètres utilisés. Dans ce point de vue, c'est à la théorie d'adapter ses équations au choix arbitraire des variables ainsi effectué, pas le contraire. Mais si l'on considère que l'histoire de l'Univers est déterminée une fois pour toutes, y compris toutes les expériences passées et futures réalisables dans cet Univers, il n'est alors plus possible de "poser des questions à la Nature" d'une façon libre, puisque ces questions elles-mêmes sont conséquences de l'histoire unique en question. La notion même de méthode scientifique expérimentale devient passablement floue, si elle ne perd pas tout son sens. Inutile de le dire, l'attitude fataliste est peu commune parmi les scientifiques ; la plupart considèrent qu'éliminer de cette façon fondamentale la possibilité d'observations libres est un prix à payer trop élevé pour expliquer les difficultés de la mécanique quantique.

On peut cependant prendre un point de vue intermédiaire et admettre que, si les expérimentateurs disposent d'un certain libre arbitre, ce dernier n'est pas total. La Ref. [214] montre que, si les expérimentateurs renoncent à seulement 14 % de leur indépendance décisionnelle, il devient parfaitement possible de reproduire les prédictions de la mécanique quantique dans le cadre du réalisme local.

#### C-1-d. Progrès expérimentaux pour refermer les échappatoires

Les efforts des expérimentateurs pour refermer les diverses échappatoires ont une longue histoire. Comme déjà mentionné, celle de l'échantillon biaisé a été identifiée avant même les premières expériences [143, 144], et n'a cessé d'être étudiée depuis, avec des progrès constants. Pour une discussion initiale des conditions nécessaires à une expérience sans échappatoire, en termes de bruit de fond et de rendement quantique des compteurs, voir [215].

Nous avons déjà mentionné que, dans la majorité des expériences avec des photons, la plupart des paires sont simplement manquées par les détecteurs. Il y a plusieurs raisons à cette situation : les photons sont émis dans toutes les directions, tandis que les analyseurs ne collectent qu'un petit angle solide et, donc, une petite fraction des paires. Ceci était particulièrement vrai dans les expériences initiales avec des cascades radiatives atomiques ; dans les expériences plus récentes [152], la mise en œuvre de conversion paramétrique de photons introduit une bien meilleure corrélation entre les directions de propagation des photons et une bien meilleure efficacité de collecte des

photons, mais elle reste faible. De plus, la transmission des analyseurs est plus faible que 1 (elle est en réalité inférieure à 1/2 si des filtres polariseurs ordinaires sont utilisés, mais des expériences ont aussi été réalisées avec des analyseurs biréfringents à deux canaux [149], qui ne sont pas limités à 50 %). Enfin, le rendement quantique des détecteurs de particules (par exemple des photomultiplicateurs pour des photons) n'est pas 100 % non plus, de sorte que des particules sont également perdues à cette étape. Le résultat final est que beaucoup d'expériences ne fournissent aucun moyen indépendant de caractériser le nombre de paires détectées, puisque le processus de détection dépend évidemment de $a$ et $b$ ; c'est pourquoi les résultats expérimentaux ne sont interprétables que dans le cadre d'une hypothèse "échantillon non biaisé", qui revient à supposer que les paramètres de mesure n'introduisent aucun biais dans la statistique des événements.

Il ne faut pas en conclure que ces expériences ne sont pas conclusives ! Leurs résultats sont tout aussi convaincants que ceux de la plupart des expériences en physique. Il faut en effet garder à l'esprit qu'il n'existe absolument aucune raison pour laquelle un tel biais de l'échantillon pourrait se produire. Les expérimentateurs ne sont pas dans le noir concernant l'efficacité de détection dans leur expérience. Tout au contraire, ils peuvent la calculer avec précision à partir des caractéristiques géométriques de leur appareillage, du rendement quantique des détecteurs, du taux d'excitation de la source, etc. Tous ces paramètres peuvent être contrôlés avec soin avec ce que prévoit la théorie. Les taux de détection double sont également comparés avec ceux de détection simple de particules dans les mêmes conditions expérimentales ; rien n'interdit aux expérimentateurs de tester d'autres quantités que les variations relatives en fonction de $a$ et $b$. Le même soin a été apporté à faire toutes les vérifications possibles que dans d'autres expériences importantes de physique ; le résultat de tout ce travail est un accord parfait avec toutes les prédictions de la mécanique quantique. Il serait vraiment extraordinaire qu'il existe un effet physique mystérieux qui dépende aussi crucialement du rendement quantique des détecteurs ; pour de faibles rendements, cet effet mimerait les résultats de la mécanique quantique et tromperait les physiciens ; ce ne serait que pour des rendements quantiques supérieurs que l'effet se comporterait complètement différemment, cessant de reproduire la mécanique quantique afin d'entrer dans les limites de Bell. C'est probablement la raison pour laquelle la plupart des physiciens restent très sceptiques sur l'existence d'un tel scénario.

Pour les premières propositions d'expériences réellement sans échappatoire[18], voir [216, 217] et [218]. Cette dernière référence propose d'utiliser des

[18] Une corrélation parfaite entre les clics des deux appareils (quels que soient les résultats) fournirait un autre schéma d'une expérience sans échappatoire – ceci impliquerait, bien sûr, que l'on utilise des deux côtés des détecteurs à deux canaux avec un rendement de 100 %. En lui-même, le fait qu'un clic d'un côté est toujour corrélé avec un clic de l'autre,

variables continues qui sont quantifiées artificiellement après coup (résultat $+1$ si l'intégrale du signal pendant une impulsion est positive, $-1$ si elle est négative). La notion de "soustraction de photon" est particulièrement intéressante, car elle réalise à la fois deux objectifs : elle fournit un "event ready detector" (dans le but de refermer le "loophole correspondant") et elle crée l'état quantique nécessaire à la violation des inégalités de Bell. Dans ce cas, il se trouve que la violation n'est que de 1 %, mais il est possible d'imaginer des situations plus élaborées où des violations bien supérieures sont prédites [219]. Une expérience avec des ions $^9Be^+$ a été réalisée avec un rendement de détection élevé [220], ce qui a permis de refermer l'échappatoire de l'échantillon biaisé ; toutefois, la distance entre les ions était faible (quelques microns), de sorte que le "communication loophole" ne pouvait être refermé. Il a toutefois été proposé d'utiliser la méthode de l'échange d'intrication (§ C-2 du Chapitre VII) pour intriquer des ions dans des trappes différentes avec des paires de photons [221] ; l'expérience a été réalisée [222,223] avec des ions $^{171}Yb^+$ à une distance de 1 m l'un de l'autre, et a conduit à une nette violation des inégalités de Bell (3 déviations standard). Des expériences récentes avec des jonctions Josephson ont fourni des violations des inégalités par plus de 200 écarts standards, mettant en jeu des systèmes quantiques qui sont des circuits électriques macroscopiques [224]. Bien évidemment, dans un tel cas, le problème de capturer les paires de particules ne se pose plus ; toutefois, comme la distance entre les circuits est petite, le "communication loophole" reste ouvert. De fait, avant 2015, aucune expérience libre de toute échappatoire n'avait été réalisée.

#### C-1-e. Expériences de 2015 et 2016

En 2015, plusieurs expériences ont réussi la performance de fermer simultanément toutes les échappatoires. L'une d'entre elles se basait sur l'inégalité BCHSH, les deux autres sur des inégalités du type CH-Eberhard. De façon générale, l'inégalité BCHSH est plus sensible à l'échappatoire de biais de l'échantillon que les inégalités de Eberhard ou CH. La raison est que l'inégalité BCHSH compare des moyennes de détection à des nombres purs, $\pm 2$. Comme nous l'avons vu, les moyennes sont obtenues expérimentalement

indépendamment des choix de $a$ et $b$, n'est pas suffisant pour exclure une dépendance de l'ensemble des paires détectées. Mais, si l'on suppose également la localité à ce stade, alors un raisonnement simple montre qu'une corrélation parfaite des détections est suffisante pour assurer l'indépendance : si une détection se produit pour la première particule, elle est déterminée par la détection de la seconde particule avec le paramètre de mesure $b$, quelle que soit la valeur choisie pour $a$ ; elle est donc indépendante de $a$. De façon symétrique, la détection de la seconde particule est indépendante de $b$. En conséquence la détection de la paire est indépendante de $a$ et $b$.

En d'autres termes, des arguments de localité peuvent être invoqués, non sseulement pour les résultats des appareils (les fonctions $A$ et $B$), mais aussi pour spécifier l'ensemble des paires observées (la fonction de distribution $\rho$).

en divisant des nombres de coïncidences (contenu des compteurs de coïncidences) par un nombre total de paires, qui n'est pas mesuré directement. Si le rendement de détection est faible, le nombre total de paires émises excède celui des détections par un grand facteur, ce qui conduit à de petites valeurs pour les moyennes, de sorte que le terme du milieu est toujours un petit nombre dont la valeur absolue est bien plus petite que 2. L'inégalité ne peut alors jamais être violée, pour des raisons triviales qui n'ont rien à voir avec le réalisme local.

Pour l'inégalité BCHSH, il faut donc trouver une façon précise de mesurer le nombre total d'événements, par exemple grâce à un "event-ready device" comme celui décrit à la fin du § C-1-a. En revanche, les inégalités de Eberhard ne contiennent que des probabilités de corrélation des deux côtés de l'inégalité, et aucun nombre pur ; elles sont donc bien moins sensibles à la connaissance précise du nombre d'événements. Pour l'inégalité CH, elle compare des taux de corrélation d'un côté à des taux de détection simple de l'autre. Ceci pourrait être source de problème si les premiers étaient bien plus faibles que les seconds. Toutefois, dans les expériencees utilisant deux photons émis par conversion paramétrique, les directions d'émission sont fortement corrélées, de sorte que les taux de détections simples et doubles sont comparables ; ceci favorise l'obtention de violations.

(i) Inégalité BCHSH avec des spins

Dans l'expérience décrite dans la Ref. [158], les systèmes quantiques intriqués soumis directement aux mesures n'étaient pas des photons, mais les spins électroniques de deux "centres NV" dans le diamant. Comme ces centres sont localisés dans des cristaux solides, ils sont statiques ; le problème de les capter ne se pose pas comme il le ferait pour des photons. Les corrélations entre les deux centres NV sont introduites par la méthode de l'échange d'intrication déjà mentionnée (et décrite dans le § C-2 du Chapitre VII). Cette méthode est utilisée dans le schéma élaboré de Barrett et Kok [225], qui met en œuvre deux projections par la mesure, au lieu d'une seule. Les deux centres NV sont initialement excités par des impulsions laser de façon sélective (un état de spin est excité, l'état orthogonal ne l'est pas). Les photons émis ensuite par émission spontanée sont ensuite combinés sur une lame semi-réfléchissante de façon à interférer. Après application d'une impulsion $\pi$ de radiofréquence qui intervertit les deux états de spin, le processus d'excitation laser et de détection de photons de fluorescence est ensuite répété. L'observation de deux photons à des instants différents à la sortie d'un interféromètre garantit alors la préparation de l'état intriqué attendu pour les deux spins, et fournit ainsi un signal "event ready". La mesure sur chacun des spins est effectuée par absorption sélective d'un laser de détection, et par mesure du photon diffusé. Ceci permet d'obtenir une mesure efficace des spins et d'éviter toute échappatoire d'échantillonage biaisé. Une grande séparation spatiale (plus de 1 kilomètre) permet de satisfaire les conditions de localité et de refermer le

"communication loophole". Le résultat final est une violation des inégalités BCHSH par plus de deux écarts standard.

(ii) Inégalités CH et de Eberhard avec des photons

Un autre succès remarquable a été obtenu simultanément par deux autres groupes [159,160], cette fois avec des paires de photons émises par conversion paramétrique. Les inégalités testées étaient de légères variantes des inégalités CH et de Eberhard ("CH-E inequalities"). Des générateurs de nombres aléatoires du type décrit dans la Ref. [213] ont été mis en œuvre, afin de fermer autant qu'il est possible l'échappatoire du libre arbitre. La distance entre les deux processus de mesure était de plus de 50 m dans un cas [159], de plus de 180 m dans l'autre [160]. Dans les deux cas, un soin particulier a été apporté à régler une séquence très rapide des événements d'émission et de détection, de façon à complètement fermer le "communication loophole". Dans les deux cas également, la violation observée est très claire, de plus de 11 écarts standard pour [159] par exemple.

(iii) Inégalité BCHSH avec des atomes et "event ready test".

En 2016, un autre groupe a réalisé une expérience qui referme simultanément les échappatoires de détection et de communication [226]. Comme pour l'expérience avec des centres NV [158], les deux systèmes intriqués soumis aux mesures sont des particules matérielles : des atomes de Rubidium dans des pièges optiques placés à une distance de 400 m. La méthode pour obtenir l'intrication initiale est toutefois plus simple. Initialement, les deux atomes sont excités par des lasers et chacun émet un photon, avec une polarisation qui est intriquée avec le sous-niveau Zeeman atteint par l'atome. Les deux photons se propagent ensuite vers un laboratoire où on les fait interférer sur une lame séparatrice ; des détecteurs sont placés dans les voies de sortie et enregistrent les clics ; c'est ce qui fournit le signal "event-ready". Il s'ensuit un échange d'intrication (§ C-2 du Chapitre VII), de sorte que les deux atomes dans leur état fondamental s'intriquent. Ceci complète l'étape de préparation des deux particules quantiques. Des mesures de leur état quantique interne sont ensuite effectuées par ionisation sélective au moyen de lasers bleus supplémentaires dont la polarisation est ajustable. Les ions $Rb^+$ qui en résultent sont alors accélérés et envoyés sur des photomultiplicateurs. Cette expérience conduit à une violation des inégalités BCHSH par environ 5 déviations, ou plus.

De façon générale, dans toutes ces expériences, les seules échappatoires qui subsistent sont celles qui ne pourront jamais être fermées, même en principe (par exemple la possibilité qu'un événement lointain dans le passé influence les deux détecteurs). Il semble donc raisonnable de conclure que 2015 a été l'année de fermeture de toutes les échappatoires, à part évidemment celles qui ne pourront jamais être fermées !

#### C-1-f. Crédibilité des échappatoires

Nous ne pouvons conclure cette discussion des "loopholes" sans mentionner que, s'ils existent sans aucun doute, ils conservent tous un caractère ad hoc (deus ex machina) qu'il est difficile de nier. De façon générale, il n'existe en physique aucune expérience parfaite, et il n'est pas surprenant qu'il doive rester impossible pour toujours de refermer simulatanément toutes les échappatoires imaginables. L'exemple le plus criant est l'échappatoire fataliste : il est toujours possible de supposer que tous les réglages de toutes les expériences de physique ne sont en fait que les conséquences d'un événement inconnu qui s'est produit pendant le big bang. Comme nous l'avons déjà souligné, penser que c'est le cas et que "tout était écrit depuis longtemps et rien ne peut en être changé par une décision humaine" revient à rejeter la validité de la méthode scientifique. De plus, les explications en question ne s'appuient sur aucune théorie précise : personne n'a la moindre idée des processus physiques mis en jeu dans la conspiration des polariseurs, ou comment et pourquoi une sélection de paires pourrait se produire de façon suffisamment complexe et inattendue pour reproduire parfaitement la mécanique quantique, tout en restant dans un processus local. La seule chose que l'on puisse faire (voir Appendice E) est de construire des modèles au coup par coup pour reproduire telle ou telle expérience. Mais par le biais de quel processus physique mystérieux les résultats expérimentaux reproduiraient-ils si bien les prédictions de la mécanique quantique lorsque les rendements de mesure sur les paires sont faibles, alors que ce ne serait plus possible avec des rendements supérieurs ? Bell lui-même était celui qui aurait pu souhaiter le plus vivement que ses inégalités permettent effectivement d'être utilisées comme un indicateur pour mettre en lumière les limites de la mécanique quantique ; et pourtant, il tenait ces explications pour peu plausibles et inesthétiques.

### C-2. La mécanique quantique est-elle non locale ? Contrafactualité

Comme nous le discuterons plus en détail dans le § C du Chapitre V, il est impossible d'exprimer toutes les règles de la mécanique quantique en termes d'événements d'espace-temps ; l'explication des expériences de Bell demande toujours de faire intervenir à un stade ou un autre un ingrédient se situant hors de l'espace-temps, même si cela ne met en jeu aucune contradiction brutale avec la relativité (pas de communication superluminale). Pour qu'une théorie soit locale, il ne suffit pas qu'elle le soit parfois, ou même dans la grande majorité de ses énoncés ou de ses équations ; il faut qu'elle le soit toujours. Cela signifie-t-il que la mécanique quantique doit être considérée comme non locale ?

Le fait que la mécanique quantique en elle-même soit non locale ou pas est un sujet de débat depuis des années. C'est pourquoi l'on peut trouver dans la littérature des points de vue très divers sur la relation exacte entre

mécanique quantique et localité d'une part, réalisme de l'autre. Certains auteurs considèrent le caractère non local de la mécanique quantique comme un fait avéré. Par exemple, dans [166], Bell écrit "La mécanique quantique n'est pas localement causale" et ajoute "la mécanique quantique ne peut pas être incorporée dans une théorie causale et locale". Quant à Popescu et Rohrlich (§ D-4 du Chapitre V), ils proposent même de faire de la non-localité un axiome fondamental de la mécanique quantique [227]. Pour d'autres, la non-localité quantique est artificielle, conséquence de l'introduction dans la mécanique quantique de notions qui lui sont étrangères (typiquement les éléments de réalité EPR). Ils font valoir qu'il est possible de se passer du postulat de réduction du vecteur d'état en mécanique quantique (soit en adoptant la position de Bohr, *cf.* § B-2-b du Chapitre I, soit en prenant un point de vue comme celui décrit au § A-2-b du Chapitre XI) et que cette dernière ne prévoit en aucune circonstance de violation de la causalité relativiste. Leur conclusion est alors, en général, que la mécanique quantique est contradictoire avec le réalisme, mais pas avec la localité.

Les défenseurs d'un point de vue local mais non réaliste sur la mécanique quantique remarquent que les corrélations entre les résultats observés par Alice et Bob dans des galaxies lointaines sont totalement inobservables directement. Pour qu'elles apparaissent, il faut qu'Alice et Bob communiquent entre eux, ou alors voyagent vers un lieu de rendez-vous commun afin de comparer leurs résultats. Comme ni eux, ni leurs messages, ne peuvent voyager plus vite que la vitesse de la lumière, la mise en évidence des corrélations demande un délai minimal qui est effectivement supérieur au minimum prescrit par la relativité. On peut d'ailleurs tracer un diagramme d'espace-temps pour rendre compte de l'ensemble de l'expérience, depuis l'émission des particules jusqu'à l'observation des corrélations, tout en restant parfaitement dans le cadre de la relativité. Ce à quoi les partisans d'un point de vue non local rétorquent qu'une des bases de la méthode scientifique est de faire confiance aux observations faites par d'autres scientifiques. Comme Alice et Bob nous disent qu'ils ont observé leurs résultats avant la constatation effective des corrélations, c'est bien que ces dernières existaient déjà, et sont donc non locales. Alors le premier groupe répond que ce raisonnement fait intervenir une notion de réalité dans le passé, un concept délicat qui ne s'impose en rien si l'on abandonne le réalisme, etc. Bref, des discussions animées ont eu lieu et continuent toujours à l'heure actuelle pour savoir si, oui on non, la mécanique quantique est intrinsèquement non locale [228–230] ; voir aussi les Refs. [24], [123, 231] ainsi que la discussion de [232]. Des problèmes délicats de logique sont en jeu et nous ne discuterons pas cette question plus en détail ici.

Ce qui est plus aisé à saisir pour la majorité des physiciens est la notion de "contrafactualité" [233]. Un raisonnement contrafactuel considère les résultats d'expériences possibles dans le futur comme des quantités bien définies, des

fonctions mathématiques qu'il est loisible d'utiliser dans des équations, même si elles sont inconnues – en algèbre, on écrit tout le temps des relations entre quantités inconnues sans que cela pose le moindre problème. C'est donc très naturel : comme le remarquent d'Espagnat [234, 235] et Griffiths [236], "le point de vue contrafactuel semble être une composante nécessaire à toute version réaliste de la mécanique quantique dans laquelle les propriétés des systèmes microscopiques ne sont pas créées par la mesure". On peut également voir le critère de réalité EPR comme une affirmation de l'existence d'éléments contrafactuels.

Il reste toutefois vrai que, en pratique, il n'est jamais possible de réaliser plus d'une expérience parmi les 4 qui sont nécessaires pour obtenir une violation des inégalités BCHSH : pour une paire donnée, il faut choisir lors de la mesure une seule orientation des analyseurs, de sorte que les autres orientations resteront pour toujours du domaine des spéculations. Par exemple, dans le raisonnement du § A-2, au moins la moitié des nombres $A$, $A'$, $B$ et $B'$ sont nécessairement contrafactuels. On pourrait alors conclure que la contrafactualité est la notion essentielle à rejeter de la mécanique quantique. Nous avons déjà cité une phrase écrite par Peres [136], qui résume la situation de façon magistrale dans le point de vue standard : "des expériences non réalisées n'ont pas de résultat" ; comme Bell l'a remarqué avec regret [212] : "il est extrêmement dommage que le monde réel ne nous soit donné qu'en un seul exemplaire" !

Mais, après tout, on peut également accepter la contrafactualité et maintenir un point de vue cohérent, pourvu que l'on accepte une forme plus ou moins explicite de non-localité. Le théorème de Bell n'est un théorème d'impossibilité, ni pour la contrafactualité, ni pour les variables cachées – une sorte de forme (correcte) du théorème de von Neumann. Après tout, accepter la non-localité est naturel : pourquoi imposer aux théories contrafactuelles et/ou à variables supplémentaires d'être explicitement locales à toutes les étapes, alors qu'on ne donne pas la même contrainte à la mécanique quantique ? De fait, dans cette théorie, ni le postulat de réduction du vecteur d'état, ni le calcul des corrélations des résultats expérimentaux dans le point de vue des corrélations (§ A-2 du Chapitre XI), ne correspondent mathématiquement à ces calculs locaux. Nous verrons au § D-2-b du Chapitre V que, en termes de boîtes logiques, la mécanique quantique ne satisfait pas les relations associées aux boîtes stochastiques locales. Ainsi, même si l'on peut discuter à un niveau fondamental si oui ou non la mécanique quantique est locale, il est parfaitement clair que son formalisme ne l'est pas ; il serait donc illogique d'imposer un formalisme parfaitement local à une théorie non standard – tout particulièrement si cette théorie a pour but de reproduire la mécanique quantique ! Pour illustrer cette remarque, citons Goldstein [18] : "au cours des dernières années il est devenu courant de rencontrer des physiciens... qui ne se rendent pas compte que ce que Bell a démontré n'est pas

l'impossibilité de la théorie de Bohm, mais a une portée bien plus radicale : la mécanique quantique elle-même est non locale".

# Chapitre V

# Autres inégalités, limite de Cirelson, transmission de signaux

Ce chapitre discute plusieurs sujets reliés au théorème de Bell ; il est la suite directe du chapitre précédent. Nous commençons, au § A, par la discussion d'un certain nombre d'autres inégalités qui sont similaires au théorème de Bell, en ce sens qu'elles découlent aussi d'une hypothèse de réalisme local, tout en étant violées dans certains cas par la mécanique quantique. Ensuite, au § B, nous montrons que le facteur $\sqrt{2}$ obtenu au Chapitre IV pour la violation de l'inégalité BCHSH n'est pas particulier aux spins 1/2 ou à des types particuliers de mesures, mais universel : il provient en fait de la structure elle-même de l'espace des états de paires de systèmes à deux niveaux (théorème de Cirelson). Au § C, nous étudions la relation entre les violations des inégalités de Bell et la relativité, et abordons brièvement la situation en théorie des champs. Puisque la relativité implique qu'il est impossible de transmettre un signal plus rapidement que la vitesse de la lumière, au § D nous introduisons une condition de non-transmission des signaux instantanés que doit satisfaire toute théorie relativiste ; de façon plus générale nous discutons les boîtes logiques, en particulier les "boîtes de Popescu-Rohrlich".

## A. Autres inégalités

Il a été proposé un grand nombre d'inégalités distinctes[1] qui découlent du réalisme local (ou de l'un des autres systèmes d'hypothèses discutés au § B-1 du Chapitre IV) tout en étant contradictoires avec les prédictions de la mécanique quantique. Nous en donnerons ici un certain nombre d'exemples, en commençant bien sûr par l'inégalité originale obtenue par Bell en 1964. Le but de plusieurs de ces exemples est de fournir des illustrations des idées générales en les rendant plus intuitives, grâce à des situations de la vie courante (Mermin, le jeu de Bell). D'autres inégalités (Clauser-Horne, Eberhard) ont un but plus pratique et ont réellement été utilisées pour réaliser des expériences.

Selon une tradition maintenant bien établie, nous appellerons Alice et Bob les deux opérateurs qui, chacun dans un des deux laboratoires éloignés l'un de l'autre, effectuent des mesures sur l'une des deux particules issue de chaque paire émise par la source.

### A-1. Bell 1964

Dans sa publication initiale de 1964 [131], ce n'est pas l'inégalité BCHSH (IV-7)-(IV-9) qu'obtient Bell, mais une autre mathématiquement distincte. Sa méthode est également différente de celle que nous avons utilisée, mais cette autre inégalité peut aussi être obtenue comme un cas particulier de l'inégalité BCHSH. En effet, si nous remplaçons (IV-5) et (IV-6) par :

$$A = A(a,\lambda) \quad ; \quad B = B(b,\lambda) \quad ; \quad A' = A(-b,\lambda) \quad ; \quad B' = B(c,\lambda) \qquad \text{(V-1)}$$

où $a$, $b$ et $c$ sont 3 angles associés à 3 valeurs différentes des paramètres expérimentaux (orientations des analyseurs de Stern et Gerlach), au lieu de 4 comme ci-dessus ; la notation $-u$ désigne la direction opposée à $u$, obtenue en tournant l'analyseur de 180 degrés. Comme cette opération intervertit les résultats $+1$ et $-1$, nous avons pour tout $u$ :

$$A(-u,\lambda) = -A(u,\lambda) \qquad \text{(V-2)}$$

Supposons maintenant que, comme le prédit la mécanique quantique, les résultats obtenus par Alice et Bob soient toujours parfaitement corrélés lorsque ces derniers utilisent des directions opposées pour leurs mesures (ce qui est équivalent à supposer qu'ils sont parfaitement anticorrélés pour des

[1] Il a d'ailleurs été remarqué [139] que les inégalités de Bell sont de simples applications de théorèmes concernant les distributions marginales en théorie des probabilités [140] ; la preuve mathématique des inégalités suppose l'existence d'un espace des probabilités commun aux variables aléatoires qui sont prises en compte dans le raisonnement (on trouve là un lien avec la notion de contrafactualité).

directions de mesures parallèles). Nous avons alors :

$$A'B = A(-b,\lambda)B(b,\lambda) = 1 \tag{V-3}$$

de sorte que (IV-9) devient :

$$-2 \leq \big\langle A(a,\lambda)B(b,\lambda) - A(a,\lambda)B(c,\lambda) - A(b,\lambda)B(c,\lambda)\big\rangle + 1 \quad \leq +2 \tag{V-4}$$

Si nous notons $E(a,b)$ la valeur moyenne du produit des résultats obtenus par Alice et Bob :

$$E(a,b) = \langle A(a,\lambda)B(b,\lambda)\rangle \tag{V-5}$$

la condition de borne supérieure dans (V-4) devient :

$$E(a,b) - E(a,c) \leq 1 + E(b,c) \tag{V-6}$$

De même, si nous effectuons le même calcul en remplaçant $a$ par $-a$, cette inégalité se transforme en :

$$-E(a,b) + E(a,c) \leq 1 + E(b,c) \tag{V-7}$$

Si maintenant nous regroupons (V-6) et (V-7), nous obtenons :

$$|E(a,b) - E(a,c)| \leq 1 + E(b,c) \tag{V-8}$$

qui est l'inégalité de Bell de 1964. Nous remarquons au passage que sa démonstration requiert les corrélations parfaites contenues dans (V-2), ce qui n'est pas le cas des inégalités BCHSH.

La mécanique quantique prévoit des violations de cette inégalité : si nous choisissons $\theta_{ab} = 45°$ et $\theta_{ac} = 135°$, la relation (IV-10) donne $\sqrt{2}$ pour le membre de gauche de (V-8) alors que le membre de droite est égal à 1, donc une violation par un facteur $\sqrt{2}$.

### A-2. Inégalités de Wigner et d'Espagnat

Il existe des inégalités locales-réalistes qui contiennent directement des probabilités, au lieu de valeurs moyennes comme précédemment. Pour démontrer ces inégalités, comme dans le § A-1 (et comme pour deux spins 1/2 dans un état quantique singulet) nous supposerons que, lorsqu'Alice et Bob choisissent des directions de mesures antiparallèles, les résultats qu'ils observent sont toujours parfaitement anticorrélés.

Pour chaque réalisation de l'expérience (chaque émission d'une paire de particules), le raisonnement local-réaliste EPR montre que les résultats $A\,(a)$ d'Alice et $B\,(b)$ de Bob sont bien définis, pour tout choix des paramètres de mesure $a$ et $b$. Nous avons exposé à la fin du § A-3 du Chapitre IV le point de vue de Wigner, qui classe les réalisations successives d'une expérience en

catégories différentes ; nous avions cependant limité à deux valeurs le choix des paramètres de mesures effectuées par chacun des deux opérateurs. Ici, et comme dans la publication originale [138], nous supposons qu'Alice peut choisir parmi trois valeurs différentes $a$, $a'$ et $a''$, ainsi que Bob qui peut également choisir parmi ces trois mêmes valeurs.

Dans un premier temps, nous concentrons notre attention sur les seuls choix et les résultats d'Alice. Pour chaque réalisation, nous définissons trois nombres, tous égaux à $\pm 1$ :

$$A \equiv A\,(a) \qquad A' \equiv A\,\left(a'\right) \qquad A'' \equiv A\,\left(a''\right) \tag{V-9}$$

Nous considérons un grand nombre $N$ de réalisations de l'expérience, et nous notons $p_3(A, A', A'')$ la proportion de ces réalisations tombant dans la catégorie[2] définie par trois résultats donnés $A$, $A'$ et $A''$. De même, nous désignons par $p_2(A,\ A')$ la proportion de réalisations pour lesquelles seules les deux variables $A$ et $A''$ sont spécifiées, mais pas $A'$ ; de même pour $p_2(A,\ A'')$ et $p_2(A',\ A'')$. Nous avons alors :

$$p_2(A = +1,\ A' = -1) = p_3(+1, -1, +1) + p_3(+1, -1, -1) \tag{V-10}$$

D'autre part, la proportion $p_2(A = +1,\ A'' = -1)$ est donnée par :

$$p_2(A = +1,\ A'' = -1) = p_3(+1, +1, -1) + p_3(+1, -1, -1) \tag{V-11}$$

et enfin la proportion $p_2(A' = -1,\ A'' = +1)$ est donnée par :

$$p_2(A' = -1,\ A'' = +1) = p_3(+1, -1, +1) + p_3(-1, -1, +1) \tag{V-12}$$

Effectuons alors la somme des deux membres de droite de (V-11) et de (V-12) ; on constate qu'elle contient les deux termes du membre de droite de (V-10), plus d'autres termes. Les proportions étant des rapports de nombres positifs ou nuls, ces termes sont également positifs ou nuls. Il en découle que :

$$p_2(A = +1,\ A' = -1) \leq p_2(A = +1,\ A'' = -1) + p_2(A' = -1,\ A'' = +1) \tag{V-13}$$

qui crée une contrainte mathématique entre les proportions relatives à deux choix différents pour le paramètre de mesure.

Cette inégalité contient des nombres qui ne peuvent pas être mesurés directement : Alice ne peut pas choisir simultanément deux paramètres de mesure différents $a$ et $a'$. Mais la propriété d'anticorrélation parfaite que nous avons supposée permet d'exprimer la même inégalité en termes de résultats de mesures effectuées par Alice et Bob. Si nous posons :

$$B \equiv B\,(a) \qquad B' \equiv B\,\left(a'\right) \qquad B'' \equiv B\,\left(a''\right) \tag{V-14}$$

[2] Il existe 8 groupes différents de résultats possibles $A$, $A'$ et $A''$, dont 8 catégories ainsi définies.

nous avons $B = -A$, $B' = -A'$ et $B'' = -A''$. Nous obtenons alors[3] :

$$p_2(A = +1,\ B' = +1) \leq p_2(A = +1,\ B'' = +1) + p_2(A' = -1,\ B'' = -1) \tag{V-15}$$

où chaque terme est mesurable expérimentalement.

Or cette contrainte peut être violée en mécanique quantique. En effet, la relation (IV-3) indique que :

$$p_2(A = +1,\ A' = -1) = p_2(A = +1,\ B' = +1) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta_{aa'}}{2} \tag{V-16}$$

où $\theta_{aa'}$ désigne l'angle entre les directions $a$ et $a'$. L'inégalité (V-13) devient alors :

$$\sin^2\frac{\theta_{aa'}}{2} \leq \sin^2\frac{\theta_{aa''}}{2} + \sin^2\frac{\theta_{a'a''}}{2} \tag{V-17}$$

Dans le cas particulier où $a$, $a''$ et $a'$ sont disposés régulièrement dans un plan et dans cet ordre, nous avons $\theta_{aa''} = \theta_{a''a'} = \theta$ et $\theta_{aa'} = 2\theta$, de sorte que l'inégalité précédente devient (après simplification par $2\sin^2\theta/2$) :

$$2\cos^2\frac{\theta}{2} \leq 1 \tag{V-18}$$

qui est violée[4] dans tout l'intervalle $-\pi/2 < \theta < +\pi/2$. Ainsi apparaît un autre cas où les prédictions de la mécanique quantique sont en contradiction brutale avec celles du réalisme local.

La méthode de comptage des événements associés avec les deux membres de l'inégalité (V-15) illustre son contenu physique dans le cadre du réalisme local, en particulier parce qu'elle identifie les événements qui font la différence entre les deux membres. Elle est bien adaptée à illustrer la validité de telles inégalités s'appliquant à la vie courante. Dans son ouvrage *A la recherche du réel* ([25], p. 27), d'Espagnat formule l'inégalité en écrivant : "Dans une population quelconque, le nombre de femmes de moins de quarante ans est inférieur ou égal au nombre de femmes fumeurs augmenté du nombre des individus âgés de moins de quarante ans et non-fumeurs". Dans son essai "Les chaussettes de Bertlmann et la nature de la réalité" [95], Bell utilise des analogies avec des tests de consommateurs sur la qualité des chaussettes neuves. Toutefois, d'un point de vue expérimental, une inégalité qui contient directement des probabilités n'est pas nécessairement le meilleur choix pour réaliser des comparaisons entre mécanique quantique et réalisme local.

[3] Inutile de dire que des inégalités similaires existent pour toutes les probabilités $p_2(A = \pm 1,\ B' = \pm 1)$.

[4] La fonction $\sin^2\theta_{aa''}/2 + \sin^2\theta_{a'a''}/2 - \sin^2\theta_{aa'}/2$ passe par un minimum $-1/4$ quand $\theta_{aa''} = \theta_{a''a'} = \pi/3$ et $\theta_{aa'} = 2\pi/3$.

### A-3. Inégalité de Mermin

Une autre inégalité a été proposée par Mermin pour la même configuration expérimentale [237], mais avec des angles différents de ceux pris en compte par Wigner. Dans le § B-2-c du Chapitre III, nous avons mentionné l'image de Schrödinger destinée à illustrer le raisonnement réaliste local : il assimile les particules à des élèves passant des examens, les appareils de mesure à des examinateurs leur posant des questions, et le résultat de la mesure à la réponse de l'élève, que l'on suppose binaire (+1 pour oui, −1 pour non). Prolongeant cette image, supposons que deux élèves nommés Albert et Bernard se présentent pour être interrogés par deux examinateurs dans deux pièces séparées ; chaque examinateur tire au sort la question qu'il va poser parmi trois questions possibles, avec des probabilités 1/3 chacune (ces trois questions correspondent bien sûr aux trois réglages possibles du paramètre de mesure $a$ ou $b$). Les deux élèves se sont donné pour but de tenter de reproduire au mieux les prédictions de la mécanique quantique avec leurs réponses ; ils connaissent à l'avance les trois questions, mais ne savent pas à laquelle chacun va devoir répondre ; de plus, au moment de l'interrogation, ils ignorent quelle est la question posée à l'autre. Avant l'examen, ils sont cependant parfaitement libres de mettre au point ensemble une stratégie commune, et de convenir quelle sera la réponse de chacun à chaque question ; a priori, le nombre total de stratégies possibles est alors $2^3 \times 2^3 = 64$.

Comme plus haut, afin de reproduire les prédictions quantiques, chaque fois que les questions posées sont les mêmes, les élèves doivent faire une réponse opposée. Il leur suffit pour cela de décider à l'avance quelle réponse donnera l'un d'entre eux à chacune des trois questions, et que l'autre donnera la réponse opposée. Ceci ramène alors à 8 le nombre de stratégies possibles, qui peuvent être notées $(A, A', A'')$ où les trois nombres entre parenthèses donnent les réponses d'Albert, égales à $\pm 1$. Parmi ces stratégies, deux sont $(+1, +1, +1)$ et $(-1, -1, -1)$ : les réponses d'Albert sont alors identiques quelle que soit la question ; pour les 6 autres stratégies $(+1, +1, -1)$, $(+1, -1, -1)$, etc. deux réponses d'Albert sont du même signe et la troisième opposée.

Supposons maintenant que l'on répète l'expérience un grand nombre de fois, les élèves étant d'ailleurs libres s'ils le désirent de changer de stratégie à chaque fois ; à la fin d'une série de réalisations de l'expérience, on ne retient que le sous-ensemble des réalisations où les deux questions posées ont été différentes. Pour chaque cas retenu, deux cas sont possibles :

(i) soit la stratégie choisie par les élèves est l'une parmi les deux où les trois réponses d'Albert sont toujours identiques, quelle que soit la question ; comme celles de Bernard sont toujours opposées, les deux réponses fournies pas les élèves (résultats de mesure) sont alors nécessairement opposées, quelles que soient les questions posées de part et d'autre.

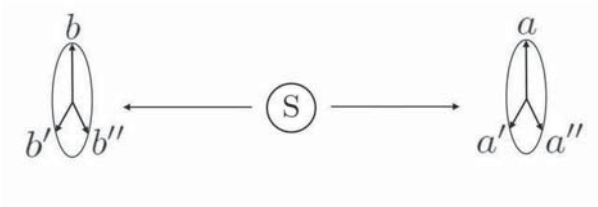


FIGURE *V.1 – Schéma d'une expérience quantique conduisant à une forte violation de l'inégalité (V-19). La source S au centre émet deux spins dans un état singulet qui se propagent vers deux appareils de mesure. Des mesures de la composante d'un spin selon l'une parmi trois directions a, a′ et a″ sont faites pour une des particules, selon l'une des trois directions b, b′ et b″ pour l'autre.*

(ii) soit c'est une des six autres stratégies qui a été choisie ; comme les questions sont tirées au hasard par les examinateurs parmi 3 possibilités (donc avec des probabilités égales à 1/3), il y a 1 chance sur 3 que le couple de questions différentes posées dans une réalisation corresponde précisément au couple de questions pour lesquelles Albert a prévu de faire la même réponse ; inversement, il y a 2 chances sur 3 pour que les deux questions tombent sur un cas où Albert a prévu de faire des réponses différentes. Dans le premier cas, du fait de la stratégie choisie, Albert et Bernard donnent des réponses opposées, ce qui correspond à une probabilité 1/3 ; dans le second cas, les deux examinateurs obtiennent des réponses identiques, ce qui correspond à une probabilité 2/3.

Pour finir, quelles que soient les stratégies choisies, la probabilité d'obtenir des réponses opposées est comprise entre 1/3 et 1, mais ne peut jamais être plus faible que 1/3. Ceci donne l'inégalité entre probabilités classiques :

$$\mathcal{P}(+1,-1)+\mathcal{P}(-1,+1)\geqslant\frac{1}{3} \qquad \text{(V-19)}$$

Revenons maintenant au problème quantique de deux spins dans un état singulet, et supposons que les trois directions $a$, $a'$ et $a''$ soient trois directions coplanaires à 120°, les trois directions $b$, $b'$ et $b''$ étant les mêmes comme plus haut. Les formules (IV-4) montrent que la probabilité d'obtenir des résultats

opposés est :

$$\mathcal{P}_{(+,-)} + \mathcal{P}_{(-,+)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \tag{V-20}$$

Comme cette probabilité est inférieure à 1/3, la valeur minimale possible d'après (V-19), nous obtenons un autre cas où les prédictions de la mécanique quantique violent des inégalités découlant du réalisme local.

### A-4. Inégalité de Clauser et Horne

Clauser et Horne [164] ont établi des inégalités, souvent appelées inégalités CH, qui sont particulièrement bien adaptées aux expériences réalisées avec des photons. Cette forme peut être obtenue sans supposer que les particules détectées fournissent un échantillon non biaisé de l'ensemble des particules émises ; ceci permet de refermer l'échappatoire de l'échantillon biaisé (§ C-1-a du Chapitre IV). De plus, elle fournit une généralisation naturelle des inégalités de Bell aux théories non déterministes (§ B-2-b du Chapitre IV). Dans bien des expériences avec des photons, des analyseurs de polarisation sont placés devant des photomultiplicateurs qui détectent les particules. La rotation de ces analyseurs permet alors de choisir la polarisation transmise, et l'angle de rotation détermine le paramètre de mesure, $a$ pour Alice, et $b$ pour Bob. Si le photon est transmis par l'analyseur, il peut ensuite être détecté par le photomultiplicateur comme un "clic", qui est ensuite enregistré par l'équipement électronique ; si le photon est absorbé par l'analyseur, rien n'est enregistré. En d'autres termes, au lieu des deux résultats qui pourraient être observés dans une expérience idéale, un seul résultat est possible dans ce cas. Pour chaque combinaison des paramètres de mesure $a$ et $b$, on peut alors mesurer un taux de coïncidence, qui correspond à l'enregistrement quasi simultané d'un clic par chacun des photomultiplicateurs.

Pour étudier cette situation, Clauser et Horne (voir aussi la thèse de Freedman [143]) se placent dans le cadre de ce qu'ils appellent "objective local theories" (théories locales objectives), c'est-à-dire des théories d'un caractère très général, déterministes ou non. Dans ce type de théorie, pour chaque réalisation de l'expérience, l'état de la source peut être décrit par une variable $\lambda$, qui est de nature quelconque et qu'il est inutile de préciser plus en détail. Lorsqu'Alice choisit la valeur $a$ pour son paramètre de mesure, et Bob choisit $b$, la probabilité $\mathcal{P}_{a,b}(\lambda)$ qu'Alice et Bob obtiennent tous deux un clic dans leurs photomultiplicateurs respectifs est le produit :

$$\mathcal{P}_{a,b}(\lambda) = \mathcal{P}_a(\lambda) \times \mathcal{P}_b(\lambda) \tag{V-21}$$

La factorisation résulte du fait que, pour chaque état $\lambda$ de la source, les événements aléatoires qui déterminent les deux détections observées sont indépendants : la probabilité $\mathcal{P}_a(\lambda)$ d'enregistrer un photon dans le laboratoire d'Alice est indépendante du choix du paramètre de mesure $b$ par Bob et du

fait qu'il détecte un photon ou non ; inversement, $\mathcal{P}_b(\lambda)$ est indépendant de $a$ et de tout événement se produisant dans le laboratoire d'Alice. Lorsque les deux laboratoires sont très éloignés, la factorisation résulte d'une hypothèse de localité (cette factorisation est discutée plus en détail au § B-2-b du Chapitre IV). Lorsque l'expérience est répétée un grand nombre de fois, pour tenir compte des fluctuations de $\lambda$ il faut prendre une valeur moyenne sur cette variable ; cette moyenne peut alors introduire de fortes corrélations entre les deux résultats. Si $\rho(\lambda)$ est la distribution de probabilité des états $\lambda$ de la source, la probabilité moyenne de la détection conjointe $D(a,b)$ de deux photons est l'intégrale :

$$D(a,b) = \int d\lambda\ \rho(\lambda)\ \mathcal{P}_a(\lambda) \times \mathcal{P}_b(\lambda) \tag{V-22}$$

#### A-4-a. Une inégalité à 6 nombres

Nous considérons 6 nombres réels $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$, $X$ et $Y$ tels que :

$$\begin{aligned} 0 \le x_1 \le X \quad &; \quad 0 \le x_2 \le X \\ 0 \le y_1 \le Y \quad &; \quad 0 \le y_2 \le Y \end{aligned} \tag{V-23}$$

et introduisons la fonction $U$ par :

$$U = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_2 y_1 - x_1 y_2 - Y x_2 - X y_1 \tag{V-24}$$

Nous avons alors :

$$-XY \le U \le 0 \tag{V-25}$$

Pour établir ces inégalités, commençons par supposer que $x_1 \ge x_2$. Le coefficient de $y_2$ dans $U$ est alors négatif, de sorte que $U$ est toujours plus grand que (ou égal à) la valeur obtenue lorsque $y_2$ prend sa valeur minimale $y_2 = Y$ ; nous avons donc :

$$U \ge x_1 y_1 + x_2 y_1 + (x_2 - x_1)\, Y - Y x_2 - X y_1 = x_1 (y_1 - Y) + y_1 (x_2 - X) \tag{V-26}$$

Dans le membre de droite de cette inégalité, le coefficient $(y_1 - Y)$ de $x_1$ est également négatif (ou nul) ; ce terme est donc plus grand (ou égal à) la valeur qu'il prend lorsque $x_1$ prend sa valeur maximale $x_1 = X$, de sorte que :

$$U \ge X (y_1 - Y) + y_1 (x_2 - X) = x_2 y_1 - XY \tag{V-27}$$

Pour finir, puisque $y_1$ est positif (ou nul), le membre de droite de cette inégalité est minimal lorsque $x_2 = 0$ (ce qui est compatible avec notre hypothèse $x_1 \ge x_2$) ; donc :

$$U \ge -XY \tag{V-28}$$

De plus, toujours lorsque $x_1 \geq x_2$ de sorte que le coefficient $(x_2 - x_1)$ de $y_2$ est négatif (ou nul), $U$ est toujours plus petit que (ou égal à) la valeur obtenue quand $y_2$ prend sa valeur minimale $y_2 = 0$ :

$$U \leq (x_1 + x_2)\, y_1 - Y x_2 - X y_1 \tag{V-29}$$

Dans le membre de droite de cette inégalité, le coefficient $(y_1 - Y)$ de $x_2$ est négatif (ou nul), de sorte que ce terme est plus petit que sa valeur obtenue lorsque $x_2 = 0$ ; nous avons donc :

$$U \leq (x_1 - X)\, y_1 \tag{V-30}$$

Comme $y_1$ est positif, le membre de droite est plus petit que la valeur obtenue lorsque $x_1$ prend sa valeur minimale $x_1 = X$, de sorte que :

$$U_{\max} \leq 0 \tag{V-31}$$

Enfin, si $x_2 \geq x_1$ le raisonnement est presque le même, mais les valeurs des variables et extrema sont échangées. La minimisation de $U$ demande que $y_2 = 0$, de sorte que $U$ prend la forme (V-29) ; le minimum correspond alors à $x_2 = X$, ce qui conduit à $U = x_1 y_1 - XY$, qui à son tour atteint son minimum absolu (V-28) quand $x_1 = 0$. La maximisation de $U$ demande que $y_2 = Y$, de sorte que $U$ prend la forme (V-26) ; le maximum correspond alors à $x_1 = 0$, ce qui conduit à $U = y_1\,(x_2 - X)$, qui à son tour atteint son maximum absolu (V-31) lorsque $x_2 = X$. Ceci complète la démonstration des inégalités (V-25).

#### A-4-b. Application à une expérience de Bell

L'inégalité précédente peut être appliquée à une expérience de Bell du type schématisé sur la Figure IV.1 (mais ici nous supposons qu'une seule sorte de résultat peut être obtenu dans chaque laboratoire, un clic du photomultiplicateur). Pour chaque réalisation de l'expérience, Alice choisit une des deux valeurs $a$ ou $a'$ pour l'orientation de son analyseur de polarisation ; de même, Bob choisit soit $b$, soit $b'$, pour l'orientation de son analyseur. Nous posons alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_a(\lambda) &= x_1 \quad ; \quad \mathcal{P}_{a'}(\lambda) = x_2 \\ \mathcal{P}_b(\lambda) &= y_1 \quad ; \quad \mathcal{P}_{b'}(\lambda) = y_2 \end{aligned} \tag{V-32}$$

(i) Une première forme des inégalités CH

Comme les probabilités sont des nombres positifs (ou nuls) plus petits que (ou égaux à) l'unité, les inégalités (V-23) sont satisfaites si nous choisissons $X = Y = 1$. Nous obtenons alors :

$$-1 \leq \mathcal{P}_{a,b}(\lambda) + \mathcal{P}_{a',b'}(\lambda) + \mathcal{P}_{a',b}(\lambda) - \mathcal{P}_{a,b'}(\lambda) - \mathcal{P}_{a'}(\lambda) - \mathcal{P}_b(\lambda) \leq 0 \tag{V-33}$$

Nous supposons que l'expérience est répétée un grand nombre de fois, et notons $D_2(a,b)$ la fraction des réalisations où Alice et Bob obtiennent des signaux en coïncidence ; $D_2(a,b)$ n'est autre que la moyenne de $\mathcal{P}_{a,b}(\lambda)$ sur $\lambda$. Nous appelons $D_1(a)$ la fraction des réalisations où Alice obtient un clic, que Bob en obtienne un ou pas ; de même, $D_1(b)$ est la fraction des réalisations où Bob obtient un clic, qu'Alice en obtienne un ou pas. Si nous prenons la moyenne de (V-33), nous obtenons l'inégalité :

$$-1 \leq D_2(a,b) + D_2\left(a',b'\right) + D_2\left(a',b\right) - D_2\left(a,b'\right) - D_1\left(a'\right) - D_1(b) \leq 0 \tag{V-34}$$

De façon équivalente, la seconde inégalité peut être écrite sous la forme :

$$D_2(a,b) + D_2\left(a',b'\right) + D_2\left(a',b\right) - D_2\left(a,b'\right) \leq D_1\left(a'\right) + D_1(b) \tag{V-35}$$

Nous utilisons maintenant la mécanique quantique pour calculer le terme du milieu de (V-34). Dans les résultats du § A-1 du Chapitre IV, nous supposons que le résultat + correspond à un clic dans le détecteur, et le résultat − à l'absence de détection. A partir des relations (IV-3) et (IV-4), nous obtenons la correspondance suivante :

$$\begin{aligned} D_2(a,b) &\Leftrightarrow \mathcal{P}_{(+,+)}(a,b) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta_{ab}}{2} = \frac{1}{4}\left[1-\cos\theta_{ab}\right] \\ D_1(a) &\Leftrightarrow \mathcal{P}_{(+,+)}(a,b) + \mathcal{P}_{(+,-)}(a,b) = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{V-36}$$

Le terme du milieu de (V-34) correspond donc à la valeur moyenne quantique :

$$\langle R\rangle = -\frac{1}{4}\left[\cos\theta_{ab} + \cos\theta_{a'b'} + \cos\theta_{a'b} - \cos\theta_{ab'} + 2\right] \tag{V-37}$$

qui n'est autre que :

$$\langle R\rangle = \frac{\langle Q\rangle}{4} - \frac{1}{2} \tag{V-38}$$

où $\langle Q\rangle$ est donné en (IV-11). La discussion du § A-3 du Chapitre IV montre donc que $\langle R\rangle$ varie entre $-\left(1+\sqrt{2}\right)/2$ et $+\left(\sqrt{2}-1\right)/2 > 0$, de sorte que les deux inégalités (V-34) sont effectivement violées.

Dans le calcul précédent, nous avons supposé que toutes les particules émises sont mesurées par Alice et Bob. Si ce n'est pas le cas, et si le taux de détection de paires est très petit devant le taux de détection de particules uniques, l'inégalité ne peut jamais être violée. Par exemple, dans les expériences mettant en jeu une cascade radiative atomique, il n'existe aucune corrélation entre les directions des photons émis ; la plupart des photons ratent leurs cibles (les détecteurs). Le taux de coïncidences observées est alors beaucoup plus faible que le taux de détections d'un seul photon, de sorte que les termes $D_2$ peuvent être négligés devant les termes en $D_1$. De

plus, les termes de détection d'un seul photon sont bien plus petits que 1/2. Dans un tel cas, l'inégalité est satisfaite pour des raisons triviales.

L'inégalité (V-35) est utile dans toutes les expériences où le taux de coïncidences est comparable au taux de détection simple. C'est le cas lorsque les paires de photons sont obtenues par conversion paramétrique de la lumière dans un cristal non linéaire, ce qui fournit une source où les directions d'émission des deux photons sont fortement corrélées. Cette méthode a permis des expériences conduisant à l'observation de violations particulièrement nettes des inégalités de Bell, dans des conditions où l'échappatoire de l'échantillon biaisé (§ C-1-a du Chapitre IV) était fermé [159, 160, 238, 239] (certaines de ces expériences utilisent des inégalités qui diffèrent des inégalités CH, mais sont mathématiquement équivalentes).

(ii) Inégalités CH avec l'hypothèse de non-amplification

Pour obtenir une inégalité qui soit utilisable dans les expériences où le taux de détection de paires est bien plus petit que celui de particules uniques, Clauser et Horne introduisent une hypothèse supplémentaire : certaines expériences sont réalisées en retirant, soit l'un des deux analyseurs de polarisation, soit les deux ; dans ce cas, la variable d'orientation $a$ ou $b$ correspondant à l'analyseur supprimé disparaît évidemment de la probabilité de détection locale. Suivant la notation de Clauser et Horne, nous notons $\mathcal{P}_{a=\infty}(\lambda)$ la probabilité de détection dans le laboratoire d'Alice lorsque son analyseur est absent, et $\mathcal{P}_{b=\infty}(\lambda)$ la probabilité correspondante pour Bob. Nous posons alors :

$$\mathcal{P}_{a=\infty}(\lambda) = X \qquad ; \qquad \mathcal{P}_{b=\infty}(\lambda) = Y \tag{V-39}$$

Clauser et Horne font alors une hypothèse de non-amplification qu'ils désignent pas "no-enhancement assumption" : pour chaque émission caractérisée par $\lambda$, la probabilité d'un clic lorsque l'analyseur de polarisation est présent devant le photomultiplicateur est inférieure ou égale à la probabilité en l'absence d'analyseur. Comme l'analyseur est un dispostif purement passif, qui ne peut qu'absorber certaines polarisations et en transmettre d'autres, cette hypothèse est très plausible physiquement. Quels que soient $a$, $b$, et $\lambda$, on a alors :

$$\mathcal{P}_a(\lambda) \leq \mathcal{P}_{a=\infty}(\lambda) \quad ; \quad \mathcal{P}_b(\lambda) \leq \mathcal{P}_{b=\infty}(\lambda) \tag{V-40}$$

Les conditions (V-23) sont alors satisfaites.

L'inégalité (V-25) devient ainsi :

$$\begin{aligned} -\mathcal{P}_{a=\infty}(\lambda)\,\mathcal{P}_{b=\infty}(\lambda) \;\leq\; & \mathcal{P}_{a,b}(\lambda) + \mathcal{P}_{a',b'}(\lambda) + \mathcal{P}_{a',b}(\lambda) - \mathcal{P}_{a,b'}(\lambda) \\ & - \mathcal{P}_{b=\infty}(\lambda)\,\mathcal{P}_{a'}(\lambda) - \mathcal{P}_{a=\infty}(\lambda)\,\mathcal{P}_b(\lambda) \;\leq 0 \end{aligned} \tag{V-41}$$

Prenons maintenant une moyenne sur $\lambda$ comme dans (V-22) ; nous notons $D(\infty, b)$ le taux de coïncidence lorsqu'Alice retire son analyseur, ainsi que

$D(a,\infty)$ le taux de coïncidence lorsque Bob retire son analyseur, et enfin $D(\infty,\infty)$ le taux de coïncidence lorsque tous les deux les retirent. Nous obtenons alors :

$$-D(\infty,\infty) \leq D(a,b) + D\left(a',b'\right) + D\left(a',b\right) - D\left(a,b'\right) - D\left(a',\infty\right) - D(\infty,b) \leq 0 \quad \text{(V-42)}$$

Cette inégalité ne contient que des taux de coïncidence, au lieu de combinaisons de taux de détection simples et doubles. Le même calcul que plus haut montre que la mécanique quantique prédit des violations de cette inégalité.

De nombreuses expériences ont été réalisées avec des angles égaux entre $a$ et $b$, $b$ et $a'$, $a'$ et $b'$, comme sur la Figure IV.4. Lorsque le taux de coïncidence $D(\phi)$ ne dépend que de la différence d'angle $\phi$ entre les orientations des deux analyseurs, la relation (V-42) prend la forme plus simple :

$$-D(\infty,\infty) \leq 3D(\phi) - D(3\phi) - D\left(a',\infty\right) - D(\infty,b) \leq 0 \quad \text{(V-43)}$$

Cette inégalité a été utilisée dans plusieurs expériences, par exemple celles des Refs. [143, 148, 150].

### A-5. Inégalités de Eberhard

Les inégalités BCHSH concernent le cas où les appareils de mesure fournissent toujours un résultat, $+1$ ou $-1$, pour chaque mesure effectuée sur chaque paire de particules émise par la source. Or, en pratique, et que les particules détectées soient des photons ou pas, les appareils de mesure ne les détectent jamais toutes. Une première raison est qu'ils ne captent que celles qui sont émises dans un certain angle solide à partir de la source ; certaines paires ne donnent lieu qu'à une, voire zéro, détection. Une autre raison est que, même si la particule pénètre dans le détecteur, le rendement de ce dernier est inférieur à 100 %. L'inégalité de Eberhard [215] permet de prendre en compte de telles absences de détection, auxquelles par convention on attribue le résultat de mesure 0.

On considère donc une expérience où, comme habituellement, une source commune émet des particules vers deux laboratoires éloignés, celui d'Alice et celui de Bob, qui tous deux effectuent des mesures sur ces particules. Alice choisit l'un des paramètres de mesure $a$ ou $a'$, Bob l'un des paramètres de mesure $b$ ou $b'$, de sorte qu'en tout 4 configurations expérimentales sont possibles. La différence avec le cas habituel est cependant que 3 résultats de mesure (et non 2) sont observables par Alice et Bob, les 3 résultats, $+1$, $-1$, et 0 (pas de détection). A chaque émission de paires, l'un de ces 3 résultats est enregistré par chacun des appareils des deux opérateurs.

#### A-5-a. Emissions et détections

Nous distinguerons dans ce qui suit deux types d'événements se produisant au cours de chaque réalisation de l'expérience :

(i) les événements d'émission de paires de particules, repérés par un numéro $n = 1, 2, ..., N$ ;

(ii) les événements de détection double ; chacun est caractérisé par l'une des 4 configurations possibles des appareils de mesure et par l'un des $3 \times 3 = 9$ résultats possibles. Chaque événement de détection est donc associé à l'une des 36 cases marquées d'un astérisque dans le tableau suivant :

| | | $a$ | | | $a'$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $+1$ | $0$ | $-1$ | $+1$ | $0$ | $-1$ |
| $b$ | $+1$ | * | * | * | * | * | * |
| | $0$ | * | * | * | * | * | * |
| | $-1$ | * | * | * | * | * | * |
| $b'$ | $+1$ | * | * | * | * | * | * |
| | $0$ | * | * | * | * | * | * |
| | $-1$ | * | * | * | * | * | * |

Lorsque l'expérience est réalisée un très grand nombre de fois, on peut mesurer la fréquence relative avec laquelle chacune des cases est obtenue et en déduire une probabilité.

Examinons maintenant comment caractériser les événements d'émission dans le cadre d'une théorie réaliste locale de cette expérience ; notre but est de les classer en différentes catégories, comme dans le raisonnement de Wigner [138] déjà mentionné au § A-3, (iii) du Chapitre IV. Le raisonnement EPR montre que, lors de l'émission de la particule qui se dirige vers Alice, la particule emporte des propriétés qui déterminent le résultat parmi les 3 possibles si Alice choisit $a$, ainsi que le résultat parmi les 3 possibles si Alice choisit $a'$ ; il existe donc 9 catégories de particules qui peuvent atteindre le laboratoire d'Alice. Il en est évidemment de même pour la particule de Bob. Pour la paire de particules émise par la source, cela fait 81 catégories de propriétés possibles[5]. Nous ne faisons aucune hypothèse concernant les probabilités d'apparition de chacune de ces catégories, mais nous supposons que la source est stable et que ces probabilités ne varient pas : si l'on répète l'expérience un très grand nombre de fois, la proportion de chacune de ces catégories tend vers une constante bien déterminée.

[5]Pour une théorie non locale, il faudrait prendre en compte le dispositif expérimental dans son ensemble, qui a 4 configurations possibles ; pour chacune de ces configurations, 9 résultats sont possibles. Les paires émises se diviseraient alors en $9^4$ catégories possibles.

Le tableau ci-dessus a été introduit pour spécifier la catégorie d'un événement de double détection ; nous allons voir qu'il permet également de préciser la catégorie d'un événement d'émission d'une paire. La donnée d'une case du tableau parmi les 36 possibles n'est évidemment pas suffisante pour déterminer la catégorie de l'événement d'émission parmi les 91 qui sont accessibles : la seule connaissance des deux résultats pour un choix donné des deux paramètres de mesures ne donne aucune information sur les résultats qui auraient été obtenus pour d'autres configurations expérimentales. Il est nécessaire de spécifier les résultats pour les 4 configurations possibles. Une catégorie d'événements d'émission est donc caractérisée par la donnée, non pas d'une, mais de 4 cases formant un rectangle sur le diagramme, comme les 4 cases marquées X dans le diagramme suivant :

| | | $a$ | | | $a'$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $+1$ | $0$ | $-1$ | $+1$ | $0$ | $-1$ |
| | $+1$ | * | X | * | X | * | * |
| $b$ | $0$ | * | * | * | * | * | * |
| | $-1$ | * | * | * | * | * | * |
| | $+1$ | * | * | * | * | * | * |
| $b'$ | $0$ | * | X | * | X | * | * |
| | $-1$ | * | * | * | * | * | * |

#### A-5-b. Obtention d'inégalités

Supposons maintenant que l'on réalise l'expérience un grand nombre de fois en utilisant chacune des 4 configurations expérimentales. Si ces résultats sont compatibles avec ceux d'une théorie réaliste locale, on peut en principe les ranger par groupes selon les 91 catégories d'émission définies précédemment. Toutefois, nous avons vu qu'un événement de détection donné peut résulter de plusieurs catégories d'émission ; la connaissance des résultats ne suffit dont pas nécessairement à les ranger selon ces catégories, même si l'on sait que ce rangement est possible, puisqu'il existe de façon sous-jacente. Nous allons maintenant chercher une façon de déterminer par une inégalité si, dans un ensemble d'un grand nombre de résultats expérimentaux, de telles catégories sous-jacentes peuvent exister.

Considérons l'une des 36 cases du tableau des résultats, par exemple celle associée à des mesures de paramètres $a$ et $b$ conduisant toutes deux à des résultats $+1$ ; la case est repérée par un T sur le tableau :

| | | $a$ | | | $a'$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $+1$ | $0$ | $-1$ | $+1$ | $0$ | $-1$ |
| | $+1$ | T | * | * | x | x' | x" |
| $b$ | $0$ | * | * | * | * | * | * |
| | $-1$ | * | * | * | * | * | * |
| | $+1$ | y | * | * | | | |
| $b'$ | $0$ | y' | * | * | | | |
| | $-1$ | y" | * | * | | | |

Sa probabilité d'apparition $\mathcal{P}_{a,b}(+1,+1)$ est la somme de celles associées à toutes les catégories d'émission incluant ce résultat. C'est donc la somme des probabilités de toutes les catégories dont le point représentatif en haut à droite du rectangle est l'un quelconque des trois points notés x, x' et x" sur le tableau, le point en bas à gauche étant l'un quelconque des trois points repérés par y, y' et y" sur le tableau (le coin en bas à droite tombe alors dans l'une des 9 cases laissées en blanc en bas à droite du tableau).

Nous pouvons retirer de cet échantillon les événements d'émission incluant l'une des cases x' et x". La probabilité $\overline{\mathcal{P}}$ associée aux catégories restantes obéit à l'inégalité :

$$\overline{\mathcal{P}} \geq \mathcal{P}_{a,b}(+1,+1) - \mathcal{P}_{a',b}(0,+1) - \mathcal{P}_{a',b}(-1,+1) \qquad \text{(V-44)}$$

En effet, la probabilité $\mathcal{P}_{a',b}(0,+1)$ comprend, non seulement celle des catégories d'émission conduisant aux résultats conjoints $a' \Rightarrow 0$, $b \Rightarrow +1$ et $a \Rightarrow +1$, mais aussi celles pour lesquelles la mesure $a$ fournit les résultats 0 et $-1$ ; la différence de (V-44) retranche donc un excès de probabilité, de sorte que le membre de droite est plus petit que $\overline{\mathcal{P}}$. De même, la probabilité $\mathcal{P}_{a',b}(-1,+1)$ retranche un trop grand nombre de catégories d'événements puisqu'elle ne sélectionne pas la valeur de la mesure $a$.

A l'échantillon restant, retranchons maintenant les émissions associées à l'une des cases y ou y'. Il ne reste alors que la probabilité $\tilde{\mathcal{P}}$ associée à une catégorie bien définie d'événements d'émission, celle associée aux 4 points T, X, Y et Z formant les coins d'un carré dans le tableau suivant :

| | | $a$ | | | $a'$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $+1$ | $0$ | $-1$ | $+1$ | $0$ | $-1$ |
| | $+1$ | T | * | * | X | * | * |
| $b$ | $0$ | * | * | * | * | * | * |
| | $-1$ | * | * | * | * | * | * |
| | $+1$ | Y | * | * | Z | * | * |
| $b'$ | $0$ | * | * | * | * | * | * |
| | $-1$ | * | * | * | * | * | * |

Cette probabilité $\tilde{\mathcal{P}}$ est positive, et le même raisonnement que celui qui vient d'être fait montre qu'elle obéit à :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{P}} &\geq \overline{\mathcal{P}} - \mathcal{P}_{a,b'}(+1,0) - \mathcal{P}_{a,b'}(+1,-1) \\ &\geq \mathcal{P}_{a,b}(+1,+1) - \mathcal{P}_{a',b}(0,+1) - \mathcal{P}_{a',b}(-1,+1) \\ &\qquad - \mathcal{P}_{a,b'}(+1,0) - \mathcal{P}_{a,b'}(+1,-1)\end{aligned} \tag{V-45}$$

Mais, d'autre part, $\tilde{\mathcal{P}}$ est majorée par la probabilité associée à l'un quelconque des points marqués T, X, Y ou Z sur le tableau précédent ; si nous choisissons Z, nous obtenons :

$$\mathcal{P}_{a',b'}(+1,;+1) \geq \tilde{\mathcal{P}} \tag{V-46}$$

La conjonction de cette relation et de (V-45) conduit à la forme de Eberhard d'une inégalité de Bell :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{a',b'}(+1,;+1) \geq \mathcal{P}_{a,b}(+1,+1) - \mathcal{P}_{a',b}(0,+1) - \mathcal{P}_{a',b}(-1,+1) \\ - \mathcal{P}_{a,b'}(+1,0) - \mathcal{P}_{a,b'}(+1,-1)\end{aligned} \tag{V-47}$$

Elle exprime que la probabilité associée au coin en bas à droite du carré du tableau précédent est supérieure à la différence entre la probabilité associée au coin diagonalement opposé et de 4 probabilités associées à des résultats sur la même ligne et la même colonne que ce point.

#### A-5-c. Généralisation

Dans le raisonnement précédent, nous sommes partis du coin en haut à gauche du carré, mais nous aurions pu partir du coin diagonalement opposé, ce qui correspond au diagramme :

| | | $a$ | | | $a'$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $+1$ | $0$ | $-1$ | $+1$ | $0$ | $-1$ |
| | $+1$ | Z | * | * | Y | * | * |
| $b$ | $0$ | * | * | * | y' | * | * |
| | $-1$ | * | * | * | y" | * | * |
| | $+1$ | X | x' | x" | T | * | * |
| $b'$ | $0$ | * | * | * | * | * | * |
| | $-1$ | * | * | * | * | * | * |

où les événements de détection retranchés sont ici aussi représentés par x', x" et y', y". L'inégalité correspondante est alors :

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}_{a,b}(+1,+1) \geq \\ &\mathcal{P}_{a',b'}(+1,+1) - \mathcal{P}_{a,b'}(0,+1) - \mathcal{P}_{a,b'}(-1,+1) - \mathcal{P}_{a',b}(+1,0) - \mathcal{P}_{a',b}(+1,-1)\end{aligned} \tag{V-48}$$

Elle est simplement obtenue à partir de (V-47) par interversion de $a$ et $a'$, ainsi que de $b$ et $b'$.

En fait, nous pouvons placer un sommet dans l'une quelconque des 9 cases du carré $3 \times 3$ en haut à gauche, et le sommet diagonalement opposé dans l'une quelconque des 9 cases du carré $3 \times 3$ en bas à droite, et obtenir de nouvelles inégalités. Par exemple, le diagramme :

| | | $a$ | | | $a'$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $+1$ | $0$ | $-1$ | $+1$ | $0$ | $-1$ |
| | $+1$ | * | * | * | * | * | * |
| $b$ | $0$ | * | * | * | * | * | * |
| | $-1$ | * | * | T | x' | x" | X |
| | $+1$ | * | * | y' | * | * | * |
| $b'$ | $0$ | * | * | y" | * | * | * |
| | $-1$ | * | * | Y | * | * | Z |

conduit à l'inégalité :

$$\mathcal{P}_{a',b'}\left(-1,;-1\right) \geq$$
$$\mathcal{P}_{a,b}\left(-1,-1\right) - \mathcal{P}_{a',b}\left(0,-1\right) - \mathcal{P}_{a',b}\left(+1,-1\right) - \mathcal{P}_{a,b'}\left(-1,0\right) - \mathcal{P}_{a,b'}\left(-1,+1\right) \tag{V-49}$$

Cette fois, ce sont les résultats $+1$ et $-1$ qui sont intervertis par rapport à l'inégalité (V-47).

Ainsi, chacun des 81 rectangles associés aux divers événements d'émission donne lieu à des inégalités ; toutes ne sont bien sûr pas indépendantes. Nous allons nous intéresser à deux d'entre elles, (V-47) et (V-49).

#### A-5-d. Lien avec l'inégalité BCHSH

Il est intéressant de relier les inégalités de Eberhard à l'inégalité BCHSH – *cf.* relation (IV-9). Cette dernière porte en effet sur les valeurs moyennes de produits du type :

$$\langle AB \rangle = \mathcal{P}_{a,b}\left(+1,+1\right) + \mathcal{P}_{a,b}\left(-1,-1\right) - \mathcal{P}_{a,b}\left(+1,-1\right) - \mathcal{P}_{a,b}\left(-1,+1\right) \tag{V-50}$$

soit, compte tenu du fait que la somme des 4 probabilités est égale à 1 :

$$\begin{aligned} \langle AB \rangle &= 2\left[\mathcal{P}_{a,b}\left(+1,+1\right) + \mathcal{P}_{a,b}\left(-1,-1\right)\right] - 1 \\ &= 1 - 2\left[\mathcal{P}_{a,b}\left(+1,-1\right) + \mathcal{P}_{a,b}\left(-1,+1\right)\right] \end{aligned} \tag{V-51}$$

On obtient de même les 3 autres valeurs moyennes $\langle A'B \rangle$, $\langle AB' \rangle$ et $\langle A'B' \rangle$ ; pour la première par exemple, il suffit de remplacer au second membre $a$ par $a'$ dans les probabilités du second membre de (V-51).

Supposons maintenant, comme on le fait pour établir l'inégalité BCHSH, que les résultats 0 ne soient jamais obtenus ; les probabilités $\mathcal{P}$ s'annulent alors dès que l'un des résultats s'annule, de sorte qu'il ne subsiste dans chacun des membres de droite de (V-47) et (V-49) que 4 probabilités. Si maintenant nous effectuons la somme de ces deux inégalités nous obtenons, compte tenu de (V-51) :

$$\frac{1}{2}\left[\left\langle A'B'\right\rangle + 1\right] \geq \frac{1}{2}\left[\langle AB\rangle + 1\right] - \frac{1}{2}\left[-\left\langle A'B\right\rangle + 1\right] - \frac{1}{2}\left[-\left\langle AB'\right\rangle + 1\right] \quad \text{(V-52)}$$

c'est-à-dire, en multipliant par 2 :

$$\left\langle A'B'\right\rangle - \langle AB\rangle - \left\langle A'B\right\rangle - \left\langle AB'\right\rangle \geq -2 \quad \text{(V-53)}$$

et donc :

$$\langle AB\rangle + \left\langle A'B\right\rangle + \left\langle AB'\right\rangle - \left\langle A'B'\right\rangle \leq 2 \quad \text{(V-54)}$$

Nous retrouvons bien ainsi l'une des inégalités BCHSH (*cf.* note 2).

#### A-5-e. Lien avec l'inégalité CH

Les inégalités de Clauser-Horne et de Eberhard sont liées. On peut s'en convaincre en fusionnant en une seule catégorie les résultats $-1$ et 0 dans l'inégalité de Eberhard. La référence [201] montre alors qu'une inégalité plus simple est obtenue :

$$\mathcal{P}_{a,b}\left(+1,+1\right) - \mathcal{P}_{a,b'}\left(+1,0\right) - \mathcal{P}_{a',b}\left(0,+1\right) - \mathcal{P}_{a',b'}\left(+1,+1\right) \leq 0 \quad \text{(V-55)}$$

qui est appelée l'inégalité CH-E.

#### A-5-f. Violations quantiques

Lorsque le résultat 0 n'est jamais obtenu, nous savons que l'inégalité BCHSH peut être violée dans un facteur $\sqrt{2}$, donc un facteur important. Comme les relations (V-47) et (V-49) entraînent l'inégalité BCHSH, c'est donc qu'au moins l'une d'entre elles n'est pas satisfaite : son premier membre est suffisamment inférieur au second pour induire une grande violation de l'inégalité BCHSH. Supposons maintenant que l'on tienne compte de la possibilité de résultats nuls (non-détection des particules) ; si les probabilités correspondantes restent faibles, par continuité le premier membre reste inférieur au second, et la violation subsiste. Ce raisonnement qualitatif montre que, tant que les résultats nuls ne sont pas trop fréquents, la mécanique quantique doit conduire à des violations des inégalités de Eberhard.

Dans la référence [215], Eberhard effectue un calcul plus précis des violations maximales des inégalités prédites par la mécanique quantique. La méthode est basée sur le calcul des valeurs propres d'une matrice $4 \times 4$, et fait

intervenir un calcul numérique. Elle permet de déterminer des conditions expérimentales optimales, compte tenu des absences de détection et d'un "bruit de fond" des détecteurs. Ces conditions spécifient un vecteur d'état optimal pour les spins des deux particules intriquées, ainsi que des angles d'orientation des analyseurs ; l'un comme l'autre diffèrent des paramètres optimaux associés à l'inégalité BCHSH. En ce qui concerne le premier, un résultat particulièrement intéressant est que sa valeur optimale n'est pas un "état maximalement intriqué" (comme le serait par exemple un état singulet pour deux spins), mais un état différent, qui tend même vers un simple produit sans corrélations à la limite des faibles taux. On montre ainsi que, si avec l'inégalité BCHSH une efficacité de 82.8 % est indispensable pour mettre en évidence une violation du réalisme local sans échappatoire possible (§ C-1 du Chapitre IV), une efficacité de 66.7 % est suffisante avec les inégalités de Eberhard dans des conditions expérimentales optimisées qui leur sont associées.

Des expériences prenant avantage de cette amélioration ont été réalisées en 2012 [239] et 2015 [159].

### A-6. Le jeu de Bell

Pour écrire les résultats des expériences en termes d'une variable binaire (égale à $\pm 1$), introduisons les nombres $G_\pm$ définis par :

$$G_\pm(A,B) = \frac{1 \pm AB}{2} \tag{V-56}$$

et définissons $S$ comme :

$$S = G_+(A,B) + G_+(A,B') + G_+(A',B) + G_-(A',B') = 2 + \frac{\overline{M}}{2} \tag{V-57}$$

où :

$$\overline{M} = AB + AB' + A'B - A'B' \tag{V-58}$$

Ce nombre $\overline{M}$ est en fait très similaire au nombre $M$ défini en (IV-7), la seule différence étant la position du signe moins qui est ici placé en dernier ; cependant cette différence disparaît par un simple échange des définitions de $b$ et $b'$. Donc $M$ et $\overline{M}$ possèdent les mêmes propriétés et, en termes de la quantité $S$ définie en (V-57), l'inégalité BCHSH $-2 \leq \overline{M} \leq +2$ devient $1 \leq S \leq 3$. En conséquence, dans le cadre du réalisme local, la valeur moyenne $\langle S \rangle$ de $S$ obéit à la relation :

$$1 \leq \langle S \rangle \leq 3 \tag{V-59}$$

En revanche, les résultats du § A-3 du Chapitre IV (avec échange de $b$ et $b'$) montrent que la mécanique quantique prédit des violations de cette inégalité :

$\langle \overline{M} \rangle$ peut atteindre la valeur $2\sqrt{2}$, et donc $\langle S \rangle$ la valeur $2+\sqrt{2} = 3.141$ qui est supérieure à 3.

Ce calcul peut servir de base à l'introduction d'un jeu pour Alice et Bob, appelé par Gisin le "jeu de Bell" [170]. Les deux joueurs sont placés dans deux pièces différentes, avec aucune communication possible entre eux ; toutefois, avant que ne commence le jeu, ils peuvent décider ensemble d'une stratégie commune pour essayer de gagner (c'est un jeu collaboratif). Dès que l'expérience commence, toutes les dix secondes (par exemple) une lampe s'allume dans chacune de leurs pièces, aléatoirement verte ou rouge. Dans chaque pièce, la couleur est déterminée indépendamment par un générateur de nombres aléatoires local (ou par le libre choix d'un auxiliaire local du jeu attaché à la pièce en question) ; ni Alice ni Bob ne peuvent influencer ces choix, qui sont complètement incorrélés entre les deux pièces. Dès qu'Alice et Bob voient la couleur, chacun d'entre eux presse à sa guise, soit un bouton "oui", soit un bouton "non". La règle du jeu est la suivante : pour chaque événement où au moins une des deux couleurs est verte, Alice et Bob reçoivent un point si leurs réponses sont les mêmes, aucun sinon ; pour tout événement où les deux couleurs sont rouges, ils reçoivent un point si leurs réponses sont opposées, aucun sinon.

Un ordinateur enregistre tous les événements, les couleurs des lampes et les choix faits ensuite par Alice et Bob. Dans un premier temps, l'ordinateur prend uniquement en compte tous les événements où deux lampes vertes se sont allumées, et calcule le nombre moyen de fois où Alice et Bob ont reçu un point (il divise le nombre de fois où un point a été obtenu par le nombre total d'événements vert-vert). Puis il effectue le même calcul pour les trois autres sortes d'événements (vert-rouge, rouge-vert, et rouge-rouge). Enfin il ajoute les 4 moyennes pour obtenir le score final $\mathcal{S}$. Si le score final est supérieur à 3, Alice et Bob ont gagné le jeu, sinon ils ont perdu.

Si Alice et Bob pressent les boutons au hasard, leurs chances de recueillir un point sont une sur deux, et la somme $\mathcal{S}$ prend nécessairement une valeur proche de 2 ; ils perdent le jeu. Peuvent-ils alors utiliser une stratégie moins élémentaire pour gagner ? En fait, s'ils ne font pas usage de la physique quantique, cela leur est impossible [6]. Ils peuvent établir une stratégie commune, et décider à l'avance ce qu'Alice fera pour chaque événement dans les deux cas, lampe verte ou rouge, et de même pour Bob. Chacun d'entre eux peut même emporter un tableau contenant, par exemple 1000 lignes correspondant aux 1000 premiers événements et contenant les choix ("oui" ou "non") à faire dans les deux cas possibles (vert et rouge). Mais cela revient à définir une fonction $A(a,\lambda)$ pour Alice, $B(b,\lambda)$ pour Bob ; les valeurs de ces fonctions peuvent alors être reportées dans l'expression (V-57). Or cette expression correspond

[6] Sauf bien sûr très rarement, en profitant par pur hasard d'une fluctuation aléatoire, ce qui devient d'autant plus improbable que le nombre d'événements est grand.

exactement au calcul du score final $\mathcal{S}$ si $a$ et $b$ sont associés avec vert, $a'$ et $b'$ avec rouge : les trois premiers termes donnent $+1$ en cas de succès si l'une au moins des couleurs est verte, le quatrième a le même résultat si les deux couleurs sont rouges. Ainsi, si Alice et Bob utilisent une stratégie commune décidée à l'avance, si élaborée soit-elle, le résultat est toujours $\mathcal{S} \leq 3$ ; ils perdent à tous les coups.

Ils peuvent toutefois gagner s'ils font appel à la physique quantique : si, pour chaque événement, chacun d'entre eux a accès à un des spins d'une paire commune dans l'état singulet, ils peuvent alors utiliser l'information de la couleur pour décider de l'orientation de leur aimant de Stern et Gerlach, et enfin pousser le bouton "oui" s'ils observent le résultat $+1$, le bouton "non" s'ils observent le résultat $-1$. Le calcul quantique mentionné ci-dessus assure alors qu'ils vont obtenir en moyenne un score final $2 + \sqrt{2}$. Ils vont donc gagner !

Nous avons présenté la version du jeu qui s'approche le plus de la parabole de Schrödinger (§ B-2-c du Chapitre III) où des élèves de lycée ne choisissent pas la question qui leur est posée au hasard (le paramètre de mesure), mais les réponses qu'ils donnent (elles jouent le rôle des résultat de mesure). Ici Alice et Bob ne choisissent pas les paramètres de mesure (les couleurs des lampes sont déterminées par un générateur de nombres aléatoires) mais la réponse "oui" ou "non". Il existe cependant une autre version équivalente [170] où c'est l'inverse : Alice et Bob choisissent ces paramètres $a$ et $b$, chacun applique son choix comme "entrée" à un dispositif physique quelconque dont il dispose (un ordinateur par exemple) qui fournit un résultat en fonction du paramètre local. Ces résultats sont $A(a)$ pour Alice et $B(b)$ pour Bob. En fait, ces fonctions peuvent changer d'un événement au suivant ; les fonctions deviennent alors $A(a, \lambda)$ et $B(b, \lambda)$, où $\lambda$ est le numéro de l'événement (comme discuté à la fin du § A-2 du Chapitre IV). Cette version du jeu conduit à la même inégalité que la première version ; une violation de l'inégalité implique donc qu'il n'existe pas de fonctions $A(a, \lambda)$ et $B(b, \lambda)$ décrivant le résultat fourni par les deux dispositifs, selon les entrées qu'Alice et Bob peuvent décider d'y insérer.

## B. Théorème de Cirelson

Dans le § A-2 du Chapitre IV, nous avons introduit une combinaison de moyennes $\langle M \rangle$ dont le module ne peut jamais dépasser 2 dans le cadre du réalisme local (inégalité BCHSH). Dans le § A-3 du Chapitre IV nous avons ensuite vu que, en mécanique quantique et avec deux spins dans un état singulet, la combinaison de moyennes $\langle Q \rangle$ qui correspond à $\langle M \rangle$ peut atteindre $2\sqrt{2}$. C'est déjà une violation significative de l'inégalité BCHSH ; on pourrait cependant espérer trouver d'autres systèmes quantiques et d'autres types de mesures qui permettraient d'obtenir des violations encore plus marquées.

Une raison qui pousse en ce sens est que chacune des 4 valeurs moyennes $\langle AB\rangle$, $\langle A'B\rangle$, etc. qui apparaissent dans $\langle Q\rangle$ est comprise entre $-1$ et $+1$ ; si ces moyennes étaient des variables indépendantes, la valeur maximale accessible mathématiquement à $\langle Q\rangle$ serait 4, donc nettement plus que $2\sqrt{2}$. On peut donc légitimement se demander s'il existe de meilleures situations quantiques, avec des violations bien plus grandes que $2\sqrt{2}$.

Dans le cadre de la mécanique quantique, le théorème de Cirelson [240, 241] montre que, avec un système composé de deux sous-systèmes physiques, il est en fait impossible de dépasser cette borne de $2\sqrt{2}$, quelle que soit la série de mesures envisagée sur les sous-systèmes et l'état initial du système total. Cette limitation provient de la structure même de tout espace des états qui est le produit tensoriel de deux espaces de dimension deux chacun.

### B-1. Mesures sur deux systèmes à deux niveaux

Considérons un système physique constitué de deux sous-systèmes quantiques sur lesquels on peut effectuer séparément des mesures conduisant chacune à deux résultats possibles, $+1$ et $-1$. Chacun des sous-systèmes possède un espace des états à deux dimensions contenant deux niveaux que, sans perte de généralité, nous pouvons considérer comme les états propres de la composante sur l'axe $Oz$ d'un (pseudo) spin 1/2. Nous appelons $\sigma_x(1)$, $\sigma_y(1)$ et $\sigma_z(1)$ les trois composantes du spin pour le premier sous-système – *cf.* équations (XII-59) du Chapitre XII – que nous rassemblons dans un opérateur vectoriel $\boldsymbol{\sigma}(1)$. Des notations semblables $\sigma_x(2)$, $\sigma_y(2)$, $\sigma_z(2)$ et $\boldsymbol{\sigma}(2)$ sont utilisées pour le second sous-système. Toute mesure effectuée sur le premier système correspond à un opérateur hermitique $O(1)$ agissant dans son espace des états qui peut être exprimé comme une combinaison linéaire de composantes de $\boldsymbol{\sigma}(1)$ et de l'opérateur unité $\widehat{I}(1)$ sous la forme :

$$O(1) = \alpha\ \widehat{I}(1) + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}(1) \tag{V-60}$$

où $\alpha$ ainsi que les trois composantes du vecteur $\boldsymbol{a}$ sont des paramètres scalaires réels. Cependant, le fait que les résultats de la mesure sont égaux à $\pm 1$ entraîne que les deux valeurs propres de cet opérateur ont ces deux valeurs, et donc que $\alpha = 0$ et $|\boldsymbol{a}| = 1$. Désignons alors par $\sigma_a(1)$ et $\sigma_{a'}(1)$ les opérateurs associés aux mesures effectuées sur le premier sous-système avec les paramètres de mesure $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{a}'$ :

$$\sigma_a(1) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}(1) \qquad ; \qquad \sigma_{a'}(1) = \boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{\sigma}(1) \tag{V-61}$$

et de même, pour le second sous-système :

$$\sigma_b(2) = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}(2) \qquad ; \qquad \sigma_{b'}(2) = \boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{\sigma}(2) \tag{V-62}$$

(les normes des vecteurs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{b}'$ valent toutes 1). Les propriétés des matrices de Pauli (§ A-7 du Chapitre XII) permettent de montrer que ces

4 opérateurs, une fois élevés au carré, donnent tous l'opérateur identité $\widehat{I}$ :

$$[\sigma_a(1)]^2 = [\sigma_{a'}(1)]^2 = \widehat{I}(1) \quad ; \quad [\sigma_b(2)]^2 = [\sigma_{b'}(2)]^2 = \widehat{I}(2) \tag{V-63}$$

La valeur moyenne quantique $\langle Q \rangle$ qui généralise (IV-11) est alors égale à $\langle \Psi | \, Q \, | \Psi \rangle$, où $|\Psi\rangle$ est un état normé quelconque du système à deux particules, et où l'opérateur $Q$ est donné par :

$$Q = [\sigma_a(1)] \; [\sigma_b(2)] - [\sigma_a(1)] \, [\sigma_{b'}(2)] + [\sigma_{a'}(1)] \, [\sigma_b(2)] + [\sigma_{a'}(1)] \, [\sigma_{b'}(2)] \tag{V-64}$$

Notre but est de montrer que cette valeur moyenne ne peut dépasser $2\sqrt{2}$ en module, quels que soient $|\Psi\rangle$ et le choix des 4 vecteurs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a'}$ et $\boldsymbol{b'}$.

### B-2. Violation quantique maximale

Pour cela, nous prenons le carré de cet opérateur, qui comprend alors trois sortes de termes : ceux contenant les carrés des quatre opérateurs apparaissant dans (V-64), les termes croisés où l'un des opérateurs entre crochets se répète, et enfin ceux où tous les opérateurs $\sigma$ sont différents. Puisque les carrés des matrices de Pauli valent $\widehat{I}$, les premiers termes donnent :

$$4 \times \widehat{I} \tag{V-65}$$

Pour les termes comprenant une répétition d'opérateur $\sigma$, ils valent :

$$\begin{array}{c} \Big[ - [\sigma_a(1)]^2 + [\sigma_{a'}(1)]^2 \Big] \Big[ \sigma_b(2)\sigma_{b'}(2) + \sigma_{b'}(2)\sigma_b(2) \Big] + \\ \Big[ [\sigma_b(1)]^2 - [\sigma_{b'}(1)]^2 \Big] \Big[ \sigma_a(2)\sigma_{a'}(2) + \sigma_{a'}(2)\sigma_a(2) \Big] \end{array} \tag{V-66}$$

qui s'annule puisque les carrés de toutes les composantes de $\boldsymbol{\sigma}$ valent $\widehat{I}$ (§ A-7 du Chapitre XII). Il reste les termes croisés contenant 4 opérateurs $\sigma$ différents, qui s'écrivent :

$$\begin{array}{l} \sigma_a(1)\sigma_{a'}(1)\sigma_b(2)\sigma_{b'}(2) + \sigma_{a'}(1)\sigma_a(1)\sigma_{b'}(2)\sigma_b(2) \\ -\sigma_a(1)\sigma_{a'}(1)\sigma_{b'}(2)\sigma_b(2) - \sigma_{a'}(1)\sigma_a(1)\sigma_b(2)\sigma_{b'}(2) \end{array} \tag{V-67}$$

et donnent le produit de deux commutateurs :

$$[\sigma_a(1), \sigma_{a'}(1)] \, [\sigma_b(2), \sigma_{b'}(2)] \tag{V-68}$$

Pour finir nous obtenons l'égalité [241] :

$$Q^2 = 4 \times \widehat{I} + [\sigma_a(1), \sigma_{a'}(1)] \, [\sigma_b(2), \sigma_{b'}(2)] \tag{V-69}$$

où l'on peut utiliser la relation de commutation des matrices de Pauli :

$$\big[ (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \, , \big( \boldsymbol{a'} \cdot \boldsymbol{\sigma} \big) \big] = 2i \, \big( \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a'} \big) \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

pour obtenir :

$$Q^2 = 4 \times \widehat{I} - 4 \left[ \left( \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}' \right) \cdot \boldsymbol{\sigma}(1) \right] \left[ \left( \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b}' \right) \cdot \boldsymbol{\sigma}(2) \right] \qquad \text{(V-70)}$$

Les valeurs propres de l'opérateur $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}') \cdot \boldsymbol{\sigma}(1)$ sont $\pm |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}'|$, qui sont en général inférieures en module à 1 puisque la longueur du vecteur $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}'$ ne peut dépasser 1 ; de même, l'opérateur $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}')\,\boldsymbol{\sigma}(2)$ a des valeurs propres qui sont en module égales ou inférieures à 1. Il s'ensuit que la valeur moyenne du produit de ces opérateurs (qui commutent) ne peut dépasser 1 en module, de sorte que :

$$\left\langle Q^2 \right\rangle = \langle \Psi | \, Q^2 \, | \Psi \rangle \leq 4 + 4 \times 1 = 8 \qquad \text{(V-71)}$$

D'autre part, le carré de la valeur moyenne $\langle Q \rangle^2$ d'un opérateur hermitique est toujours inférieur[7] à la valeur moyenne de son carré $\left\langle Q^2 \right\rangle$. Nous obtenons donc, de façon générale :

$$-2\sqrt{2} \leq \langle Q \rangle \leq 2\sqrt{2} \qquad \text{(V-72)}$$

inégalité qui constitue le théorème (ou la borne) de Cirelson.

Remarques :

(i) La démonstration de cette inégalité permet de prévoir les conditions dans lesquelles la borne $\pm 2\sqrt{2}$ est accessible, c'est-à-dire quand (V-71) et (V-72) deviennent des égalités. Une première condition est que les deux opérateurs entre crochets au membre de droite de (V-70) doivent avoir des valeurs propres de module unité ; il faut alors que les vecteurs $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}'$ et $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}'$ soient de module unité, ce qui nécessite que $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{a}'$ soient orthogonaux, ainsi que $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{b}'$. Une seconde condition est que l'état $|\Psi\rangle$ doit être un vecteur propre de valeur propre $-1$ du produit de la composante du premier spin selon l'axe $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}'$ par la composante du second spin selon l'axe $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}'$ ce qui, dans la configuration coplanaire des 4 vecteurs, correspond à des composantes selon le même axe qu'on peut appeler $Oz$. Un état singulet est effectivement un tel vecteur propre de $\sigma_z(1)\sigma_z(2)$ – comme l'est d'ailleurs un état triplet de composante du spin total selon $Oz$ nulle, dont on peut vérifier qu'elle donne lieu à la même violation que l'état singulet.

(ii) Nous verrons au § B du Chapitre VI un cas où, en s'affranchissant des hypothèses de Cirelson par l'introduction de trois sous-systèmes physiques, la mécanique quantique conduit à une valeur de $|\langle Q \rangle|$ qui dépasse $2\sqrt{2}$, et atteint la limite mathématique 4.

[7] Cette inégalité est une inégalité de Schwarz, obtenue en écrivant que la valeur moyenne de $[Q - \langle Q \rangle]^2$ est positive ; elle apparaît dans la définition du carré de l'écart quadratique moyen $\Delta Q$.

## C. Relativité, localité, théorie des champs

Comme nous l'avons vu au § C-3-a du Chapitre III, la relativité peut être invoquée comme hypothèse de base du raisonnement EPR, même si une notion plus générale de localité est suffisante. Il en est de même pour le théorème de Bell, qui peut lui aussi être démontré comme une conséquence de l'impossibilité relativiste d'influences se propageant plus rapidement que la lumière ; c'est d'ailleurs ce que Bell lui-même a fait dans certaines de ses conférences [167]. Ainsi que nous l'avons souligné au § C-3-a du Chapitre III, on peut considérer que le raisonnement EPR, et donc par contrecoup son prolongement le théorème de Bell, constituent des tentatives de ré-introduire en mécanique quantique une description complète des phénomènes physiques en termes d'événements d'espace-temps reliés par des d'influences causales.

Pour illustrer cette façon de voir, tentons de décrire une expérience de Bell en termes d'événements d'espace-temps, l'ingrédient de base sur lequel se fonde toute la relativité. Pouvons-nous expliquer ce qui se produit dans l'espace-temps lorsqu'Alice et Bob font séparément leurs mesures et en observent les résultats à une échelle macroscopique ? Deux possibilités existent :

– ou l'on considère que chaque résultat est la conséquence de quelque chose qui pré-existait avant la mesure, à la suite d'un processus non spécifié, selon la ligne tracée par EPR. Mais alors le théorème de Bell nous dit que ce quelque chose doit évoluer de façon non locale pour reproduire toutes les prédictions de la mécanique quantique. Ceci nous conduit donc nécessairement à une description non relativiste.

– ou l'on considère que le résultat d'Alice émerge à partir de rien à la suite d'un processus fondamentalement non déterministe. La difficulté, dans ce cas, est d'expliquer l'émergence de résultats fortement corrélés à une distance arbitrairement grande, sans aucune cause. Postuler cette émergence revient à postuler l'existence d'une sorte de "double événement d'espace-temps", qui peut parfaitement se produire simultanément dans deux galaxies différentes. Il ne s'agit certainement pas d'un simple événement d'espace-temps comme habituellement, mais d'un processus aléatoire délocalisé dans l'espace-temps, comme schématisé sur la Figure IV.5.

Cette seconde possibilité entre bien dans le point de vue de Bohr, qui insiste sur le fait que la seule façon correcte de décrire l'expérience est de considérer l'appareillage expérimental (ainsi que le système mesuré) comme un tout. Donc, dans ce cas également, nous aboutissons à une description de l'expérience qui n'entre pas dans le cadre de la relativité (§ C-1 ci-dessous). En fait, personne n'a réussi à proposer un formalisme théorique qui reste explicitement relativiste depuis le début jusqu'à la fin et reproduise toutes les prédictions de la mécanique quantique ; un ingrédient non relativiste est toujours nécessaire à un stade ou un autre.

A la fin de son essai "Speakable and unspeakable in quantum mechanics"

(Chapitre 18 de [6]), Bell écrit "Nous avons une incompatibilité apparente, au niveau le plus profond, entre deux piliers fondamentaux sur lesquels repose la théorie" (la mécanique quantique et la relativité). Bien évidemment, "incompatibilité apparente" ne signifie pas "contradiction" : la théorie qui s'appuie sur ces deux piliers reste cohérente tant qu'une violation du théorème de Bell n'implique aucune communication se propageant plus vite que la vitesse de la lumière (nous revenons plus en détail sur ce point important au § D). Shimony exprime cette idée en écrivant [242] "En ce sens une coexistence pacifique entre mécanique quantique et relativité est possible".

### C-1. Bohr et l'espace-temps

Dès les débuts de la mécanique quantique, Bohr avait déjà vigoureusement mis l'accent sur le fait que le postulat quantique, symbolisé par une valeur non nulle du quantum d'action de Planck, implique "un échec de notre description habituelle en termes d'espace-temps". Dans la publication de sa fameuse conférence de Côme [92], il énonce cette idée une dizaine de fois, à chaque fois en des mots différents. Par exemple, il écrit : "Ce que nous apprend la théorie quantique est que la possibilité de recourir à notre description causale habituelle dans l'espace-temps dépend entièrement du fait que la valeur du quantum d'action est extrêmement petit, quand on le compare aux actions mises en jeu dans nos perceptions ordinaires" ; en d'autres termes, dans les processus physiques mettant en jeu de très petites valeurs de l'action, une telle description n'est plus possible. Plus loin, il ajoute : "Les difficultés avec lesquelles une description causale d'espace-temps sont confrontées dans la théorie quantique, qui ont été le sujet de maintes discussions récentes, sont maintenant placées au tout premier plan par le développement récent des méthodes symboliques". Bohr voit ceci comme une illustration de plus de la complémentarité : "Cette circonstance peut être vue comme une simple expression symbolique de la nature complémentaire d'une description spatio-temporelle et des affirmations de causalité". Or, en relativité, on utilise constamment une description spatio-temporelle et la notion de causalité, sans les considérer le moins du monde comme exclusives !

Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, dans cette optique, un processus de mesure n'est pas nécessairement un événement d'espace-temps au sens relativiste. Les deux mesures réalisées par Alice et Bob doivent être considérées comme un seul processus quantique qui s'étend dans l'espace-temps sur une distance arbitrairement grande. Le processus n'est certainement pas assimilable à un point unique dans l'espace à 4 dimensions. C'est, si l'on veut, un objet composite fait d'une paire non séparable de deux événements relativistes fondus en un seul, sans connexion relativiste ou causale possible entre eux ; la règle de Born donne directement la probabilité de ce double événement. Bohr exprime bien cette idée semblable quand il écrit "Il s'en-

suit, cependant, que dans l'interprétation des observations il est inévitable de renoncer à une description spatio-temporelle".

### C-2. La théorie des champs résoud-elle le problème ?

On entend parfois dire que la théorie quantique des champs résoud le problème, car elle supprime les fonctions d'onde du formalime et utilise des opérateurs de champ dont les équations d'évolution sont parfaitement causales. Les commutateurs des opérateurs champ s'annulent hors des cônes de lumière. De plus, la dynamique des champs quantique peut être obtenue à partir d'un lagrangien dans lequel toutes les symétries du groupe de Poincaré ont été prises en compte, ce qui lui assure automatiquement l'invariance relativiste. Les interactions entre divers champs sont décrites par des hamiltoniens parfaitement locaux. Est-ce que cela ne fournit pas un formalisme parfaitement localement causal qui élimine immédiatement toute difficulté ?

En fait, non. La raison en est que la dynamique des opérateurs n'est pas la seule composante de la théorie quantique. Les opérateurs ne peuvent pas être utilisés seuls : pour obtenir des prédictions physiques, il faut les faire agir sur un vecteur de l'espace dans lequel ils sont définis. On doit également utiliser un vecteur d'état (ou un opérateur densité), qui est un objet intrinsèquement non local ; cet objet peut contenir de façon non séparable toute l'information sur deux systèmes intriqués, même si ces deux systèmes sont très éloignés l'un de l'autre. Ceci interdit alors toute décomposition des phénomènes physiques en termes d'événements localisés dans l'espace-temps, exactement comme l'avait prévu Bohr. De façon générale, toute méthode qui permet d'attribuer des nombres (moyennes quantiques) à des produits d'opérateurs (observables), y compris le cas où ces observables concernent des régions de l'espace très éloignées, contient une composante non locale irréductible. En conséquence, même s'il est vrai que la très grande majorité des calculs en théorie des champs sont parfaitement causals et relativistes, à un certain point il devient indispensable d'ajouter un ingrédient non local.

Considérons par exemple une expérience de Bell mettant en jeu des photons intriqués. Les opérateurs de champ se propagent d'une façon parfaitement causale depuis la source vers les appareils de mesure. Cependant, à un moment ou un autre, il devient nécessaire d'évaluer des probabilités de résultats de mesure. Ceci nécessite de calculer les valeurs moyennes d'opérateurs dans un état quantique qui est intriqué et délocalisé dans l'espace, ce qui affecte les deux probabilités en même temps, sans aucune contraine de causalité relativiste. La localité n'est alors plus satisfaite, et c'est la raison pour laquelle les inégalités de Bell sont violées en théorie quantique relativiste des champs, tout aussi fortement que dans un calcul quantique plus élémentaire. La propagation des champs est effectivement parfaitement locale, mais le calcul des valeurs moyennes et des probabiltés ne l'est pas.

De fait, il n'existe aucune description d'une expérience de Bell dans le cadre d'un formalisme qui resterait complètement relativiste d'un bout à l'autre. Les calculs des probabilités doivent inclure des ingrédients non locaux, ce qui transforme le processus de mesure en un processus qui "échappe à l'espace-temps". Les prédictions de la mécanique quantique sont, et de façon inhérente, incompatibles avec toute théorie qui resterait complètement et explicitement causale relativiste d'un bout à l'autre.

## D. Non-transmission instantanée de signaux

La relativité implique qu'il est fondamentalement impossible de transmettre des signaux entre deux points éloignés à une vitesse dépassant celle de la lumière (condition de causalité relativiste) ; violer cette impossibilité conduirait à de graves contradictions internes dans la physique théorique. Or on peut se demander si la violation des inégalités de BCHSH n'entraînerait pas la possibilité d'une telle transmission à une vitesse arbitraire, puisque la distance entre les deux opérateurs Alice et Bob n'a aucune influence sur la rapidité à laquelle s'établissent les corrélations entre les résultats de mesures éloignées. Effectivement, du point de vue du réalisme local, nous avons vu que la seule possibilité pour reproduire les prédictions de la mécanique quantique est d'introduire un effet non local instantané du paramètre intervenant dans une mesure sur le résultat de l'autre ; ne peut-on exploiter cet effet pour obtenir une communication qui soit également instantanée ? De plus, même si l'on reste dans le cadre de la mécanique quantique standard, le fait que la mesure effectuée sur le spin de la première particule détermine instantanément l'état quantique du second spin semble également indiquer une influence à distance instantanée. Heureusement pour la cohérence interne de la physique, comme nous allons le voir, la mécanique quantique ne permet aucune transmission instantanée de signal.

Quelles méthodes de transmission pourraient-elles être envisagées ? La première idée qui vient à l'esprit est d'imaginer un système analogue au télégraphe Morse où les $+1$ et les $-1$ des résultats observés par Alice sont utilisés par elle pour coder un message qu'elle envoie à Bob, puisque ces résultats peuvent être fortement (ou totalement) corrélés – pour simplifier la discussion, nous nous limitons ici au cas où chacune des deux mesures ne peut donner que deux résultats, mais la généralisation est possible. Il est toutefois clair qu'un tel système ne fonctionnerait pas, car les résultats des mesures sont totalement aléatoires, de sorte qu'Alice n'en a aucun contrôle pour composer son message. Ce ne sont donc pas les résultats qui peuvent servir à transmettre un message binaire, mais les paramètres expérimentaux qui, eux, sont bien choisis par les deux partenaires. Existe-t-il donc une façon dont Bob puisse déterminer la valeur $a$ ou $a'$ du paramètre décidée par Alice à partir des observations faites dans son laboratoire, sachant qu'il est maître

de décider de la valeur de son propre paramètre de mesure $b$ ? Cette technique de transmission de signal ne serait sujette à aucun retard temporel, créant un conflit direct avec la relativité qui impose un retard minimal (temps de propagation de la lumière dans le vide entre Alice et Bob).

Nous allons donc discuter les conditions générales dans lesquelles ce conflit est évité. Pour une théorie déterministe, nous verrons que cela revient à une condition dite de "setting independence" (indépendance par rapport aux paramètres de mesure) ; pour une théorie stochastique, à des relations "no-signaling" (non-transmission instantanée) ou, dans le cas plus restrictif où l'on impose la localité, à une condition de "outcome independence" (indépendance par rapport aux résultats de mesure). Voir les références [171] et [172] pour une discussion en termes de "localité forte" et de "complétude prédictive" (ou "indépendance en fonction des paramètres" opposée à "indépendance par rapport aux résultats" dans la Ref. [243]).

### D-1. Conditions NS de non-transmission instantanée de signaux

Etudions de façon générale, sans nous limiter à la mécanique quantique, dans quelles conditions une théorie satisfait au principe de non-transmission instantanée de signaux entre Alice et Bob (ou entre Bob et Alice) quelle que soit leur distance. Cette condition est dite "condition NS" (pour "no-signaling" en anglais).

Pour une théorie déterministe, la situation est simple : le résultat $A = \pm 1$ de chaque mesure effectuée par Alice ne doit dépendre que du paramètre de mesure $a$, le résultat $B = \pm 1$ de chaque mesure effectuée par Bob ne doit dépendre que de $b$. C'est ce qu'on appelle la condition de "setting independence".

Pour une théorie stochastique, ce sont des probabilités qui sont spécifiées pour chaque dispositif expérimental bien défini (au sens de Bohr) par la donnée des deux paramètres de mesure $a$ et $b$. On se donne alors quatre probabilités $\mathcal{P}(A, B|a, b)$ associées aux quatre événements $A = \pm 1$ et $B = \pm 1$, dont la somme vaut 1 :

$$\sum_{A,B} \mathcal{P}(A, B|a, b) = 1 \qquad \text{pour tout couple } a, b \tag{V-73}$$

Dans ce qui suit, nous nous limiterons à deux valeurs possibles $a$, $a'$ pour le premier paramètre expérimental, deux valeurs $b$, $b'$ pour le second, ce qui revient à prendre en compte quatre dispositifs expérimentaux pour l'ensemble de l'expérience. Nous avons ainsi 16 probabilités soumises à 4 relations de somme du type (V-73) ; il reste donc 12 paramètres libres pour le modèle le plus général entrant dans ce cadre.

Lorsque l'expérience est répétée, Bob n'ayant pas accès aux résultats d'Alice, la seule chose qu'il puisse mesurer est la fréquence d'occurrence de

ses propres résultats, correspondant aux probabilités précédentes sommées sur $A$ (somme de probabilités associées à des événements exclusifs) :

$$\sum_A \mathcal{P}(A, B|a, b) \tag{V-74}$$

La condition NS revient à imposer que cette probabilité soit indépendante de $a$ ; nous obtenons donc :

$$\sum_A \mathcal{P}(A, B|a, b) = \sum_A \mathcal{P}(A, B|a', b) \qquad \text{pour toute valeur de } b \tag{V-75}$$

A priori, il faudrait écrire la même relation pour toute valeur de $B$ ; mais, compte tenu de la règle de somme (V-73), les deux conditions pour les deux valeurs différentes de $B$ ne sont pas indépendantes (leur somme donne $1 = 1$) ; il nous suffit donc de n'en retenir qu'une seule, pour l'une des deux valeurs de $B$. Comme nous avons supposé que $b$ peut prendre deux valeurs, la condition NS dans le sens de communication Alice vers Bob implique deux relations linéaires (V-75) entre les probabilités. Pour l'autre sens de communication, on a évidemment les deux conditions NS symétriques :

$$\sum_B \mathcal{P}(A, B|a, b) = \sum_B \mathcal{P}(A, B|a, b') \qquad \text{pour toute valeur de } a \tag{V-76}$$

Au total, les conditions NS sont donc au nombre de 4.

En mécanique quantique, on vérifie que ces conditions sont effectivement satisfaites lorsqu'Alice et Bob effectuent des mesures locales dans des laboratoires éloignés, sans qu'aucune interaction ne soit possible entre les deux sous-systèmes mesurés. Pour l'état singulet étudié au § A-1 du Chapitre IV, nous obtenons immédiatement $\mathcal{P}_{(+,\pm)} + \mathcal{P}_{(-,\pm)} = 1/2$ et $\mathcal{P}_{(\pm,+)} + \mathcal{P}_{(\pm,-)} = 1/2$, ce qui montre que les relations (V-75) et (V-76) sont satisfaites. La démonstration générale est donnée dans l'Appendice F, quels que soient l'état du système envisagé et les types de mesures effectuées par Alice et Bob. Ainsi donc, la mécanique quantique n'entre pas en conflit frontal avec le principe de causalité relativiste.

### D-2. Boîtes logiques

Suivant Popescu et Rohrlich [227] (voir également la Ref. [244]), définissons des "boîtes logiques". Ce sont des dispositifs qui permettent à Alice et Bob de chacun choisir la valeur d'une "variable d'entrée" binaire, $a = \pm 1$ pour Alice et $b = \pm 1$ pour Bob, et qui fournissent en retour des valeurs binaires pour les "variables de sortie" $A = \pm 1$ et $B = \pm 1$ (partie gauche de la Fig. V.2). Nous distinguerons boîtes déterministes, où $A$ et $B$ sont des fonctions données de $a$ et $b$, et boîtes stochastiques où ce sont les probabilités des variables de sortie qui sont données en fonction des variables d'entrée $a$ et $b$.

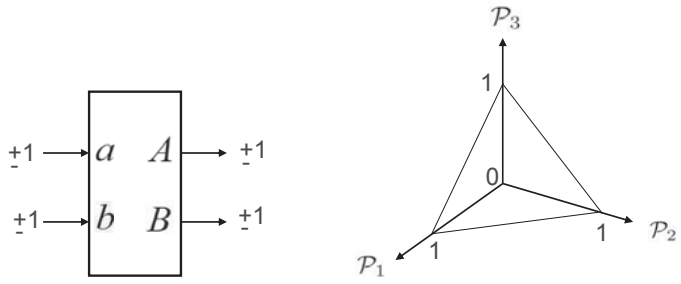


FIGURE *V.2 – La figure de gauche schématise une boîte logique qui, à partir des valeurs* $\pm 1$ *des variables d'entrée* $a$ *et* $b$*, fournit des variables de sortie* $A = \pm 1$ *et* $B = \pm 1$*. Pour une boîte déterministe,* $A$ *et* $B$ *sont des fonctions données de* $a$ *et* $b$ *; pour une boîte stochastique,* $A$ *et* $B$ *sont données par des distributions de probabilités dépendant de* $a$ *et* $b$*.*
*La figure de droite illustre comment une boîte logique stochastique peut être caractérisée par un point appartenant à un polytope dans l'espace des probabilités* $\mathcal{P}_i(a,b)$ *(*$j = 1,\ldots,4$*) ; en fait, pour une valeur donnée du couple* $(a,b)$*, comme la somme des probabilités vaut* 1*, il suffit de porter les trois premières probabilités sur trois axes ; le point caractérisant la boîte appartient à un tétraèdre de côté unité. Comme cependant quatre valeurs sont possibles pour le couple de variables d'entrée, le polytope caractérisant la boîte est le produit de quatre tétraèdres. Les boîtes déterministes sont caracterisées par des points se trouvant sur les coins des tétrahèdres.*

#### D-2-a. Boîtes déterministes

Lorsque les variables d'entrée ne peuvent prendre que deux valeurs, il existe 4 couples de valeurs des variables d'entrée (4 dispositifs expérimentaux distincts pour l'ensemble de l'expérience), chacun pouvant fournir 4 couples de résultats distincts. Le nombre total de boîtes déterministes distinctes est donc $4^4 = 256$ ; en revanche, si l'on impose la condition NS ("setting independence"), la variable de sortie $A$ ne peut dépendre que de $a$, de sorte que 4 fonctions $A(a)$ distinctes sont possibles pour Alice (puisqu'elle utilise deux valeurs de son paramètre de mesure), 4 également pour Bob ; le nombre de boîtes déterministes NS n'est alors plus que de 16.

#### D-2-b. Boîtes stochastiques

Les boîtes stochastiques ne sont pas en nombre fini, mais dépendent de paramètres continus. Une boîte stochastique quelconque associe à chaque couple de variables d'entrée 4 probabilités $\mathcal{P}_i$ ($j$ = 1,...,4) dont la somme fait 1. En prenant trois axes $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, chaque boîte est associée à un point dans l'espace tridimensionnel de ces variables, la probabilité $\mathcal{P}_4$ étant donnée par $1 - \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_3$. Les 4 probabilités $\mathcal{P}_i$ restent positives ou nulles, de sorte que le point en question se trouve à l'intérieur (ou à la surface) d'un tétraèdre ayant un coin à l'origine et les trois autres sur les axes, situés à une distance unité de l'origine (partie droite de la Fig. V.2). Chacun des quatre coins du tétraèdre correspond à un cas déterministe. Comme en fait la boîte caractérise les fonctions $A$ et $B$ pour 4 couples différents des variables d'entrée, ce sont 4 points indépendants à l'intérieur (ou à la surface) de 4 tétraèdres semblables qui la définissent, qu'on peut regrouper en un point unique $G$ dans un espace à $4 \times 3 = 12$ dimensions. On appelle "polytope" le volume accessible à $G$, limité par des surfaces correspondant à l'annulation de probabilités, les coins étant associés à des situations déterministes. La Ref. [244] donne une discussion générale des propriétés de ces polytopes.

Pour une boîte NS, les 4 points précédents ne sont plus indépendants, puisqu'ils doivent satisfaire aux 4 relations (V-75) et (V-76) ; les boîtes stochastiques NS dépendent donc de 8 paramètres, et le nouveau polytope accessible aux paramètres est plus petit que précédemment, les coins étant limités à ceux associés à des boîtes déterministes NS ; la Ref. [244] donne une discussion plus générale de ces polytopes.

#### D-2-c. Boîtes stochastiques locales

Une sous-catégorie des boîtes précédentes est donnée par les boîtes stochastiques locales, ayant la propriété de "outcome independence"[8]. Les plus simples sont celles où la probabilité se factorise en deux probabilités :

$$\mathcal{P}(A, B|a, b) = p(A|a) \times p(B|b) \tag{V-77}$$

où $p(A|a)$ et $p(B|b)$ sont deux probabilités locales comprises entre 0 et 1 satisfaisant les deux conditions séparées de normalisation :

$$\sum_A p(A|a) = 1 \qquad \sum_B q(B|b) = 1 \tag{V-78}$$

[8]Comme nous l'avons vu dans le § B-2-b du Chapitre IV, le théorème des probabilités conditionnelles (théorème de Bayes) indique que l'on a toujours : $\mathcal{P}(A, B|a, b) = p(A|a, b) \times p(B|A, a, b)$, où $p(B|A, a, b)$ est la probabilité conditionnelle d'obtenir $B$ si la valeur $A$ a été obtenue. L'hypothèse de "setting independence" permet de remplacer $p(A|a, b)$ par $p(A|a)$ ainsi que $p(B|A, a, b)$ par $p(B|A, b)$. L'hypothèse de "outcome independence" revient à supposer que cette dernière probabilité conditionnelle est indépendante du résultat (outcome) $A$, et donc d'obtenir (V-77). Les mêmes hypothèses s'appliquent lorsqu'il faut prendre en compte la variable fluctuante $\lambda$ et permettent d'arriver à (V-80).

Les boîtes correspondantes dépendent de $2 \times 2 = 4$ paramètres continus seulement.

Mais, dans l'esprit du théorème de Bell, on peut les généraliser en supposant la présence de causes fluctuantes caractérisées par un paramètre $\lambda$ et une distribution positive et normée $\rho(\lambda)$ :

$$\int d\lambda \ \rho(\lambda) = 1 \tag{V-79}$$

On suppose alors que, si $\lambda$ est fixé (ce peut être un paramètre multi-dimensionnel), les conditions de fonctionnement de la boîte sont suffisamment bien définies pour qu'un argument de localité permette d'écrire une factorisation :

$$\mathcal{P}_\lambda(A, B|a, b; \lambda) = p_\lambda(A|a; \lambda) \times p_\lambda(B|b; \lambda) \tag{V-80}$$

où les probabilités locales $p_\lambda$ et $q_\lambda$ dépendent maintenant du paramètre statistique $\lambda$, tout en satisfaisant (V-78) pour chaque valeur de $\lambda$. En présence des fluctuations de $\lambda$, les probabilités deviennent :

$$\mathcal{P}(A, B|a, b) = \int d\lambda \ \rho(\lambda) \ p_\lambda(A|a) \ p_\lambda(B|b) \tag{V-81}$$

qui, contrairement à (V-77) et (V-80), n'est en général plus factorisée. Ces boîtes sont classiques, en ce sens qu'elles découlent naturellement du réalisme local tel que l'introduisent EPR et Bell ; elles vérifient le théorème de Bell. On vérifie facilement que ces boîtes sont effectivement NS puisque :

$$\sum_A \mathcal{P}(A, B|a, b) = \int d\lambda \ \rho(\lambda) \ p_\lambda(B|b) \tag{V-82}$$

qui est bien indépendant de $a$ (la démonstration est semblable pour la sommation sur $B$).

La mécanique quantique satisfait les relations (V-75) et (V-76), et permet donc de construire des boîtes NS. Puisqu'elle permet des violations du théorème de Bell, lorsque c'est le cas elles n'appartiennent pas à la catégorie des boîtes stochastiques locales.

### D-3. Boîte de Popescu-Rohrlich et corrélations "superquantiques"

Le calcul des probabilités de la mécanique quantique standard permet d'associer une boîte logique à tout schéma quantique conduisant à des résultats binaires avec des mesures dépendant de paramètres expérimentaux $a$ et $b$. Nous avons mentionné plus haut que les conditions (V-75) et (V-76) sont bien satisfaites par la mécanique quantique ; toutes les boîtes quantiques sont donc bien NS. Mais on peut se poser la question inverse : est-il toujours possible de reproduire n'importe quelle boîte logique NS à partir d'un état

quantique adéquat de deux particules intriquées, à condition de leur appliquer des mesures appropriées ? Nous allons voir que la réponse à cette question est non : la catégorie des théories qui conduisent à des boîtes logiques compatibles avec la relativité est plus large que la mécanique quantique.

Démontrer qu'il est possible d'aller au-delà de la mécanique quantique sans violer le principe NS peut se faire en construisant un exemple : la "boîte de Popescu-Rohrlich" [227], souvent dénommée "PR box" dans la littérature en anglais. L'idée générale est simple : dans l'expression (IV-11), nous avions obtenu une violation quantique en considérant des valeurs des paramètres de mesure pour lesquels les trois cosinus de même signe sont égaux à $1/\sqrt{2}$ et celui de signe opposé à $-1/\sqrt{2}$, aboutissant par somme à un total de $2\sqrt{2}$ ; on peut essayer d'augmenter encore ce total en construisant un modèle où tous les taux de corrélation sont poussés jusqu'à leur valeur maximale 1. Pour les trois couples de valeurs $(a, b)$, $(a', b)$ et $(a', b')$ pour les variables d'entrée, nous supposerons donc que les variables de sorties sont parfaitement corrélées, toujours égales entre elles ; de plus, pour préserver au mieux la condition NS, compte tenu de cette corrélation nous minimisons la possibilité de transmission d'information en attribuant des probabilités égales aux deux couples de résultats possibles $(-1, -1)$ et $(+1, +1)$ :

$$\mathcal{P}(-1, -1) = \mathcal{P}(+1, +1) = 1/2 \tag{V-83}$$

ce qui implique évidemment la nullité de la probabilité d'avoir des valeurs différentes :

$$\mathcal{P}(-1, +1) = \mathcal{P}(+1, -1) = 0 \tag{V-84}$$

Pour le couple $(a, b')$, on postule la situation inverse où les variables de sortie sont toujours opposées :

$$\begin{array}{c} \mathcal{P}(-1, -1) = \mathcal{P}(+1, +1) = 0 \\ \mathcal{P}(-1, B+1) = \mathcal{P}(+1, -1) = 1/2 \end{array} \tag{V-85}$$

Vérifions que cette boîte est effectivement NS. Que ce soit dans le terme de gauche ou de droite de (V-75), seul un terme de la sommation sur $A$ est non nul avec les corrélations prévues par (V-83), (V-84) et (V-85) : en effet, la même valeur de $B$ n'est jamais associée à deux valeurs différentes de $A$ dans une probabilité non nulle, quel que soit le dispositif expérimental ; les deux membres valent donc $1/2$ et l'égalité est vérifiée. Il en est de même de (V-76). La boîte de Popescu-Rohrlich ne permet donc pas de transmission instantanée de signaux, elle est compatible avec la relativité[9].

Calculons maintenant la valeur obtenue pour la combinaison des produits de résultats apparaissant en (IV-7) :

$$\langle M \rangle = \langle AB \rangle (a, b) - \langle AB \rangle \left(a, b'\right) + \langle AB \rangle \left(a', b\right) + \langle AB \rangle \left(a', b'\right) \tag{V-86}$$

[9]Une boîte de Popescu-Rohrlich obéit également au théorème de non-clonage (§ B-1 du Chapitre VIII).

Le calcul est très simple du fait que nous avons choisi des probabilités pour que le produit $AB$ ait toujours la valeur $+1$ pour les trois couples de valeurs $(a, b)$, $(a', b)$ et $(a', b')$ des paramètres de mesure, alors que selon les relations (V-85) ce produit a toujours la valeur $-1$ pour $(a, b')$. Par suite :

$$\langle M \rangle = 4 \tag{V-87}$$

ce qui montre que la limite mathématique pour $\langle M \rangle$ est effectivement saturée.

Le fait que la limite de Cirelson (§ B) soit dépassée indique aussitôt une incompatibilité avec la mécanique quantique : aucun dispositif quantique avec deux sous-systèmes soumis à des mesures, aucun vecteur d'état initial du système ne peut reproduire une boîte de Popescu-Rohrlich, bien que cette dernière ne permette aucune transmission instantanée de signaux. Cette boîte[10] nous fournit donc un exemple de corrélations "superquantiques".

Il est toutefois possible de simuler une telle boîte en procédant par post-sélection d'événements, ce qui revient à introduire un échantillonage biaisé des paires détectées (§ C-1-a du Chapitre IV). Avec une sélection suffisante on peut alors, non seulement dépasser la limite de Cirelson $2\sqrt{2}$, mais atteindre pratiquement la limite mathématique de 4 [206–208].

### D-4. Comment caractériser la théorie quantique ?

Popescu et Rohrlich proposent de renverser l'axiomatique habituelle pour introduire la mécanique quantique [227]. Au lieu de postuler l'indéterminisme de la théorie comme on le fait habituellement, ils suggèrent de choisir deux autres axiomes : la théorie est non locale (au sens de permettre parfois des violations des inégalités BCHSH), mais elle reste néanmoins compatible avec la causalité relativiste. Le non-déterminisme en découle alors comme une conséquence, comme le montre un raisonnement par l'absurde. En effet, si la théorie était déterministe, elle définirait les résultats $A$ et $B$ comme des fonctions des paramètres expérimentaux $a$ et $b$, et la compatibilité avec la causalité relativiste imposerait immédiatement que $A$ soit fonction de $a$ seul, et $B$ fonction de $b$ seul ; la démonstration du § A-2 du Chapitre IV s'appliquerait alors, interdisant toute violation des inégalités BCHSH. Dans le cadre du

[10] Pour rendre la boîte physiquement plus plausible, on peut s'intéresser au cas où les variables d'entrée sont continues au lieu d'être binaires ; elles représentent en effet des paramètres expérimentaux qui, la plupart du temps, sont continus, comme des angles de mesure. Si l'on imposait les relations (V-83) à (V-85) pour toutes les valeurs des paramètres, on rencontrerait évidemment des problèmes de discontinuité. Mais, en mécanique quantique, la violation maximale $2\sqrt{2}$ n'est atteinte que pour certains angles. De même, ici il est possible de supposer que ces valeurs des probabilités ne sont atteintes que pour certaines valeurs des variables d'entrée, entre lesquelles on interpole ensuite de façon continue ; on n'obtiendra ainsi de violation de la limite de Cirelson que pour certaines valeurs des variables d'entrée, mais cela ne change rien à la preuve d'existence du "modèle superquantique".

déterminisme, une violation BCHSH entraînerait donc immédiatement une autre violation, celle de la causalité relativiste ; c'est le non-déterminisme qui évite ce conflit.

L'exemple des boîtes de Popescu-Rohrlich montre que cette axiomatique ne définit pas la théorie de façon unique. Ce qui est défini est un ensemble plus large de théories, parmi lesquelles la mécanique quantique qui satisfait la borne de Cirelson $2\sqrt{2}$, alors que d'autres atteignent la limite mathématique 4. La Ref. [245] donne une discussion générale des propriétés des théories NS, de leur caractère aléatoire intrinsèque, de l'impossibilité d'un clonage parfait, de la propriété de monogamie, etc. (nous revenons sur la signification de ces termes aux §§ B-5 du Chapitre VII et B-1 du Chapitre VIII). Mais on peut prendre un point de vue où le degré de violation des inégalités BCHSH est considéré comme un indicateur de la force des corrélations permises par une théorie, plutôt que de la non-localité en tant que principe général. Il se pose la question de l'origine physique de la borne de Cirelson : pourquoi les corrélations que prévoit la mécanique quantique ne sont-elles pas celles maximales qui sont compatibles avec le principe de causalité relativiste ? Quel est donc le principe physique général supplémentaire contenu dans la mécanique quantique qui fixe la valeur de cette limite à $2\sqrt{2}$ ?

La Ref. [246] propose une réponse partielle à cette question en remarquant que des corrélations plus fortes impliqueraient un monde dans lequel la "communication complexity" ne serait pas triviale [11]. Il a ensuite été proposé par la Ref. [247] que ce principe général soit une généralisation du principe de non-communication instantanée : lorsqu'Alice et Bob partagent un système quantique intriqué quelconque, si elle lui envoie $m$ bits par des canaux classiques, Bob ne peut pas obtenir ainsi une quantité d'information qui dépasse $m$, et ceci quelles que soient les opérations locales de mesure effectuées dans son laboratoire (qui peuvent être fonction de ces bits).

Alice reçoit une chaîne de $N$ nombres binaires $a_i$ $(i = 0,\ 1,\ N-1)$ ; son but est de communiquer le maximum d'informations sur cette chaîne à Bob, sachant qu'il lui est possible d'envoyer par un canal classique $m$ bits seulement $(m < N)$. Elle choisit certains des nombres de sa chaîne comme valeurs de paramètres de mesure qu'elle utilise comme entrées dans son système logique, et obtient alors des sorties (résultats de mesure) ; son message de $m$ bits est constitué en combinant de façon quelconque ses entrées et sorties. Bob, une fois qu'il a reçu le message correspondant, est libre d'utiliser les bits qu'il contient pour effectuer toute opération avec son propre système logique, et tenter d'en déduire le nombre maximal possible des $a_i$.

[11] Alice et Bob désirent calculer une fonction booléenne $F(a, b)$ de la variable $a$, choisie par Alice et connue d'elle seule, et de la variable $b$ choisie par Bob et connue de lui seul. La "communication complexity" de $F$ est dite triviale si l'opération est réalisée par la transmission d'un seul bit classique de communication.

(i) Supposons d'abord qu'initialement Alice et Bob partagent un système logique constitué d'un ensemble de boîtes de Popescu-Rohrlich. Alors on peut montrer [247] que le dispositif permet à Bob de déterminer exactement $m$ valeurs différentes de la série des $a_i$, en choisissant à son gré lesquelles, mais sans pouvoir en obtenir plus que $m$. Aucun bit de la base de données d'Alice n'est inaccessible à Bob ! Toutefois le nombre total de ceux auxquels il a accès est strictement limité à $m$.

(ii) Supposons maintenant que le système partagé initialement par Alice et Bob soit un système quantique dans un état intriqué quelconque. La Ref. [247] établit un lien entre le taux de violation de l'inégalité BCHSH et la quantité d'information maximale obtenue par Bob sur la série des $a_i$. Elle définit un principe de causalité de l'information comme suit : "l'information obtenue par Bob concernant une série de données que possède Alice et qu'il ignore, en utilisant toutes les ressources locales dont il dispose et les $m$ bits classiques que lui envoie Alice, ne peut dépasser $m$". Elle montre ensuite que, au moment exact où la borne de Cirelson $2\sqrt{2}$ est atteinte, le principe de causalité pour l'information cesse de s'appliquer.

C'est en quelque sorte un principe de non-amplification de l'information classique qui intervient. Pour $m = 0$, on retrouve la condition NS de causalité relativiste discutée plus haut : aucune information ne peut passer d'Alice à Bob par les simples mesures locales qu'ils effectuent chacun de leur côté. Pour $m$ quelconque, le nouveau principe général impose que, quelles que soient les mesures locales effectuées par les deux partenaires, la quantité d'information transmise n'en est pas accrue ; ces mesures sont en quelque sorte inutiles. On peut ainsi expliquer la valeur particulière de la borne de Cirelson, et il devient naturel de considérer qu'il fait partie de ceux qui définissent la mécanique quantique, voire même de conjecturer qu'il définit parfaitement la théorie.

Les auteurs de la Ref. [248] proposent une approche différente pour caractériser des corrélations non locales. Supposant que la mécanique quantique s'applique localement, ils montrent que la condition NS implique que toutes les corrélations possibles entre mesures éloignées sont également celles que prévoit la mécanique quantique. Donc, si une expérience permettait d'observer des corrélations plus fortes que celles prévues par la mécanique quantique, alors la relativité impliquerait que la mécanique quantique doit également être violée de façon locale. La Ref. [249] généralise la discussion en termes de corrélations observées entre $N$ partenaires. Elle discute un jeu non local où chaque partenaire reçoit indépendamment une variable d'entrée $x_i$ et où, en utilisant des corrélations observées sur un système quantique partagé par tous les partenaires dans un état intriqué $|\Psi\rangle$, il tente de deviner la variable $x_{i+1}$ de son voisin. Il se trouve que, dans ce cas, les corrélations quantiques ne permettent pas de faire mieux que les corrélations classiques. Ceci suggère la possibilité d'un critère de non-amélioration multi-partenaires, une sorte de généralisation du principe NS, pour caractériser la mécanique quantique.

# Chapitre VI

# Autres théorèmes

Le théorème de Bell peut prendre des formes variées et conduire à divers types d'inégalités, comme nous l'avons vu au § A du Chapitre V. De plus, depuis son apparition, il a stimulé divers travaux qui ont permis de mettre en lumière d'autres contradictions entre les prédictions de la mécanique quantique et celles du réalisme local. Nous en présentons quelques-unes dans ce chapitre : contradictions GHZ (§ A) et leur généralisation, inégalité de Cabello (§ B), et impossibilités de Hardy (§ C). Au § D, nous discutons la notion importante de contextualité et introduisons le théorème BKS. Enfin, au § E, nous passons en revue quelques théorèmes concernant la réalité des états quantiques.

## A. Propriétés quantiques des états GHZ

### A-1. Contradictions GHZ

Pendant de nombreuses années, chacun pensait que Bell avait à peu près épuisé le sujet en considérant toutes les situations les plus intéressantes, et que les systèmes à deux spins fournissaient les violations quantiques les plus spectaculaires du réalisme local. Ce fut donc une grande surprise quand en 1989 Greenberger, Horne et Zeilinger (GHZ) montrèrent que des systèmes contenant plus de deux particules corrélées pouvaient présenter des violations encore plus spectaculaires du réalisme local [250, 251], mettant en jeu une contradiction de signe (violation de 100 %) pour des corrélations parfaites (au lieu d'inégalités violées de 40 % pour des corrélations imparfaites). Nous considérons ici des systèmes à trois particules, mais des généralisations à $N$ particules sont possibles et seront discutées au § A-3.

#### A-1-a. Démonstration

Les contradictions GHZ peuvent se produire dans des systèmes variés, ne mettant pas nécessairement en jeu des spins. Initialement, elles furent

introduites dans le contexte de l'échange d'intrication ("entanglement swapping", voir § C-2 du Chapitre VII) pour 4 particules [250], ou l'intrication de 3 particules sans spin [251]. Ici, suivant Mermin [252], nous considérons un système de trois spins 1/2, car ce simple exemple est suffisant pour introduire l'essentiel des idées. Nous supposons que les trois spins sont décrits par l'état quantique :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\,|+,+,+\rangle + \eta\,|-,-,-\rangle\Big] \tag{VI-1}$$

où les états $|\pm\rangle$ sont les états propres des composantes des spins le long de l'axe $Oz$ d'un repère orthonormé $Oxyz$ ; dans les kets à trois particules, le premier signe correspond à l'état du premier spin, le second à celui du second, et de même pour le troisième spin ; le nombre $\eta$ désigne soit $+1$, soit $-1$ :

$$\eta = \pm 1 \tag{VI-2}$$

Calculons maintenant les probabilités quantiques des résultats que l'on peut obtenir en effectuant des mesures des composantes des spins $\sigma_{1,2,3}$ des trois particules, soit le long de la direction $Ox$, soit de la direction perpendiculaire $Oy$ (Fig. VI.1). Nous commençons par considérer une mesure du produit $\sigma_{1y} \times \sigma_{2y} \times \sigma_{3x}$ ; un calcul simple (explicité au § A-3 dans le cas plus général d'un nombre quelconque de particules[1]) montre alors que $\mid \Psi >$ est un vecteur propre de ce produit d'opérateurs avec la valeur propre $-\eta$, qui donne le seul résultat possible avec l'état (VI-1). La probabilité correspondante est donc :

$$\mathcal{P}(\sigma_{1y} \times \sigma_{2y} \times \sigma_{3x} \Longrightarrow -\eta) = 1 \tag{VI-3}$$

tandis que la probabilité $\mathcal{P}(\sigma_{1y}\times\sigma_{2y}\times\sigma_{3x} \Longrightarrow +\eta)$ de l'autre résultat possible est nulle. De même, nous trouvons que $\mid \Psi >$ est un vecteur propre des deux produits d'opérateurs $\sigma_{1x} \times \sigma_{2y} \times \sigma_{3y}$ et $\sigma_{1y} \times \sigma_{2x} \times \sigma_{3y}$, avec les valeurs propres $-\eta$, de sorte que les probabilités correspondantes sont :

$$\begin{array}{ll} \mathcal{P}(\sigma_{1x} \times \sigma_{2y} \times \sigma_{3y} \Longrightarrow -\eta) & = 1 \\ \mathcal{P}(\sigma_{1y} \times \sigma_{2x} \times \sigma_{3y} \Longrightarrow -\eta) & = 1 \end{array} \tag{VI-4}$$

Les trois produits prennent donc la valeur $-\eta$, et les résultats sont connus avec certitude avant la mesure[2]. Maintenant, si nous considérons le produit des composantes des trois spins le long de l'axe $Ox$, il est également facile de voir (§ A-3) que le même vecteur d'état est également un état propre de

[1] Avec les notations de ce paragraphe, ici nous avons $\eta = e^{i\xi}$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$ et $\varphi_3 = 0$, de sorte que $\zeta = e^{i(\xi-\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3)} = -\eta$ donne la valeur propre. De façon similaire, pour une mesure du produit $\sigma_{1x} \times \sigma_{2x} \times \sigma_{3x}$, nous avons $\zeta = e^{i\xi} = \eta$, et la valeur propre est $+\eta$.

[2] Le produit est fixé, mais chacune des composantes individuelles peut fluctuer entre les résultats $+1$ et $-1$.

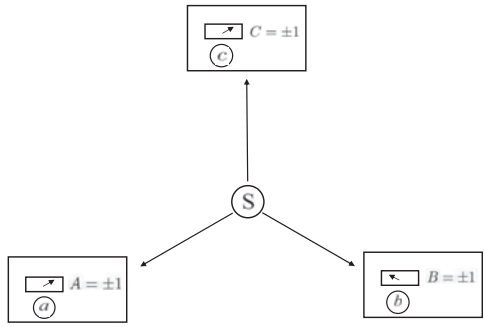


FIGURE *VI.1 – Schéma d'une expérience GHZ, où trois spins dans l'état quantique (VI-1) subissent des mesures en trois régions différentes de l'espace où se trouvent des appareils de mesure. Chacun d'entre eux est muni d'un bouton permettant à l'expérimentateur local de choisir entre deux positions ; ces dernières correspondent à la mesure du spin, soit le long de Ox, soit le long de Oy. Dans tous les cas, les résultats fournis par les trois appareils sont* $A = \pm 1$, $B = \pm 1$ *et* $C = \pm 1$.

l'opérateur produit $\sigma_{1x} \times \sigma_{2x} \times \sigma_{3x}$, mais avec la valeur propre $+\eta$, de sorte que :

$$\mathcal{P}(\sigma_{1x} \times \sigma_{2x} \times \sigma_{3x} \Longrightarrow +\eta) = 1 \qquad \text{(VI-5)}$$

Cette fois, le résultat prend avec certitude la valeur $+\eta$.

Examinons maintenant les prédictions d'une théorie EPR réaliste locale dans ce type de situation. Comme le calcul quantique est particulièrement simple lorsque l'état initial est un état propre de toutes les observables considérées (tous les résultats sont certains), on pourrait s'attendre à ce que rien de particulier ne soit obtenu. Mais, en réalité, nous allons voir qu'une contradiction complète résulte de cette analyse ! Le raisonnement réaliste local est une généralisation directe de celui que nous avons effectué dans le § A-2 du Chapitre IV. En premier lieu, les corrélations parfaites impliquent que le résultat d'une mesure d'une composante le long de $Ox$ (ou $Oy$) du spin d'une particule quelconque peut être déduit de résultats de mesures effectuées sur d'autres particules à une distance arbitrairement grande. Donc le raisonnement réaliste local EPR montre l'existence d'éléments de réalité correspondant à ces deux composantes, éléments que nous notons $A_{x,y} = \pm 1$ pour le premier spin. De même, pour le second spin, nous pouvons introduire des éléments de réalité $B_{x,y} = \pm 1$, et enfin $C_{x,y} = \pm 1$ pour le troisième. Selon

le raisonnement EPR, pour chaque réalisation de l'expérience (par exemple chaque émission d'un trio de particules par une source), ces six nombres ont des valeurs bien déterminées (même si elles peuvent être inconnues avant toute mesure). Ce sont tout simplement les résultats que vont donner les mesures éventuelles effectuées ultérieurement. Par exemple, une mesure sur le premier spin va nécesssairement donner $A_x$ si la direction d'analyse est choisie le long de $Ox$, ou $A_y$ si elle l'est le long de $Oy$, indépendamment du type de mesures effectuées sur les deux autres spins.

Pour obtenir un accord avec les trois égalités (VI-3) et (VI-4), il faut que :

$$\begin{array}{ll} A_y B_y C_x & = -\eta \\ A_x B_y C_y & = -\eta \\ A_y B_x C_y & = -\eta \end{array} \qquad \text{(VI-6)}$$

Cependant, la localité implique que les mêmes valeurs $A$, $B$ et $C$ peuvent être utilisées pour l'expérience où les trois composantes le long de $Ox$ sont mesurées : le résultat est simplement le produit $A_x B_x C_x$. Mais, comme les carrés des nombres $A_y^2$, etc., sont toujours égaux à $+1$, nous pouvons obtenir le même résultat en multipliant les unes par les autres les trois lignes de (VI-6), ce qui donne :

$$A_x B_x C_x = -\eta \qquad \text{(VI-7)}$$

C'est là que la contradiction apparaît : l'égalité (VI-5) prédit que la mesure de $\sigma_{1x} \times \sigma_{2x} \times \sigma_{3x}$ doit toujours donner le résultat $+\eta$, qui a le signe opposé ! La contradiction entre les prédictions du réalisme local et celles de la mécanique quantique ne peut pas être plus marquée.

#### A-1-b. Discussion

La contradiction GHZ semble encore plus spectaculaire du fait que les deux prédictions ne diffèrent pas par un pourcentage significatif (environ 40 %), mais sont directement opposées. Dans cette expérience de pensée, toutes les fluctuations sont éliminées puisque tous les résultats (les produits des trois composantes) sont connus avec certitude avant toute mesure : une contradiction de 100 % est obtenue avec une certitude de 100 % ! Ceci mis à part, en quoi une situation GHZ se différencie-t-elle d'une expérience de Bell habituelle avec deux spins ? Plusieurs points de vue sont possibles.

(i) Un des points de vue considère que les trois spins sont mesurés individuellement dans chaque réalisation de l'expérience. Par exemple, les trois spins peuvent se trouver dans trois régions différentes de l'espace ; lorsque les variables spatiales sont prises en compte, (VI-1) symbolise alors un ket qui peut être écrit plus explicitement sous la forme suivante :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1 : \varphi_a\rangle\, |2 : \varphi_b\rangle\, |3 : \varphi_c\rangle \otimes \Big[\, |1 : +; 2 : +; 3 :\rangle + \eta \;\; |1 : -; 2 : -; 3 : -\rangle \Big] \qquad \text{(VI-8)}$$

où $|\varphi_{a,b,c}\rangle$ sont trois états orbitaux dont les fonctions d'onde ne se recouvrent pas. Ces fonctions peuvent par exemple être entièrement localisées dans des boîtes séparées, où sont effectuées les mesures, de sorte qu'aucune particule n'échappe à la mesure et que chacune d'entre elles est interrogée séparément. La procédure est, après avoir choisi une composante, $Ox$ ou $Oy$ pour chaque spin, de réaliser les trois expériences correspondantes, d'obtenir les trois résultats $A_{x,y}$, $B_{x,y}$ et $C_{x,y}$, et ensuite de calculer leur produit. Le moyennage sur de nombreuses réalisations permet d'obtenir la moyenne $\langle A_{x,y}B_{x,y}C_{x,y}\rangle$. On commence par mesurer $\langle A_yB_yC_x\rangle$, $\langle A_xB_yC_y\rangle$ et $\langle A_yB_xC_y\rangle$ pour vérifier que les corrélations parfaites prédites par la mécanique quantique sont bien observées, à partir de quoi le résultat EPR permet de déduire l'existence de 6 éléments de réalité séparés. Alors on mesure $\langle A_xB_xC_x\rangle$ et, si la mécanique quantique continue à donner des prédictions correctes, on obtient le signe opposé ; la conclusion est alors que le réalisme local est violé. Ou, de façon équivalente, on peut conclure que la valeur obtenue en mesurant, par exemple, $\sigma_{1x}$ dépend de la composante $Ox$ ou $Oy$ qui est mesurée pour les autres spins, même si les opérateurs correspondants commutent avec $\sigma_{1x}$. On arrive alors à la notion de "contextualité quantique", que nous discuterons plus en détail au § D.

(ii) Un point de vue différent est de considérer qu'il a été possible d'inventer une procédure expérimentale pour mesurer directement le produit de trois opérateurs, sans obtenir d'information concernant les valeurs séparées des trois facteurs dans le produit. Alors les quatre opérateurs en jeu commutent tous les uns avec les autres[3], ce qui introduit une différence conceptuelle importante avec les violations habituelles des inégalités de Bell, où la non-commutation est essentielle. Ici, au moins en principe, rien ne s'oppose à ce que l'on puisse mesurer les quatre observables avec un appareillage unique ; Bohr n'aurait pas pu invoquer des mesures incompatibles. Dans de telles conditions, où est alors la contradiction entre le raisonnement réaliste local et la mécanique quantique ? Alors que, dans le cadre du réalisme local, une mesure du produit de trois opérateurs est équivalente à des mesures séparées de chacun des facteurs, ce n'est pas le cas en mécanique quantique. Il est en principe possible d'imaginer un appareillage unique qui mesure les quatre produits, mais impossible d'en concevoir un qui mesure à la fois les six facteurs $A_{x,y}$, $B_{x,y}$ et $C_{x,y}$ (puisque, par exemple, $A_x$ et $A_y$ sont associés à deux mesures incompatibles). Ceci donne effectivement accès à quatre résultats, mais il est impossible de trouver six valeurs des composantes individuelles

[3]Prenons deux quelconques de ces produits. Pour un spin, ils contiennent la même composante, mais des composantes différentes pour les deux autres. Or changer l'ordre de deux matrice de Pauli (§ A-7 du Chapitre XII) introduit un signe moins, puisqu'elles anticommutent. Comme ici deux ordres doivent être changés, deux signes moins se compensent, et les produits de trois opérateurs commutent.

qui reconstruisent ces produits par multiplication. Ce que la mécanique quantique viole alors est la "règle du produit" qui sera discutée au § D-3.

Une expérience idéale GHZ ne mettrait donc en jeu que des mesures de produits qui commutent, plus précisément les mesures simultanées de quatre produits (sans mesurer séparément chacun des facteurs qu'ils contiennent). La beauté d'un tel schéma théorique est que des "loopholes" tels que celui de l'échantillon biaisé (§ C-1 du Chapitre IV) seraient automatiquement fermés[4]. Mais, d'un autre côté, mesurer un produit sans mesurer chacun des facteurs pose un problème expérimental redoutable.

Que les mesures soient séparées ou pas, des tests expérimentaux des égalités GHZ demandent que les trois particules soient mises dans l'état (VI-1), ce qui assurément n'est pas une tâche triviale. Néanmoins, grâce à des techniques élaborées d'optique quantique, l'intrication GHZ a été observée avec 3 photons [253], permettant de réaliser un test couronné de succès de nonlocalité GHZ [254]. Des résultats semblables ont également été obtenus avec 4 photons intriqués [255]. Les techniques de la RMN (résonance magnétique nucléaire) ont également été mises en œuvre pour tester l'égalité GHZ, au moins à des distances microscopiques [256] – voir également [257,258]. Toutes ces expériences ont confirmé les prédictions de la mécanique quantique.

### A-2. Inégalité de GHZ-Mermin

Il est également possible d'obtenir des inégalités locales-réalistes qui sont violées par un système physique quantique dans l'état (VI-1). Ceci rend la contradiction plus semblable aux inégalités de Bell habituelles ; une inégalité est également plus commode pour la réalisation de tests expérimentaux, où des (anti)corrélations parfaites ne sont jamais observées (les expériences sont brièvement discutées à la fin de cette section). Nous avons vu dans le § A-1-a que cet état est un vecteur propre commun avec la valeur propre $-\eta$ des trois produits $\sigma_{1y}\sigma_{2y}\sigma_{3x}$, $\sigma_{1x}\sigma_{2y}\sigma_{3y}$ et $\sigma_{1y}\sigma_{2x}\sigma_{3y}$. C'est également un vecteur propre du produit $\sigma_{1x}\sigma_{2x}\sigma_{3x}$ de valeur prore $\eta$, de sorte que c'est un vecteur propre de l'opérateur :

$$M = \sigma_{1x}\sigma_{2x}\sigma_{3x} - \sigma_{1y}\sigma_{2y}\sigma_{3x} - \sigma_{1x}\sigma_{2y}\sigma_{3y} - \sigma_{1y}\sigma_{2x}\sigma_{3y} \tag{VI-9}$$

de valeur propre $4\eta$. Donc la valeur moyenne de $M$ dans l'état (VI-1) est :

$$\langle M \rangle = 4\eta \tag{VI-10}$$

avec :

$$\eta = \pm 1 \tag{VI-11}$$

[4] On ne pourrait plus supposer que des dispositifs expérimentaux différents sélectionnent des groupes de particules différents, puisqu'un seul dispositif serait utilisé.

L'expression correspondant à $M$ dans le cadre du réalisme local est :

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= A_x B_x C_x - A_y B_y C_x - A_x B_y C_y - A_y B_x C_y \\ &= A_x \left(B_x C_x - B_y C_y\right) - A_y \left(B_y C_x + B_x C_y\right)\end{aligned} \tag{VI-12}$$

où tous les nombres $A$, $B$, $C$ apparaissant dans le membre de droite sont égaux à $\pm 1$ ; chacun d'entre eux est donc égal à son propre inverse. Si le produit $B_x B_y C_x C_y$ est égal à $+1$, nous avons :

$$B_x C_x = \frac{1}{B_y C_y} = B_y C_y \tag{VI-13}$$

de sorte que $\mathcal{M}$ se réduit à $-A_y \left(B_y C_x + B_x C_y\right)$ et que :

$$-2 \leq \mathcal{M} \leq +2 \tag{VI-14}$$

Si, inversement, le produit $B_x B_y C_x C_y$ est égal à $-1$, nous avons :

$$B_y C_x = -\frac{1}{B_x C_y} = -B_x C_y \tag{VI-15}$$

de sorte que $\mathcal{M}$ se réduit à $A_x \left(B_x C_x - B_y C_y\right)$ et que l'inégalité (VI-14) est toujours vérifiée.

La comparaison entre cette inégalité et la relation (VI-10) montre que la mécanique quantique peut violer l'inégalité locale-réaliste par un facteur 2, plus grand que le facteur $\sqrt{2}$ associé aux inégalités BCHSH. Mermin a généralisé cette inégalité à une nombre $N$ quelconque de particules [259], et montré qu'un état GHZ à $N$ particules peut donner lieu à une violation dans un facteur qui croît exponentiellement avec $N$.

Comme nous l'avons mentionné, les expériences comportent toujours des imperfections : les détecteurs n'ont jamais un rendement de 100 %, ils ont un bruit propre, les données ne sont jamais obtenues avec une précision infinie, etc. Utiliser des inégalités est alors un moyen commode de quantifier les violations du réalisme local par rapport aux barres d'erreur expérimentales. D'autres inégalités ont été proposées pour tenir compte de ces problèmes [260, 261]. Des expériences pour tester ces inégalités ont été réalisées [262, 263]. L'utilisation de particules provenant de trois sources indépendantes et donnant lieu à des effets d'interférence qui invalident le réalisme local a été discutée dans [264], et généralisée plus tard à un nombre arbitraire de particules [194]. La transposition à des mesures continues de position et d'impulsion est discutée dans [265]. L'interférométrie à deux particules peut également conduire à des contradictions GHZ avec des particules sans spin [266].

### A-3. Généralisations de GHZ

Nous généralisons l'état GHZ écrit en (VI-1) en introduisant un état $|\Psi\rangle$ à $N$ particules défini par :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|+,+,...,+\rangle + e^{i\xi}\,|-,-,...,-\rangle\Big] \qquad \text{(VI-16)}$$

où $\xi$ est un paramètre réel définissant la phase relative des deux composantes de l'état ; $|\Psi\rangle$ est une superposition cohérente de deux états à $N$ particules où toutes, ou alors aucune, sont dans l'état individuel [5] $|+\rangle$. Ceci explique le nom de "états par tout ou rien" que nous utilisons ici[6], mais utiliser les mots "état GHZ multi-particules" serait tout aussi approprié. On trouve également parfois les mots "états d'intrication maximale", ou encore "états NOON" dans la littérature[7].

L'état que nous considérons est donc réellement très spécial, puisqu'il est une superposition de deux états à $N$ particules où toutes sont dans des états individuels orthogonaux. Un tel état ne doit pas être confondu avec un état différent où chaque particule se trouve placée dans la même superposition cohérente de deux états. Par exemple, si nous préparons $N$ spins $1/2$ en leur faisant traverser un filtre de polarisation (lame séparatrice dépendante du spin, analyseur de Stern et Gerlach, etc.) qui crée une superposition cohérente $\alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle$ pour chaque spin, nous obtenons un état très différent. L'effet du filtre sur le groupe de $N$ particules est de les mettre dans un état qui est un produit d'états cohérents à une particule, à savoir :

$$\begin{aligned}\big|\Psi'\big\rangle = \quad & \Big[\alpha\,|1:+\rangle + \beta\,|1:-\rangle\Big] \otimes \Big[\alpha\,|2:+\rangle + \beta\,|2:-\rangle\Big] \otimes \\ & \otimes ... \otimes \Big[\alpha\,|N:+\rangle + \beta\,|N:-\rangle\Big]\end{aligned} \qquad \text{(VI-17)}$$

Or un tel état contient des composantes variées où certains spins sont vers le haut, d'autres vers le bas, en des proportions variées. Dans (VI-17), en fait chaque particule est dans le même état de spin, une situation qui n'est pas sans rappeler un condensat de Bose-Einstein où toutes les particules seraient dans un même état cohérent – par exemple un condensat se trouvant à la fois des deux côtés d'une barrière de potentiel du fait de l'effet tunnel, comme dans l'effet Josephson. C'est très différent de l'état (VI-16) où la cohérence

[5] Des états par tout ou rien ne demandent pas nécessairement que tous les spins soient dans l'état vers le haut dans la première composante, et vers le bas dans la seconde. Ce qui est important est que chaque spin aille vers un état quantique individuel orthogonal lorsqu'on passe d'une composante à $N$ particules de $|\Psi\rangle$ à l'autre (en d'autres termes, l'axe de quantification peut varier d'un spin au suivant).

[6] En toute rigueur, nous devrions parler d'état "par tout et rien", puisque les deux possibilités sont simultanément présentes dans $|\Psi\rangle$.

[7] Ces états peuvent être écrits comme la superposition d'états notés $N, 0$ et $0, N$, d'où le nom.

est spécifiquement une cohérence à $N$ corps, de sorte que l'intrication est bien plus compliquée.

La composante du spin $j$ sur une direction du plan $xOy$ faisant l'angle $\varphi_j$ avec $Ox$ correspond à l'opérateur :

$$\sigma_j(\varphi_j) = \frac{1}{2}\left[e^{-i\varphi_j}\ \sigma_+(j) + e^{i\varphi_j}\ \sigma_-(j)\right] \tag{VI-18}$$

où $\sigma_\pm$ désigne comme habituellement l'opérateur $\sigma_x \pm i\sigma_y$, avec l'action suivante :

$$\sigma_\pm \left|\pm\right\rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad \sigma_\pm \left|\mp\right\rangle = 2\left|\pm\right\rangle \tag{VI-19}$$

Nous introduisons maintenant l'opérateur à $N$ particules correspondant au produit de diverses composantes de tous les spins :

$$Q(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N) = \sigma_1(\varphi_1)\ \sigma_2(\varphi_2)..., \sigma_N(\varphi_N) \tag{VI-20}$$

qui est égal à :

$$Q(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N) = \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{2}\left[e^{-i\varphi_j}\ \sigma_+(j) + e^{i\varphi_j}\ \sigma_-(j)\right] \tag{VI-21}$$

Compte tenu de (VI-19), il est facile d'obtenir l'action de cet opérateur sur l'état (VI-16). Si l'on commence par la première composante de $\mid \Psi >$, la seule façon de ne pas obtenir zéro par application de l'opérateur (VI-21) est de sélectionner le terme en $e^{i\varphi_j}\ \sigma_-(j)$ dans chaque facteur du produit sur $j$ ; ainsi :

$$Q(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N)\left|+, +, ..., +\right\rangle = e^{i(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_N)}\left|-, -, ..., -\right\rangle \tag{VI-22}$$

De même :

$$Q(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N)\left|-, -, ..., -\right\rangle = e^{-i(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_N)}\left|+, +, ..., +\right\rangle \tag{VI-23}$$

Donc, si nous posons :

$$\zeta = e^{i(\xi-\varphi_1-\varphi_2-...-\varphi_N)} \tag{VI-24}$$

nous obtenons :

$$Q(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N)\left|\Psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\zeta\left|+, +, ..., +\right\rangle + \frac{1}{\zeta}e^{i\xi}\left|-, -, ..., -\right\rangle\right] \tag{VI-25}$$

Si la condition :

$$\zeta = \frac{1}{\zeta} = \pm 1 \tag{VI-26}$$

est satisfaite, l'action de $Q$ sur $\left|\Psi\right\rangle$ reconstruit exactement $\zeta\left|\Psi\right\rangle$ ; le ket $\left|\Psi\right\rangle$ est donc un état propre de $Q$ avec la valeur propre $\zeta$. En d'autres termes,

pourvu que la somme de tous les angles $\varphi_j$ soit égale à $\xi$ (plus un multiple entier de $\pi$), le produit de tous les opérateurs $\sigma_j(\varphi_j)$ correspond à une mesure dont le résultat est certain et vaut $\zeta$[8].

A partir de (VI-25) et (VI-24), nous pouvons calculer la moyenne quantique de $Q$, et obtenir pour des valeurs quelconques des angles :

$$\langle Q \rangle = \cos(\xi - \varphi_1 - \varphi_2 - ... - \varphi_N) \qquad \text{(VI-27)}$$

Par exemple si tous les angles $\varphi_j$ sont égaux à une même valeur $\varphi$, cette formule prédit que la moyenne de $Q$ oscille rapidement en fonction de $\varphi$ si $N$ est grand. Or, quelle que soit la valeur de $N$, il se trouve alors qu'il est totalement impossible de reproduire les oscillations contenues dans (VI-27) au sein du réalisme local [267]. Dans le cas $N = 2$, ceci n'est bien sûr que le théorème de Bell habituel. Mais, dès que $N$ devient égal à 3 ou prend une valeur plus grande, la contradiction devient encore plus nette. Dans [267], on suppose qu'une théorie probabiliste locale reproduit (VI-27) seulement pour un certain nombre de valeurs particulières des angles $\varphi$ (ceux pour lesquels le résultat est certain). On peut ainsi montrer que la théorie en question prédit que $\langle Q \rangle$ est indépendant de tous les $\varphi$ : la moyenne reste alors strictement constante à la valeur $+1$ ! De fait, l'existence même de l'oscillation prédite par (VI-27) est un pur effet quantique non local.

Comme nous l'avons déjà remarqué, il s'agit d'un effet de cohérence à $N$ particules : il faut mesurer des composantes de tous les spins pour obtenir des effets physiques intéressants. Si un seul spin est ignoré par la mesure, dans (VI-21) le nombre d'opérateurs de spin n'est plus suffisant pour transformer le ket $|+,+,...,+\rangle$ en $|-,-,...,-\rangle$ comme c'était le cas dans (VI-22), et le résultat devient complètement indépendant de la phase relative $e^{i\xi}$ des deux composantes. Aucun effet de cohérence quantique ne se produit plus. En fait, il est facile de voir que la valeur moyenne de tous les produits de $N-1$, $N-2$, etc., composantes des spins est nulle ; l'effet d'interférence quantique qui conduit à (VI-27) ne se produit que si tous les $N$ spins sont mesurés.

Ce n'est pas la seule propriété remarquable des états "par tout ou rien". Par exemple on peut montrer que, pour de grandes valeurs de $N$, ces états conduisent à des violations exponentielles des limites imposées par le réalisme local [259]. Dans le cadre de l'étude générale du rôle des corrélations dans

[8] Dans le § A, nous avons supposé que $N = 3$, $\alpha = \pi$ ; dans (VI-3) et (VI-4), nous avons pris la somme des trois angles de mesure égale à $\pi$, de sorte que la valeur propre était $+1$ comme attendu ; mais dans (VI-5) les angles sont tels que la somme des $\varphi$ est 0, et effectivement nous avons trouvé que la valeur propre était $-1$. Les résultats obtenus ici sont donc une généralisation directe de ceux du § A à un nombre arbitraire de particules.

Par exemple, si $N = 7$ et $\alpha = \pi$, on trouve que le produit de 6 composantes de spin le long de $Oy$ par une le long de $Ox$ possède la valeur propre $+1$, alors que le produit de toutes les composantes le long de $Ox$ a la valeur propre $-1$, en contradiction avec la prédiction du réalisme local.

la réduction du bruit quantique en spectroscopie [268], il a été souligné [269] que ces états (appelés dans ce contexte "états de corrélation maximale") ont des propriétés intéressantes en termes de mesures de fréquences : l'incertitude de mesure de fréquence atteint la "limite de Heisenberg" décroissant comme $1/N$ (et non pas en $1/\sqrt{N}$ comme cela se produirait pour des mesures effectuées avec des particules indépendantes)[9]. La Ref. [270] donne une discussion de cette méthode comparée à d'autres utilisant des condensats de Bose-Einstein. De même, l'utilisation de tels états permet d'envisager une méthode de "lithographie quantique", mettant en jeu un processus optique non linéaire (absorption multi-photonique), où la limite de diffraction habituelle en $\lambda/2$ de l'optique classique est divisée par $N$ [271–273]. Ainsi les corrélations quantiques de ces états peuvent un jour se révéler comme une source de meilleure précision dans diverses expériences ou même des techniques.

Nous avons déjà mentionné dans le § A que l'obtention d'une intrication avec $N = 3$ a été décrite dans les Refs. [253, 274] et utilisée pour tester l'égalité GHZ [254]. Des idées pour généraliser à des valeurs plus élevées de $N$ avec des ions dans un piège ont été proposées par Mølmer et al. [275] ; elles mettent en œuvre la dépendance des fréquence de résonance du système en fonction du mouvement de plusieurs ions dans le même piège, ainsi que des effets d'interférences partiellement destructives. Le schéma a été mis en pratique dans une expérience [276] où les états "par tout ou rien" ont été créés pour $N = 2$ ainsi que $N = 4$ ions dans un piège. Les états GHZ ne fournissent pas la seule possibilité pour obtenir des violations du réalisme local avec trois particules ; il est également possible d'utiliser trois particules provenant de trois sources indépendantes, pourvu qu'elles soient envoyées dans un système interférentiel approprié [264].

## B. Inégalité de Cabello

Nous discutons maintenant un schéma introduit par Cabello [277] qui permet d'obtenir des violations des inégalités du type BCHSH allant au-delà de la borne de Cirelson (§ B du Chapitre V), atteignant en fait la valeur maximale 4 mathématiquement compatible avec la définition de la somme de valeurs moyennes qui intervient dans ces inégalités. Pour cela,

[9] On peut donner une interprétation physique simple de ce gain en sensibilité. Supposons par exemple que les deux états de spin individuels $|\pm\rangle$ représentent des particules uniques se propageant dans l'un des deux bras d'un interféromètre de Mach-Zhender. Le ket (VI-16) décrit alors un état à $N$ particules où toutes se propagent ensemble, soit dans un bras de l'interféromètre, soit dans l'autre. En d'autres termes, ce qui se propage dans le système interférentiel est en fait un agrégat de $N$ particules ayant $N$ fois la masse et $N$ fois l'énergie d'une particule unique. Comme la longueur d'onde de De Broglie d'un objet quantique de masse $Nm$ et d'énergie $Ne$ est $\hbar/N\sqrt{em}$, elle est $N$ fois plus courte que pour une particule unique, ce qui améliore la sensibilité de l'interféromètre dans le même facteur.

il faut considérer un système composé de trois sous-systèmes, et mettre les résultats GHZ sous une forme où ils apparaissent comme les composantes d'une inégalité BCHSH ; on transforme en quelque sorte les corrélations GHZ à trois particules en corrélations BCHSH à deux particules.

A nouveau, nous considérons donc trois spins dans l'état (VI-1) avec $\eta = +1$ et envisageons des mesures des composantes des trois spins selon les directions $Ox$ ou $Oy$. Plus explicitement, nous écrivons l'état quantique initial sous la forme :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\varphi_a(1)\rangle |\varphi_b(2)\rangle |\varphi_c(3)\rangle \otimes \Big[ |1:+,2:+,3:+\rangle + |1:-,2:-,3:-\rangle \Big] \tag{VI-28}$$

où $|\varphi_{a,b,c}\rangle$ sont trois états orbitaux localisés dans trois régions différentes de l'espace A, B, et C où les trois opérateurs Alice, Bob et Carole effectuent des mesures.

Supposons par exemple qu'une mesure des trois composantes selon $Ox$ des spins soit effectuée. Nous avons vu au § A que les produits des trois résultats valent toujours $\eta = +1$ ; il en découle que, soit deux résultats valent $-1$ et un $+1$, soit les trois valent $+1$. Nous pouvons alors numéroter les spins : si deux résultats $-1$ sont obtenus, nous appelons $i$ et $j$ les régions de l'espace où se trouvent les spins correspondants, et leur attribuons ce même numéro ($i$ étant attribué à la première région dans l'ordre alphabétique A, B, C), et $k$ la région où le résultat $+1$ a été obtenu. Si les trois résultats sont égaux[10] à $+1$, $i = A$, $j = B$ et $k = C$. Dans tous les cas nous avons :

$$\langle \sigma_x(i)\sigma_x(j) \rangle = 1 \tag{VI-29}$$

qui est bien une relation portant sur deux spins seulement.

### B-1. Réalisme local

Dans le cadre du réalisme local et du théorème EPR, les corrélations parfaites GHZ nous permettent d'attribuer à chacune des trois régions de l'espace, et pour chaque réalisation de l'expérience, trois nombres $X$, $Y$ et $Z$ égaux à $\pm 1$. Nous écrivons ainsi 9 nombres $X_{a,b,c}$, $Y_{a,b,c}$ et $Z_{a,b,c}$, qui donnent le résultat d'une mesure de la composante selon $Ox$, $Oy$, ou $Oz$ du spin se trouvant dans la région de l'espace A, B et C. La transposition des prédictions quantiques impose que, pour chaque triplet de particules émis dans une réalisation de l'expérience, le produit $X_a X_b X_c$ soit égal à 1 ; ou bien deux des $X$ sont égaux à $-1$, ou aucun. Nous pouvons alors définir les trois indices $i$, $j$ et $k$ pour tous les triplets de spins (et non pas seulement ceux dont toutes les composantes selon $Ox$ sont mesurées) comme suit :

[10] Si l'on développe $|\Psi\rangle$ sur les vecteurs propres des composantes sur $Ox$ des spins, on voit que ce cas se produit 1 fois sur 4.

– si deux des $X$ sont égaux à $-1$, on leur attribue des indices $i$ et $j$ (parmi ces deux régions, $i$ est associé avec celle qui vient en premier dans l'ordre alphabétique), et $k$ à la troisième région ; $X_k$ est donc toujours égal à $+1$ ;

– si tous les $X$ sont égaux à $+1$, alors $i = a$, $j = b$ et $k = c$.

Pour chaque réalisation, ceci définit une correspondance parfaite entre les régions de l'espace et les trois indices $i$, $j$ et $k$, mais évidemment cette correspondance change d'une réalisation à l'autre. Il est cependant possible de toujours effectuer cette numérotation, quelles que soient les mesures effectuées, car le réalisme local nous a permis d'introduire la contrafactualité (§ C-2 du Chapitre IV) nécessaire pour cela ; ce n'est bien sûr pas le cas en mécanique quantique.

Dans la démonstration du § A-2 du Chapitre IV de l'inégalité BCHSH pour deux spins, nous avons considéré en (IV-7) une quantité du type :

$$X\left(Y + mY'\right) + nX'\left(Y - mY'\right) \tag{VI-30}$$

avec :

$$m = \pm 1 \quad ; \quad n = \pm 1 \tag{VI-31}$$

L'expression (VI-30) est toujours égale à $\pm 2$ lorsque les 4 nombres qui y apparaissent sont égaux à $\pm 1$. Ici nous introduisons la combinaison suivante des 9 nombres :

$$X_i\left(X_j + mY_j\right) + nY_i\left(X_j - mY_j\right) \tag{VI-32}$$

qui, elle aussi, est toujours égale à $\pm 2$ ; en effet, ou bien $(X_j + mY_j)$, ou bien $(X_j - mY_j)$ est nul, et tous les nombres ont un module 1. Comme $Y_k = \pm 1$, on peut choisir $m = n = -Y_k$, et cette expression devient :

$$X_i\left(X_j - Y_kY_j\right) - Y_iY_k\left(X_j + Y_kY_j\right) \tag{VI-33}$$

ce qui donne :

$$X_iX_j - X_iY_kY_j - Y_iX_jY_k - Y_iY_j = \pm 2 \tag{VI-34}$$

Mais, puisque par définition de l'indice $k$ nous avons $X_k = 1$, l'équation (VI-34) peut encore s'écrire :

$$X_iX_jX_k - X_iY_jY_k - Y_iX_jY_k - Y_iY_jX_k = \pm 2 \tag{VI-35}$$

Ainsi, dans le cadre du réalisme local, le produit de trois mesures selon $Ox$ moins la somme des trois produits de deux composantes selon $Oy$ et d'une selon $Ox$ est toujours égal à $\pm 2$. Lorsque l'on prend la valeur moyenne sur un grand nombre de réalisations, il vient donc :

$$-2 \leq \langle X_iX_jX_k\rangle - \langle X_iY_jY_k\rangle - \langle Y_iX_jY_k\rangle - \langle Y_iY_jX_k\rangle \leq +2 \tag{VI-36}$$

La valeur moyenne du produit de trois $X$ différents moins les trois combinaisons différentes de deux $Y$ et de un $X$ est toujours comprise entre $\pm 2$.

### B-2. Contradiction avec la mécanique quantique

En mécanique quantique, la valeur moyenne du produit des trois composantes des spins selon $Ox$ moins les trois combinaisons différentes de composantes selon $Oy$ et d'une selon $Ox$ est :

$$\begin{aligned} Q \quad &= \langle \sigma_x(1)\sigma_x(2)\sigma_x(3)\rangle - \langle \sigma_x(1)\sigma_y(2)\sigma_y(3)\rangle \\ &\quad - \langle \sigma_y(1)\sigma_x(2)\sigma_y(3)\rangle - \langle \sigma_y(1)\sigma_y(2)\sigma_x(3)\rangle \end{aligned} \tag{VI-37}$$

Mais nous avons vu plus haut (§ A) que le premier terme vaut $+1$, alors que tous les autres valent $-1$. Il s'ensuit que la mécanique quantique prédit pour cette quantité une valeur $+4$, en forte violation de (VI-36), par un facteur 2.

Nous voyons ainsi qu'en combinant des éléments du raisonnement BCHSH avec d'autres du raisonnement GHZ, il est possible d'obtenir avec trois particules des violations d'inégalités BCHSH généralisées qui saturent une limite absolue, mathématiquement impossible à dépasser. La troisième particule joue en quelque sorte un rôle de "marqueur" qui permet de choisir pour les deux autres particules une inégalité BCHSH qui dépasse la borne de Cirelson. La Ref. [278] propose une autre méthode mettant en jeu des ensembles quantiques déterminés par pré- et post-sélection, et permettant également d'atteindre la limite absolue de 4.

## C. Impossibilités de Hardy

Un autre schéma illustrant les contradictions entre réalisme local et prédictions de la mécanique quantique a été introduit par Hardy [72]. Comme le théorème de Bell original, il met en jeu deux particules corrélées, mais il est néanmoins totalement différent. Il conduit en effet à des conclusions concernant la possibilité (ou l'impossibilité) de se produire pour certains événements – au lieu de contraintes mathématiques sur des taux de corrélation. Une discussion générale de cette intéressante contradiction est donnée dans [279]. Comme dans le § A-2 du Chapitre IV, nous supposons que la première particule peut subir deux types de mesures, caractérisées par deux valeurs $a$ et $a'$ du premier paramètre.

Dans le cadre du réalisme local, appelons $A$ et $A'$ les résultats correspondants. Des mesures similaires sont possibles sur la seconde particule, et nous appelons $B$ et $B'$ les résultats. Considérons alors trois types de situations (Fig. VI.2) :

(i) si les paramètres de mesures sont $a$, $b$, le résultat $A = 1$, $B = 1$ est parfois obtenu ;

(ii) pour les mesures "croisées" (soit $a$, $b'$, soit $a'$, $b$), nous avons des certitudes : si $A = 1$, la valeur de $B'$ est toujours $-1$ ; si $B = 1$, la valeur de $A'$ est toujours $-1$. Ou, si l'on veut exprimer la même hypothèse sous la

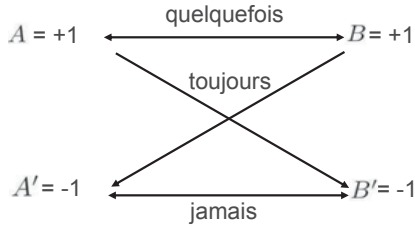


FIGURE *VI.2 – Schéma logique des impossibilités de Hardy. S'il se produit parfois que* $A = B = 1$*, et si* $B'$ *(resp.* $A'$*) est toujours égal à* $-1$ *quand* $A$ *(resp.* $B$*) est égal à* $1$*, alors il doit se produire des événements pour lesquels* $A' = B' = -1$ *; mais on peut construire certains états quantiques pour lesquels les deux premières conditions sont satisfaites alors que de tels événements sont impossibles, ce qui crée une contradiction avec le réalisme local.*

forme d'une exclusion : des "double 1" $A = 1$, $B^{'} = 1$ ou $A' = 1$, $B = 1$ ne se produisent jamais ;

(iii) lorsque les deux paramètres ont des primes, nous supposons que le "double $-1$" est impossible : $A' = -1$, $B' = -1$ n'est jamais observé.

Il se trouve que ces trois hypothèses sont en fait incompatibles. En effet, considérons le schéma logique de la Figure VI.2, où la partie supérieure correspond à la possibilité découlant de la proposition (i) ; la proposition (ii) entraîne alors que, si $A = 1$, on a nécessairement $B' = -1$, ce qui correspond à la première diagonale de la figure ; la seconde diagonale s'ensuit par symétrie. Nous voyons alors que tous les événements correspondant aux résultats $A = B = 1$ correspondent nécessairement aussi à $A' = B' = -1$, de sorte que la contradiction avec (iii) surgit. Ainsi, le "quelquefois" de (i) est contradictoire avec le "jamais" de la proposition (iii).

Mais il se trouve que la mécanique quantique permet la réalisation simultanée des trois propositions ! Pour voir comment, considérons par exemple un état quantique à deux spins de la forme :

$$|\Psi\rangle = \alpha\,|+,\ -\rangle + \beta\,|-,\ +\rangle + \gamma\,|+,\ +\rangle \tag{VI-38}$$

où les kets $|\pm,\ \pm\rangle$ sont des notations de spin commodes pour les états propres de $A'$ et $B'$ :

$$|\pm, \pm\rangle = \big|A' = \pm, B' = \pm 1\big\rangle \tag{VI-39}$$

L'absence dans $|\Psi\rangle$ de toute composante sur $|A' = -1, B' = -1\rangle$ fait que la proposition (iii) est automatiquement réalisée. Pour les mesures sans prime, pour des spins nous supposons qu'elles sont toutes deux réalisées le long de directions du plan $xOz$ qui font un angle $2\theta$ avec $Oz$ ; le vecteur propre de

valeur propre +1 associé pour un seul spin est alors :

$$\cos\theta\,|+\rangle + \sin\theta\,|-\rangle \tag{VI-40}$$

La proposition (ii) (diagonales de la Fig. VI.2) revient alors à exclure la possibilité associée à l'état à deux spins :

$$\cos\theta\,|+,+\rangle + \sin\theta\,|-,+\rangle \tag{VI-41}$$

ainsi que celle associée à l'état :

$$\cos\theta\,|+,+\rangle + \sin\theta\,|+,-\rangle \tag{VI-42}$$

Les deux conditions d'exclusion s'obtiennent en écrivant la nullité du produit scalaire de $|\Psi\rangle$ avec ces états, ce qui donne :

$$\alpha\sin\theta + \gamma\cos\theta = \beta\sin\theta + \gamma\cos\theta = 0 \tag{VI-43}$$

soit :

$$\alpha = \beta = -\gamma\cot\theta \tag{VI-44}$$

Alors, à un coefficient arbitraire près, nous pouvons écrire $|\ \Psi >$ sous la forme :

$$|\Psi\rangle = -\cos\theta\,\Big(\,|+,-\rangle + |-,+\rangle\Big) + \sin\theta\,|+,+\rangle \tag{VI-45}$$

Le calcul suivant est alors celui du produit scalaire de ce ket par celui où les deux spins sont dans l'état (VI-40) ; le résultat est :

$$-\sin\theta\cos^2\theta \tag{VI-46}$$

L'étape finale est de diviser le carré de ce résultat par la norme du ket (VI-45) afin d'obtenir la probabilité de processus considéré en (iii), calcul simple qui est donné en détail dans l'Appendice D. Cette probabilité n'est pas nulle ; la valeur du maximum en fonction de $\theta$ trouvée dans l'Appendice C est à peu près 9 %. Ceci établit donc effectivement que le couple de résultats associés à la proposition (i) peut parfois être obtenu simultanément avec (ii) et (iii) : dans 9 % des cas, les prédictions de la mécanique quantique sont en contradiction complète avec celles d'un raisonnement réaliste local.

Une particularité intéressante des propositions ci-dessus est qu'elles se généralisent à un nombre arbitraire de mesures [280] ; il se trouve que ceci permet une augmentation significative du taux d'événements qui seraient impossibles dans le cadre du réalisme local, de 9 % à presque 50 % ! La généralisation met en jeu une chaîne (Fig. VI.3), qui maintient inchangées les deux premières lignes (i) et (ii), et itère la seconde de façon récurrente, en supposant que :

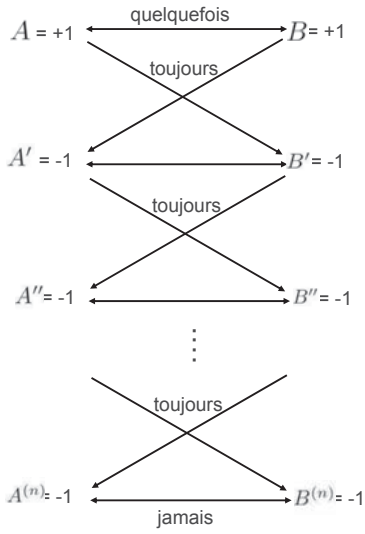


FIGURE *VI.3 – Schéma logique d'une impossibilité de Hardy itérée.*

(iii) pour des mesures du type $(a', b'')$ ou $(a'', b')$, on n'obtient jamais des résultats opposés[11] ;

(iv) de même, pour des mesures de type $(a'', b''')$ ou $(a''', b'')$, on n'obtient jamais des résultats opposés ;

etc.

(n) mais, pour une mesure de type $(a^n, b^n)$, on n'obtient jamais $-1$ et $-1$.

La démonstration d'incompatibilité est très similaire à celle donnée plus haut ; elle est résumée dans la Figure VI.3.

Dans les deux cas, la façon de résoudre la contradiction est la même que pour le théorème de Bell : en mécanique quantique, pour une paire donnée de spins, il n'est pas correct de raisonner sur les quatre quantités $A$, $A'$, $B$ et $B'$, même comme des quantités inconnues qui pourraient éventuellement être déterminées dans une expérience ultérieure. La raison en est simplement que, pour une paire donnée, il est évidemment impossible de concevoir une expérience qui les mesure toutes les quatre : les mesures sont incompatibles. Pour une discussion d'effets non locaux avec d'autres états quantiques, voir [281].

[11] En fait, le raisonnement demande seulement que le couple de résultats $-1$, $+1$ ne soit jamais obtenu, et ne pose aucune contrainte sur le couple de résultats $+1$, $-1$.

Des égalités GHZ, ou des impossibilités de Hardy, qui sont violées par la mécanique quantique peuvent sembler conduire à une contradiction encore plus forte que juste une violation des inégalités BCHSH. Mais un examen plus détaillé montre que, en réalité, les deux sont reliées et que toutes les violations que nous avons discutées se ramènent à des inégalités à un niveau plus profond [282].

## D. Théorème de Bell-Kochen-Specker ; contextualité

Observer des violations des diverses inégalités de Bell demande, comme nous avons vu, de mesurer des corrélations entre deux systèmes quantiques intriqués (décrits par un état d'ensemble qui n'est pas un produit). On pourrait en tirer l'impression que corrélation et intrication entre deux systèmes sont les ingrédients essentiels pour obtenir des résultats quantiques paradoxaux (impossible à expliquer dans le cadre du réalisme classique). Mais ce n'est pas le cas : même avec un système quantique unique, sans la moindre intrication, la mécanique quantique prédit des résultats qui sont eux aussi paradoxaux. L'élément central n'est plus ici la localité, mais la notion de contextualité : la mécanique quantique est incompatible avec le réalisme (les propriétés de systèmes physiques peuvent être définies indépendamment de leur mesure) et la non-contextualité (ces propriétés sont indépendantes d'autres mesures compatibles effectuées dans la même expérience).

L'idée générale a été introduite de façon indépendante et presque simultanée par Bell (§ V de [5]) ainsi que par Kochen et Specker [283]. Si les démonstrations mathématiques de ces auteurs sont différentes, les conclusions physiques sont les mêmes, ce qui explique pourquoi l'on utilise souvent le nom général de "théorème BKS" pour désigner ce type de résultat. L'hypothèse du réalisme peut prendre plusieurs formes (le réalisme EPR par exemple) ; on peut aussi supposer directement l'existence de variables supplémentaires. Une telle variable sera alors dite "contextuelle" si sa valeur dépend, non seulement de la quantité physique qu'elle décrit, mais également des autres quantités physiques qui peuvent être mesurées dans la même expérience (en mécanique quantique, elles correspondent à des observables qui commutent). Si, en revanche, la valeur de la variable supplémentaire est indépendante de toutes les autres observables que l'expérimentateur peut décider de mesurer simultanément, la variable supplémentaire est appelée "non contextuelle". On peut alors considérer qu'elle décrit une propriété du seul système physique, et non pas une propriété combinée du système et de l'appareil de mesure ; cette propriété peut avoir pré-existé dans le système bien avant qu'il soit soumis à l'interaction avec un appareil de mesure. Les notions de distance ou de localité ne jouent plus ici de rôle particulier ; le théorème BKS s'applique parfaitement à un système unique bien localisé dans l'espace. Nous en discutons maintenant quelques exemples.

### D-1. Particule de spin 1

Comme dans la référence [283] (§ 4), nous considérons une particule de spin 1, avec trois états propres $|+1\rangle$, $|0\rangle$ et $|-1\rangle$ de la composante du spin le long de $Oz$ ; ces états constituent une base de son espace des états. Les trois composantes du spin $S_x$, $S_y$, et $S_z$ ne commutent pas entre elles (elles satisfont aux relations habituelles de commutation d'un moment cinétique). Par exemple, les matrices associées à $S_x$ et $S_z$ sont, pour un spin 1 :

$$(S_z) = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (S_x) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(VI-47)}$$

Ces deux matrices ne commutent effectivement pas, mais il est facile de vérifier que c'est le cas de leurs carrés et que, plus généralement, les trois carrés de $S_x$, $S_y$, et $S_z$ commutent (c'est là une propriété particulière du moment cinétique 1). De plus, la somme de ces trois carrés est une constante (un opérateur proportionnel à l'opérateur identité, parfois appelé un "c-nombre") puisque :

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 2\hbar^2 \qquad \text{(VI-48)}$$

Aucun principe fondamental de la mécanique quantique ne s'oppose donc à ce que l'on imagine une mesure simultanée triple des observables $S_x^2$, $S_y^2$ et $S_z^2$ ; nous savons que la somme des trois résultats sera toujours 2 (à partir de maintenant, nous laissons tomber le facteur $\hbar^2$, qui ne joue aucun rôle dans la discussion). Inutile de dire que le choix des trois directions orthogonales est totalement arbitraire, et que la comptabilité est satisfaite pour un choix quelconque de cette triade d'axes, mais pas plus d'un : les mesures pour des choix différents des axes orthogonaux restent incompatibles ($S_z^2$ commute avec le carré de toute composante du spin le long d'un axe qui est perpendiculaire à $Oz$, mais pas si les deux axes ne sont pas perpendiculaires).

Remarquons au passage que la mesure du carré $S_x^2$ d'une composante du spin ne peut pas être vue simplement comme une mesure de $S_x$ dont le résultat serait élevé après coup au carré par l'expérimentateur ! Ne pas obtenir une information (le signe), ou l'ignorer après qu'elle ait été obtenue dans une mesure, ne sont pas des procédures équivalentes (nous reviendrons sur ce point plus en détail, en termes d'interférences et de décohérence, à la fin du § A-2-c du Chapitre XI). Il y a effectivement moins d'information dans $S_x^2$ que dans $S_x$ lui-même, puisque le premier opérateur a deux valeurs propres (1 et 0), tandis que le second en a trois (puisque le résultat $-1$ est également possible). Ce qui est nécessaire pour mesurer directement $S_x^2$ est, par exemple, un système d'analyse de Stern et Gerlach modifié où les deux composantes de la fonction d'onde correspondant aux résultats $\pm 1$ ne sont pas séparées, ou alors où elles le sont mais ensuite regroupées de manière qu'il devienne impossible de les distinguer. De façon générale, en mécanique

quantique, la mesure du carré d'un opérateur ne correspond certainement pas au même processus de mesures que celle de l'opérateur lui-même !

Supposons maintenant que nous attribuions à chaque spin individuel un élément de réalité EPR (variable supplémentaire) qui corresponde au résultat de mesure de $S_x^2$ ; par symétrie, on fait de même pour les deux autres composantes, de sorte que chaque spin reçoit ainsi trois variables supplémentaires $\lambda$ auxquelles nous pouvons attribuer des valeurs qui déterminent les résultats possibles de mesure, 1 ou 0. Les résultats sont décrits par des fonctions de ces variables, que nous notons $A_{x,y,z}$ :

$$A_x = 0 \text{ ou } 1\,;\ A_y = 0 \text{ ou } 1\,;\ A_z = 0 \text{ ou } 1 \qquad \text{(VI-49)}$$

A première vue, on a l'impression que cela fournit un total de 8 possibilités ; mais, si nous voulons conserver la relation (VI-48), nous devons sélectionner parmi ces 8 possibilités seulement celles pour lesquelles deux $A$ valent 1, et un vaut 0. Pour ce spin particulier, nous attribuons alors des couleurs aux trois directions orthogonales $Ox$, $Oy$ et $Oz$ : les deux directions pour lesquelles $A = 1$ sont colorées en rouge, la dernière en bleu [284].

La même opération peut évidemment être réalisée pour tous les choix possibles de triplet de directions $Oxyz$. Une question qui se pose alors tout naturellement est : pour une direction arbitraire $Ox$, pouvons-nous attribuer une couleur donnée (une valeur donnée de $A_x$) qui soit indépendante du contexte dans lequel elle a été définie ? Effectivement, nous n'avons pas défini cette couleur en tant que propriété de la direction $Ox$ seule, mais dans le contexte de deux autres directions $Oy$ et $Oz$ ; la possibilité de réaliser un coloriage des directions qui soit indépendant du contexte n'a donc rien d'évident. Est-il par exemple possible de garder $Oz$ fixe et de faire tourner $Ox$ et $Oy$ autour de cet axe, sans changer la couleur de $Oz$ ? Cette question soulève un petit problème amusant de géométrie qu'on pourrait appeler "coloration ternaire de toutes les directions de l'espace" ? Kochen et Specker ont montré que ce problème conduit à une impossibilité ; pour une démonstration complète, voir les articles originaux[12], ou une démonstration plus simple qui se trouve au § IV de l'article de revue de Mermin [9].

La conclusion est que toute théorie où les mesures révèlent une propriété que le système possédait avant la mesure doit être contextuelle pour reproduire les prédictions de la mécanique quantique : les résultats de plusieurs mesures compatibles effectuées simultanément doivent dépendre de la nature de toutes ces mesures, sinon des contradictions apparaisssent. Une caractéristique importante de ce théorème est qu'il s'applique à tout état quantique (nous revenons sur l'indépendance de l'état au § D-4). Il met en jeu un seul

[12] La démonstration originale de Kochen et Specker met en jeu 117 directions différentes de l'espace ordinaire ; depuis des preuves n'utilisant qu'un plus petit nombre de directions ont été proposées, par exemple dans la Ref. [285] qui en met en jeu 18.

système quantique et ne fait intervenir aucune intrication quantique, contrairement au théorème de Bell.

### D-2. Inégalité du pentagramme

D'autres contradictions entre la mécanique quantique et le réalisme non contextuel peuvent être démontrées avec des particules de spin 1. Nous présentons maintenant la version proposée par Klyachko et al. [286]. La matrice associée avec la composante $S_\theta$ de $\mathbf{S}$ le long de la direction du plan $xOz$ faisant un angle $\theta$ avec $Oz$ est :

$$S_\theta = S_z \cos\theta + S_x \sin\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{(VI-50)}$$

Nous notons $|1\rangle$, $|0\rangle$ et $|-1\rangle$ les vecteurs propres de $S_z$ avec les valeurs propres respectives $+1$, 0 et $-1$, et $|0_\theta\rangle$ le vecteur propre de $S_\theta$ de valeur propre nulle. Ce vecteur est égal à :

$$|0_\theta\rangle = \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}|1\rangle - \cos\theta\,|0\rangle - \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}|-1\rangle \qquad \text{(VI-51)}$$

car il est facile de vérifier que l'action de l'opérateur (VI-50) sur ce ket donne zéro. Ce ket est appelé "neutrally polarized state" dans la référence [286]. Le produit scalaire $\langle 0\,|0_\theta\rangle = -\cos\theta$ s'annule lorsque $\theta = \pi/2$. Comme il est possible de choisir deux directions orthogonales quelconques pour les axes $Ox$ et $Oz$ d'un référentiel orthonormé, il en découle que le produit scalaire de deux "neutrally polarized states" $|0_{\theta,\varphi}\rangle$ et $\left|0_{\theta',\varphi'}\right\rangle$ est zéro si les deux directions définies par les angles polaire et azimuthal $\theta, \varphi$ et $\theta', \varphi'$ sont orthogonales :

$$\langle 0_{\theta,\varphi}\left|0_{\theta',\varphi'}\right\rangle = 0 \quad \text{pour des directions orthogonales} \qquad \text{(VI-52)}$$

#### D-2-a. Système quantique

Pour tout vecteur unitaire $\mathbf{u}$ nous définissons une observable $A_\mathbf{u}$ :

$$A_\mathbf{u} = 2\,[\mathbf{u}\cdot\mathbf{S}]^2 - 1 \qquad \text{(VI-53)}$$

Cet opérateur a deux valeurs propres, $+1$ (deux fois dégénérée) et $-1$. Il s'écrit également :

$$A_\mathbf{u} = 1 - 2\,|0_\mathbf{u}\rangle\langle 0_\mathbf{u}| \qquad \text{(VI-54)}$$

où $|0_\mathbf{u}\rangle$ est le vecteur propre normé de $S_\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot S$ de valeur propre nulle :

$$S_\mathbf{u}\,|0_\mathbf{u}\rangle = 0 \qquad \text{(VI-55)}$$

Deux opérateurs $A_{\mathbf{u}}$ et $A_{\mathbf{u}'}$ commutent si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$ sont orthogonaux, puisque nous avons vu au § D-1 que les carrés des composantes de $S$ commutent dans ce cas.

Considérons alors (Fig. VI.4) un pentagramme régulier de sommets $M_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) et de centre $P$, ainsi qu'un point $O$ sur son axe (perpendiculaire en $P$ au plan du pentagramme). Les directions des vecteurs $OM_i$ définissent les cinq vecteurs unitaires $\mathbf{u}_i$. L'angle entre ces vecteurs dépend de la position de $O$, que nous pouvons ajuster de sorte que l'angle entre deux vecteurs consécutifs soit 90 degrés ; alors le produit scalaire $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_{i+1}$ s'annule pour tout $i$ (nous introduisons une permutation cyclique en considérant que $i+1 = 1$ quand $i = 5$). Mais nous avons vu au § D-1 que les carrés des composantes d'un moment cinétique $J = 1$ commutent. Les directions $\mathbf{u}_i$ définissent alors cinq opérateurs $A_{\mathbf{u}_i}$ obéissant aux relations de commutation :

$$\left[A_{\mathbf{u}_i}, A_{\mathbf{u}_{i+1}}\right] = 0 \qquad \forall i \tag{VI-56}$$

En principe, il est possible de mesurer deux de ces observables simultanément, mais pas plus, car par exemple il n'y a pas de raison particulière pour que $A_{\mathbf{u}_i}$ commute avec $A_{\mathbf{u}_{i+2}}$.

Compte tenu de (VI-54) et (VI-52), le produit $P_i$ de deux $A_{\mathbf{u}_i}$ consécutifs s'écrit :

$$P_i = A_{\mathbf{u}_i} A_{\mathbf{u}_{i+1}} = 1 - 2\left(\left|0_{\mathbf{u}_i}\right\rangle \left\langle 0_{\mathbf{u}_i}\right| + \left|0_{\mathbf{u}_{i+1}}\right\rangle \left\langle 0_{\mathbf{u}_{i+1}}\right|\right) = A_{\mathbf{u}_i} + A_{\mathbf{u}_{i+1}} - 1 \tag{VI-57}$$

Il en découle que la somme $T$ de tous les $P_i$ est :

$$T = \sum_{i=1}^{5} P_i = \sum_{i=1}^{5} A_{\mathbf{u}_i} A_{\mathbf{u}_{i+1}} = 2\sum_{i=1}^{5} A_{\mathbf{u}_i} - 5 \tag{VI-58}$$

Considérons alors un système de spin 1 dans un état $|0_{\mathbf{u}=\mathbf{e}_z}\rangle$, où $\mathbf{e}_z$ est le vecteur unitaire le long de l'axe $Oz$ du pentagramme (Fig. VI.4). La valeur moyenne de $A_{\mathbf{u}}$ dans cet état est :

$$\langle A_{\mathbf{u}}\rangle = \langle 0_{\mathbf{u}=\mathbf{e}_z}| \left[1 - 2\left|0_{\mathbf{u}}\right\rangle \left\langle 0_{\mathbf{u}}\right|\right] \left|0_{\mathbf{u}=\mathbf{e}_z}\right\rangle = 1 - 2\left|\langle 0_{\mathbf{u}=\mathbf{e}_z} \left|0_{\mathbf{u}}\right\rangle\right|^2 = 1 - 2\cos^2\theta \tag{VI-59}$$

où $\theta$ est l'angle entre les directions $\mathbf{u}$ et $\mathbf{e}_z$ – pour obtenir la troisième égalité, nous avons fait usage de (VI-51). Un calcul trigonométrique simple (que nous repoussons au § D-2-d) montre que le cosinus de l'angle $\theta$ entre l'un quelconque des $\mathbf{u}_i$ et $\mathbf{e}_z$ est donné par :

$$\cos^2\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \tag{VI-60}$$

La valeur moyenne de l'opérateur $T$ est donc égale à :

$$\langle T\rangle = \langle 0_{\mathbf{u}=\mathbf{e}_z}| S \left|0_{\mathbf{u}=\mathbf{e}_z}\right\rangle = 2(5 - 2\sqrt{5}) - 5 \simeq -3.94... \tag{VI-61}$$

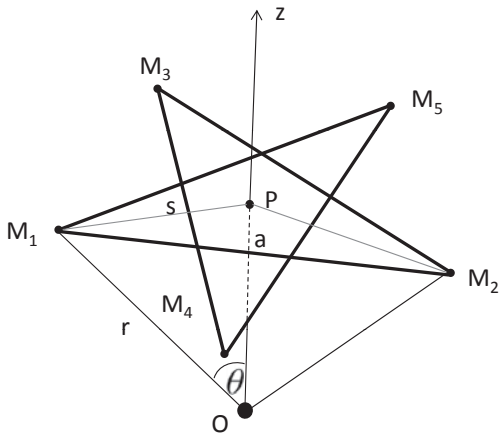


FIGURE *VI.4 – Les cinq points $M_1$, $M_2$,...,$M_5$ sont les sommets d'un pentagramme régulier de centre $P$. Le point $O$, sur l'axe $Oz$ du pentagramme, est tel que l'angle entre $OM_i$ et $OM_{i+1}$ est égal à $\pi/2$. La longueur $a$ est celle du segment $M_iM_{i+1}$ (pour tout $i$), $s$ celle du segment $PM_i$, $r$ celle du segment $OM_i$, et enfin $\theta$ est l'angle entre $Oz$ et $OM_i$.*

La mesure directe de l'observable correspondant à $T$ n'est certes pas interdite en principe ($T$ est un opérateur hermitique), mais correspondrait probablement à un appareil de mesure très compliqué. Nous préférons donc supposer que cinq types différents de mesures sont effectuées successivement : $A_{\mathbf{u}_1}A_{\mathbf{u}_2}$, $A_{\mathbf{u}_2}A_{\mathbf{u}_3}$,..., $A_{\mathbf{u}_5}A_{\mathbf{u}_1}$. Il n'est pas possible de supposer qu'elles sont effectuées simultanément puisque les opérateurs dont $T$ est la somme d'opérateurs ne sont pas compatibles : par exemple, le produit $A_{\mathbf{u}_1}A_{\mathbf{u}_2}$ ne commute pas avec $A_{\mathbf{u}_2}A_{\mathbf{u}_3}$ car $A_{\mathbf{u}_1}$ et $A_{\mathbf{u}_3}$ ne commutent pas (les directions $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_3$ ne sont pas orthogonales). Nous pouvons cependant supposer que, pour chaque réalisation de l'expérience, $A_i$ et $A_{i+1}$ sont mesurés et que le produit des deux résultats est calculé (une autre possibilité serait de supposer qu'un seul appareil de mesure est utilisé pour fournir directement le produit $P_i = A_{\mathbf{u}_i}A_{\mathbf{u}_{i+1}}$). Cette expérience est réalisée un grand nombre de fois ; la moyenne des résultats sur ces réalisations de l'expérience fournit $\langle P_i\rangle$. Ensuite, l'ensemble de la procédure est répétée pour une autre valeur de $i$. Finalement, la somme de ces moyennes pour toutes les valeurs de $i$ donne $\langle T\rangle$.

#### D-2-b. Système classique

Considérons maintenant un système classique pour lequel cinq quantités différentes $A_i$ ($i = 1, ..., 5$) ont les valeurs $\pm 1$. Nous formons la combinaison :

$$T = \sum_{i=1}^{5} A_i A_{i+1} = A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_4 + A_4 A_5 + A_5 A_1 \qquad \text{(VI-62)}$$

Le produit des cinq produits $A_i A_{i+1}$ est toujours égal à $+1$, puisqu'il est égal au produit de tous les $(A_i)^2$ ; en conséquence, le nombre de produits $A_i A_{i+1}$ égaux à $-1$ ne peut être qu'impair, de sorte qu'au moins l'un d'entre eux vaut $+1$. La valeur minimale de $T$ est donc $-3$ :

$$T \geq -3 \qquad \text{(VI-63)}$$

Cette équation est appelée "inégalité du pentagramme". Elle est clairement incompatible avec le résultat quantique (VI-61).

#### D-2-c. Discussion, rôle de la contextualité

D'où vient cette contradiction ? En physique classique, la valeur mesurée de $A_i$ est la même, qu'un autre $A_j$ soit mesuré ou non ; si cette mesure a lieu, la valeur de $A_i$ ne dépend pas du $A_j$ choisi (non-contextualité). En mécanique quantique, la situation est différente. La conclusion à en tirer dépend de l'expérience considérée :

(i) Supposons d'abord que chaque $P_i$ soit mesuré en calculant le produit des résultats de deux mesures compatibles successives, celle de $A_{\mathbf{u}_i}$ puis celle de $A_{\mathbf{u}_{i+1}}$. Alors rien ne garantit que le résultat $\pm 1$ obtenu pour $A_{\mathbf{u}_{i+1}}$ soit le même si cette observable est mesurée après $A_{\mathbf{u}_i}$ ou avant $A_{\mathbf{u}_{i+2}}$. Dans ces conditions, le nombre $A_{i+1}$ apparaissant dans l'expression (VI-62) n'est pas bien défini, et la démonstration de (VI-63) n'est plus possible. Ce qui importe ici pour échapper à l'inégalité est la contextualité : le résultat de la mesure d'une observable donnée doit dépendre des autres mesures qui lui sont associées ("contextualité quantique"). La conclusion est la même, que les deux mesures soient considérées comme successives ou simultanées.

(ii) Supposons maintenant que des appareils de mesure permettent de mesurer directement chacun des produits $A_{\mathbf{u}_i} A_{\mathbf{u}_{i+1}}$, un par un. Alors, ne connaissant que la valeur du produit, il n'existe pas de façon unique d'attribuer une valeur $\pm 1$ à chaque facteur du produit, et à nouveau l'expression (VI-62) contient des quantités $A_i$ non définies. L'inégalité (VI-63) ne peut alors être établie.

Une violation de l'inégalité du pentagramme illustre donc qu'il est impossible, pour chaque réalisation d'une expérience quantique, d'attribuer des valeurs pré-existantes à tous les résultats de mesures possibles indépendamment des appareils de mesure. Si ces valeurs existent, elles résultent nécessairement d'un effet combiné du système et des appareils de mesure ; en ce sens,

on peut dire qu'elles sont créées lors de l'acte de mesure. Nous notons que, contrairement au cas étudié au § D-1, ce résultat est "state dependent" : il demande que le système quantique soit dans un état spécifique, en l'occurrence l'état $|0_{\mathbf{u}=\mathbf{e}_z}\rangle$.

#### D-2-d. Calcul géométrique

Finalement, complétons la preuve ci-dessus en démontrant la relation (VI-60). Dans la Figure VI.4, tous les points $M_i$ sont à la même distance de $O$, qui est le centre d'une sphère de rayon $r$ contenant tous les sommets du pentagramme régulier. Nous appelons $a$ la longueur du segment $M_1M_2$. Nous supposons que le triangle $M_1OM_2$ possède un angle droit en $O$, de sorte que :

$$a = \sqrt{2}r \tag{VI-64}$$

Soit $P$ le centre du pentagramme, contenu dans son axe perpendiculaire $Oz$. Toutes les longueurs $M_iP$ sont égales à la même distance $r$, et le triangle $M_1PM_2$ est isocèle avec un angle $4\pi/5$ en $P$. Les deux autres angles sont donc $\pi/10$, et :

$$a = 2s\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \tag{VI-65}$$

De plus, le triangle $M_1PO$ possède un angle droit en $P$, de sorte que :

$$\sin\theta = \frac{s}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}\cos(\pi/10)} \tag{VI-66}$$

Calculons maintenant :

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = \frac{2\cos^2(\pi/10) - 1}{2\cos^2(\pi/10)} = \frac{\cos(\pi/5)}{1+\cos(\pi/5)} \tag{VI-67}$$

Finalement, comme :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \tag{VI-68}$$

nous obtenons :

$$\cos^2\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \tag{VI-69}$$

### D-3. Deux particules de spin 1/2, règle du produit

Dans la même veine, Peres [287] a montré que les résultats de la mécanique quantique sont incompatibles avec les deux propositions suivantes :

(i) le résultat de la mesure d'un opérateur $A$ dépend seulement de $A$ et du système subissant la mesure (non-contextualité).

(ii) si les opérateurs $A$ et $B$ commutent, le résultat de la mesure de leur produit $AB$ est le produit de ceux correspondant aux mesures séparées de $A$ et $B$ (règle du produit).

Peres montre l'existence de cette incompatibilité en considérant deux particules de spin 1/2 dans un état singulet. Mermin a généralisé le résultat [9,288] et montré que, pour un vecteur d'état quelconque des deux spins, les deux hypothèses conduisent à une contradiction de signe avec les prédictions de la mécanique quantique[13]. Considérons deux particules de spin 1/2 et le tableau suivant de 9 observables quantiques (nous utilisons la même notation que dans le § A) :

$$\begin{array}{ccc} \sigma_{1x} & \sigma_{2x} & \sigma_{1x}\sigma_{2x} \\ \sigma_{2y} & \sigma_{1y} & \sigma_{1y}\sigma_{2y} \\ \sigma_{1x}\sigma_{2y} & \sigma_{1y}\sigma_{2x} & \sigma_{1z}\sigma_{2z} \end{array} \qquad \text{(VI-70)}$$

Tous ces opérateurs ont des valeurs propres $\pm 1$. Les trois opérateurs d'une même ligne commutent entre eux, ainsi que les trois opérateurs d'une même colonne (les produits de deux $\sigma$ qui anti-commutent sont des opérateurs qui commutent, puisque le changement d'ordre introduit deux signes $-1$ dont l'effet s'annule). De plus, le produit des trois opérateurs est toujours $+1$, excepté pour la dernière colonne pour laquelle il est[14] $-1$ . Ici, au lieu d'avoir à prendre en compte un nombre infini de triplets de directions dans l'espace, nous avons simplement trois groupes de trois opérateurs, mais la même question que plus haut se pose : pouvons-nous attribuer une valeur $\pm 1$ à chacun des 9 éléments du tableau (VI-70) d'une façon qui soit compatible avec les résultats de la mécanique quantique ?

Pour obtenir cette condition de cohérence, chaque ligne ou chaque colonne doit contenir, soit trois valeurs $+1$, soit un $+1$ et deux $-1$, excepté la dernière colonne qui doit contenir un ou trois $-1$. Ce petit problème est bien plus simple[15] que le problème d'attribution des couleurs dans le § D-1. On peut calculer le produit de tous les éléments de matrice, soit comme le produit des produits dans chaque ligne, soit comme le produit des produits dans les colonnes. Le produit de toutes les lignes doit être $(+1)^3 = +1$, alors que le produit de toutes les colonnes est $(+1)^2(-1)$, c'est-à-dire $-1$ ; il y a contradiction de signe. Il est donc impossible de trouver 9 nombres qui satisfassent toutes les conditions.

Pour une autre illustration de ce genre d'impossibilité, voir le § VI de la Ref. [9] qui considère trois spins 1/2 au lieu de deux.

[13] Nous remarquons au passage que le raisonnement est proche de celui du § A, ce qui illustre à nouveau la similarité entre le théorème GHZ et cette forme du théorème BKS sur la contextualité.

[14] Ceci peut facilement être vérifié à partir des propriétés bien connues des matrices de Pauli ; le signe moins pour la troisième colonne vient du produit de deux facteurs $i$, dont l'origine est la relation $\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z$ ; d'autre part, dans la troisième ligne, on obtient $i \times (-i) = 1$ du fait du changement de l'ordre des opérateurs.

[15] Les complications du problème géométrique du théorème BKS original sont évitées en passant d'un espace des états de dimension 3 à 4.

### D-4. Contextualité et réalisme local

Les discussions ci-dessus nous montrent que les prédictions de la mécanique quantique sont incompatibles avec une représentation non contextuelle des éléments de réalité EPR ou des variables supplémentaires. Cela dit, ce résultat est-il plus ou moins général que le théorème de Bell qui, lui, met en jeu la localité et non la contextualité ? Le théorème de Bell, vu comme un prolongement de l'argument EPR, ne suppose pas l'existence de variables supplémentaires : leur existence découle de l'argument réaliste local de EPR, appliqué à des corrélations parfaites. Dans le théorème BKS, un tel enchaînement n'existe pas ; l'existence des variables supplémentaires est postulée, avec des propriétés spécifiques. En ce sens, le théorème de Bell est plus général. De plus, comme Bell l'a remarqué [5], "les résultats d'une observation peuvent raisonnablement dépendre, non seulement de l'état du système (y compris des variables cachées ou supplémentaires), mais aussi de l'ensemble du dispositif expérimental". Mathématiquement, dans une théorie à variables supplémentaires $\lambda$, la fonction $A$ donnant le résultat de la première mesure dépend alors des paramètres expérimentaux de tous les appareils interagissant simultanément avec le système quantique mesuré ; dans le cas étudié au § D-1, elle doit être écrite $A(a, b, \lambda)$, où $a$ et $b$ définissent les deux directions selon lesquelles le carré d'une composante du moment cinétique est mesuré. On peut également construire une théorie comprenant des variables supplémentaires associées aux appareils de mesure, et où les deux types de variables collaborent pour déterminer les résultats dépendant de $a$ et $b$, et reconstruire les résultats de la mécanique quantique. En revanche, le théorème de Bell peut parfaitement prendre en compte des variables associées aux appareils de mesure, pourvu bien sûr qu'elles soient locales, et maintenir une contradiction avec ces résultats. C'est la raison pour laquelle on considère généralement que les violations du théorème de Bell par la mécanique quantique représentent des manifestations quantiques plus significatives que celles du théorème BKS.

D'un autre côté, si l'on raisonne dès le départ dans le cadre des variables supplémentaires/cachées, et si l'on dissocie le théorème de Bell de l'argument EPR, la situation devient différente. Les variables cachées locales apparaissent alors comme un type particulier de variables cachées non contextuelles [289] (la condition de Bell d'indépendance vis-à-vis des paramètres de mesure est un cas particulier de non-contextualité). Vu de cette façon, le théorème de Bell apparaît alors comme moins général que les relations BKS. Les deux théorèmes peuvent être exprimés sous des formes qui sont, soit dépendantes de l'état, soit indépendantes et donc plus générales. Des exemples de formes dépendantes de l'état ont été obtenus plus haut, lorsque nous avons supposé que le système quantique était mis initialement dans un état quantique tel que (IV-1) ou (VI-1) ; en revanche, les raisonnements des §§ D-1

et D-3 sont indépendants de l'état. Pour une discussion générale du statut des différents "théorèmes d'impossibilité" avec prise en compte détaillée du théorème BKS, voir les Refs. [9, 288].

Nous avons vu dans le Chapitre IV que le réalisme local peut donner lieu à plusieurs formes du théorème de Bell, et conduire à différentes inégalités ou égalités. De même, le réalisme non contextuel peut s'exprimer de plusieurs façons mathématiques différentes. La Ref. [290] propose un test par tout ou rien portant sur deux spins 1/2 ; reprenant l'idée, la Ref. [291] propose un autre test par tout ou rien qui peut s'effectuer sur une particule unique. Il en est résulté, quelques années plus tard, un expérience réalisée avec des photons uniques [292], qui a fourni des résultats en accord avec la mécanique quantique et éliminant donc les variables cachées non contextuelles. Des tests de l'inégalité du pentagramme (VI-63) ont été effectués avec des photons uniques se propageant simultanément dans trois modes [293] ; une violation de l'inégalité par plus de 120 déviations standard a été obtenue, éliminant à nouveau la non-contextualité. Des expériences ont également été menées avec des neutrons [294], des ions piégés [295], et des spins nucléaires dans un solide étudiés par résonance magnétique [296], fournissant d'autres exemples de bon accord avec les prédictions de la mécanique quantique.

La notion de contextualité a été utilisée comme la base d'une interprétation réaliste de la mécanique quantique, fondée sur la notion d'objectivité contextuelle [297]. Dans cette formulation, le réalisme est défini d'une façon qui rappelle celle de EPR, mais en prenant en compte l'ensemble du dispositif expérimental (holisme) plutôt que sur les propriétés locales de sous-systèmes ou de régions de l'espace – en d'autres termes d'une façon qui est bien dans la ligne de Bohr. Dans ces condtions, bien évidemment, ni le théorème EPR ni celui de Bell ne s'appliquent, et toute contradiction avec la mécanique quantique standard est évitée.

## E. Réalité du vecteur d'état

Le vecteur d'état quantique représente-t-il la réalité, ou plutôt notre connaissance de la réalité ? La question est récurrente depuis les débuts de la mécanique quantique. Nous l'avons évoquée dès notre discussion du statut du vecteur d'état au § B-3 du Chapitre I, et elle est également apparue dans d'autres parties de ce livre (par exemple, dans les citations du § E du Chapitre II). Nous introduisons maintenant quelques théorèmes qui mettent en jeu directement le statut du vecteur d'état, mais ne sont pas particulièrement liés à la localité ou la contextualité, contrairement aux théorèmes qui précèdent dans ce chapitre.

### E-1. $\psi$ ontique ou épistémique ?

En 2008, Harrigan et Spekkens ont publié un article discutant la relation entre l'argument d'incomplétude d'Einstein (§ C-1 du Chapitre III) et la "vue épistémique des états quantiques" [298]. De nombreux auteurs introduisent dans ce contexte les mots "ontique" et "épistémique", même s'ils sont plus communs en philosophie qu'en physique. Une analogie avec la physique classique permet d'en comprendre la signification : en physique classique, la position et l'impulsion de toutes les particules d'un système physique fournissent une description directe de ses propriétés physiques ; il s'agit alors d'une description "ontique". Cependant, si le système n'est décrit que de façon probabiliste par une distribution statistique dans son espace des phases (comme dans le théorème de Liouville) qui reflète une connaissance partielle de son état, alors la description est appelée "épistémique". De façon similaire, en mécanique quantique, on peut distinguer entre des conceptions "$\psi$-ontique" et "$\psi$-épistémique" du vecteur d'état[16] : dans le premier point de vue (ontique), $\psi$ représente directement la réalité du système physique, ou au moins certains éléments de cette réalité ; dans le second point de vue, $\psi$ a un rôle épistémologique, et ne représente que notre connaissance de la réalité. Posée en ces termes, la question devient : devons-nous considérer $\psi$ comme un état ontique ou épistémique, ou (après tout, pourquoi pas ?) comme complètement différent des deux ? A la suite de Leifer [299], nous listons une série de réponses possibles à la question :

(i) $\psi$ est ontique, et il n'existe aucun autre degré de liberté ontique ($\psi$ est "complet") ;

(ii) $\psi$ est ontique, mais peut être complété par des degrés de liberté additionnels (variables supplémentaires) ;

(iii) $\psi$ est épistémique, et il n'existe aucune réalité physique sous-jacente plus profonde qui soit accessible à la théorie physique ;

(iv) $\psi$ est épistémique, mais il existe un état physique ontique sous-jacent qui peut être caractérisé par des variables physiques ; la mécanique quantique est donc la théorie statistique de ces états ontiques (analogue à la mécanique statistique classique).

Bien sûr, les discussions concernant le statut ontologique de la fonction d'onde sont aussi vieilles que l'invention de la mécanique quantique, sans pour autant mener à un consensus général. En 1994, Aharonov, Anandan et Vaidman [300] ont proposé d'utiliser des "mesures protectives" pour conférer à la fonction d'onde une signification ontologique ; voir cependant la réponse de Unruh [301], qui considère que ce qui est en fait étudié par cette méthode est la signification ontologique de certains opérateurs de la théorie, tandis que la fonction d'onde continue à jouer son rôle épistémologique habituel.

[16] Nous simplifions la notation du vecteur d'état $|\psi\rangle$ en $\psi$, comme c'est fréquent dans la plupart des discussions concernant la réalité du vecteur d'état.

### E-2. Théorème PBR

En 2012, dans un article intitulé "Sur la réalité de l'état quantique" [302], Pusey, Barrett et Rudolph (PBR) ont introduit un théorème maintenant appelé le théorème PBR. Les auteurs y discutent la question suivante : un état quantique correspond-il directement à la réalité, ou doit-il être interprété de façon statistique parce qu'il représente seulement de l'information (§§ A-3 et B du Chapitre XI) ? Bien sûr, le théorème se fonde sur un certain nombre d'hypothèses, dont nous donnons la liste ci-dessous. La conclusion du théorème est que tout modèle dans lequel $\psi$ représente simplement de l'information concernant un état physique sous-jacent implique nécessairement des prédictions qui sont en contradiction avec celles de la mécanique quantique : si les prévisions de la mécanique quantique sont correctes (ainsi que les autres hypothèses du théorème), une vue statistique/informationnelle de $\psi$ comme celle de l'option (iv) ci-dessus n'est pas possible.

#### E-2-a. Hypothèses du théorème

La première hypothèse de PBR est que tout système physique $S$ possède à chaque instant des propriétés physiques, et que ces propriétés peuvent être décrites par un ensemble de variables $P$ (les auteurs utilisent la notation $\lambda$, mais nous avons déjà utilisé cette lettre pour les variables supplémentaires). L'objectif est alors de clarifier les relations possibles entre $\psi$ et $P$. Si $\psi$ représente directement la réalité, $\psi$ peut être un sous-ensemble de $P$, ou même coïncider avec $P$. En revanche, dans le cadre d'une vue informationnelle du vecteur d'état, $\psi$ et $P$ sont de nature différente ; $\psi$ ne donne qu'une information statistique sur $P$. Un $\psi$ donné doit correspondre à plusieurs $P$ différents : sinon $\psi$ caractériserait parfaitement $P$, et serait donc équivalent à la donnée directe des propriétés physiques du système. Réciproquement, un $P$ donné doit pouvoir être obtenu à partir de plusieurs $\psi$ différents : si chaque $P$ n'était obtenu qu'à partir d'un seul $\psi$, alors à nouveau l'on pourrait identifier $\psi$ avec la donnée d'au moins une partie des propriétés physiques de $S$ (un sous-ensemble de $P$). La conséquence est que $\psi$ doit avoir un recouvrement avec un autre état quantique $\psi'$, les deux états partageant un ensemble de propriétés physiques communes $P$ dans un certain domaine. Comme un état quantique est généralement associé à une procédure de préparation de $S$ (§ B-3-b du Chapitre I), il en découle que plusieurs procédures de préparation peuvent être utilisées pour obtenir les mêmes propriétés physiques $P$ du système quantique.

A l'existence des propriétés physiques $P$, les auteurs ajoutent les hypothèses suivantes :

• Les prédictions de la mécanique quantique sont correctes (même hypothèse que pour EPR et Bell).

• A toute base orthogonale dans l'espace des états de $S$ correspond une

mesure possible effectuée sur $S$ avec un appareil approprié $M$ (c'est une hypothèse courante en mécanique quantique standard).

• Le vecteur d'état $\psi$ contient une information relative au processus de préparation (ceci est également standard en mécanique quantique, § B-3-b du Chapitre I).

• Lors d'une mesure de $S$ avec un appareil $M$, les résultats possibles sont aléatoires, et leurs probabilités sont déterminées par l'ensemble des propriétés physiques $P$ de $S$ (le déterminisme n'est donc pas supposé) ; bien sûr, elles peuvent aussi dépendre des propriétés physiques $P_M$ de $M$.

• Des systèmes $S_1$ et $S_2$ préparés indépendamment ont des propriétés physiques indépendantes $P_1$ et $P_2$ ; les propriétés du système total $S = S_1+S_2$ sont déterminées par la réunion de leurs propriétés individuelles.

Ces hypothèses sont, bien sûr, parfaitement naturelles dans le cadre du raisonnement PBR.

#### E-2-b. Démonstration

Dans le point de vue statistique de $\psi$, considérons deux états quantiques différents $\psi$ et $\psi'$ et supposons qu'ils aient un recouvrement, constitué d'un ensemble de $P$ communs. Si le système est préparé dans l'état $\psi$, il existe une certaine probabilité $p \neq 0$ pour que le système ait des propriétés physiques qui auraient aussi pu être obtenues par une préparation dans l'état $\psi'$ (et réciproquement). PBR prennent alors en compte un système unique $S$ dont la dimension de l'espace des états est deux, sous-tendu par les deux états $|+\rangle$ et $|-\rangle$ ; ils considèrent les deux états quantiques non orthogonaux :

$$\begin{aligned} |\psi_a\rangle &= |+\rangle \\ |\psi_b\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle + |-\rangle\right] \end{aligned} \tag{VI-71}$$

Ils supposent ensuite que, pour chaque réalisation de l'expérience, deux tels systèmes $S$ et $S'$ sont préparés de façon totalement indépendante. Avec une probabilité $p^2$, les deux systèmes ont des propriétés physiques $P$ et $P'$ qui tombent dans le domaine commun de $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$. En d'autres termes, pour ces réalisations particulières de l'expérience, l'ensemble des deux systèmes peut être décrit indifféremment par les quatre vecteurs d'état :

$$\begin{aligned} |\Psi_{aa}\rangle &= |\psi_a\rangle \otimes |\psi_a\rangle \\ |\Psi_{ab}\rangle &= |\psi_a\rangle \otimes |\psi_b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+,+\rangle + |+,-\rangle\right] \\ |\Psi_{ba}\rangle &= |\psi_b\rangle \otimes |\psi_a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+,+\rangle + |-,+\rangle\right] \\ |\Psi_{bb}\rangle &= |\psi_b\rangle \otimes |\psi_b\rangle = \frac{1}{2}\left[|+,+\rangle + |+,-\rangle + |-,+\rangle + |-,-\rangle\right] \end{aligned} \tag{VI-72}$$

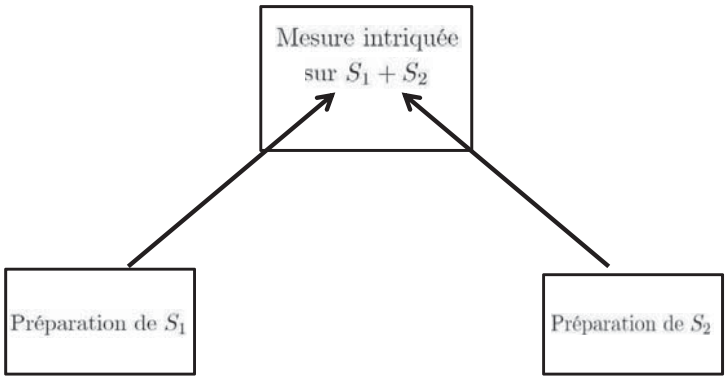


FIGURE *VI.5 – Schéma de l'expérience considérée dans le raisonnement PBR. Deux systèmes $S_1$ et $S_2$ sont préparés indépendamment, et envoyés dans le même appareil de mesure, qui effectue une opération de mesure intriquée.*

(dans notre notation, le premier ket du produit tensoriel spécifie l'état quantique de $S_1$, le second celui de $S_2$).

Les deux systèmes sont alors envoyés vers le même appareil de mesure (Fig. VI.5) où ils subissent une mesure intriquée (similaire à celle discutée § C-2 du Chapitre VII) dont les vecteurs propres sont les kets :

$$\begin{aligned}
|M_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+,-\rangle + |-,+\rangle\right] \\
|M_2\rangle &= \frac{1}{2}\left[|+,+\rangle \;-\; |+,-\rangle \;+\; |-,+\rangle \;+\; |-,-\rangle\right] \\
|M_3\rangle &= \frac{1}{2}\left[|+,+\rangle \;+\; |+,-\rangle \;-\; |-,+\rangle \;+\; |-,-\rangle\right] \\
|M_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+,+\rangle - |-,-\rangle\right]
\end{aligned} \tag{VI-73}$$

On vérifie facilement que ces quatre états forment une base orthonormée. Mais chacun d'entre eux est également orthogonal à l'un des états (VI-72) :

$$\begin{aligned}
\langle M_1 \,|\Psi_{aa}\rangle &= 0 \\
\langle M_2 \,|\Psi_{ab}\rangle &= 0 \\
\langle M_3 \,|\Psi_{ba}\rangle &= 0 \\
\langle M_4 \,|\Psi_{bb}\rangle &= 0
\end{aligned} \tag{VI-74}$$

La règle de Born implique alors que, si $|\Psi_{aa}\rangle$ est choisi pour décrire la paire, le premier résultat ne peut jamais être obtenu ; si l'on choisit plutôt $|\Psi_{ab}\rangle$, le

deuxième résultat ne peut jamais être obtenu ; si c'est $|\Psi_{ba}\rangle$, c'est le troisième résultat qui est exclu ; enfin, le choix de $|\Psi_{bb}\rangle$ conduit à une impossibilité du quatrième résultat. Nos hypothèses ont conduit à une situation absurde où aucun résultat ne peut être obtenu par la mesure ! Avec une probabilité $p^2$ se produit donc une forte contradiction avec les prédictions de la mécanique quantique. Remarquons au passage que la valeur exacte de $p$ est sans importance, pourvu qu'elle ne soit pas nulle. L'hypothèse initiale selon laquelle les deux états quantiques (VI-71) peuvent parfois décrire le même ensemble de propriétés physique se révèle contradictoire avec l'ensemble des hypothèses PBR listées ci-dessus.

Jusqu'ici nous n'avons pris en compte que deux états particuliers, $|\psi_a\rangle$ et $|\psi_b\rangle$ ; ceci donne une idée générale de l'essentiel du théorème, mais bien sûr une démonstration complète requiert de généraliser à deux états quantiques arbitraires. Ceci est fait dans la Ref. [302] grâce à l'introduction de plus de deux systèmes : une contradiction du même type peut effectivement être obtenue en considérant $N$ systèmes quantiques non corrélés. On a alors $2^N$ états quantiques équivalents qui sont compatibles avec les mêmes propriétés physiques de l'ensemble. On considère alors une mesure intriquée appropriée pour montrer que chacun de ces états conduit à une probabilité nulle pour l'un des résultats ; cette mesure met en jeu un circuit comprenant $N$ portes quantiques (§ D-2 du Chapitre VIII) agissant sur les systèmes individuels considérés comme des qubits, une porte d'intrication agissant sur l'état à $N$ particules, et à nouveau $N$ portes quantiques individuelles (portes de Hadamard). L'ensemble complète la démonstration du théorème.

## E-3. Théorèmes similaires

La publication du théorème PBR a été rapidement suivie de plusieurs autres contributions, dont plusieurs obtiennent des conclusions similaires à partir d'un autre système d'hypothèses. Nous en mentionnons ici brièvement quelques-unes.

### E-3-a. Autres hypothèses et généralisations

La possibilité d'une correspondance biunivoque entre la fonction d'onde d'un système physique et ses éléments de réalité a été discutée par Colbeck et Renner [303]. Ces auteurs proposent de remplacer l'hypothèse relative à de multiples préparations du système par une autre qui concerne le libre choix par l'expérimentateur des paramètres de mesure. On obtient ainsi une connexion intéressante avec les hypothèses du théorème de Bell (§ C-1-c du Chapitre IV). En combinant le fait que $\psi$ est contenu dans $P$ et la non-extensibilité de la mécanique quantique, Colbeck et Renner concluent que $\psi$ et $P$ sont effectivement en correspondance biunivoque.

Les implications générales du théorème PBR ont été discutées par Schlosshauer et Fine [304]. Ils introduisent la notion de fonction de réponse $\mathcal{A}(R, P)$ donnant la probabilité pour que, si le système possède les propriétés $P$, une mesure de $A$ va fournir un résultat appartenant à l'ensemble de résultats $R$. Si $\mathcal{A}$ dépend du vecteur d'état, ils appellent le modèle $\psi$-dépendant ; sinon, il est appelé $\psi$-indépendant. Ils montrent ensuite que le théorème PBR ne concerne que les modèles $\psi$-indépendants, et analysent les hypothèses nécessaires au raisonnement pour des systèmes composites. Une des conclusions est que le théorème PBR peut donc être vu comme une illustration des difficultés à bâtir des théories à variables supplémentaires, lorsque l'on forme des composites de systèmes préparés de façon identique. Ce point de vue général fournit un lien avec le théorème BKS (§ D).

Les auteurs de la Ref. [305] mettent également en avant le caractère essentiel de l'hypothèse de préparations indépendantes lorsque l'on désire exclure la possibilité que plusieurs états quantiques soient compatibles avec un état physique unique $P$. L'abandon de cette hypothèse leur permet de construire des modèles $\psi$-épistémiques qui sont parfaitement compatibles avec toutes les prédictions de la mécanique quantique.

#### E-3-b. Interféromètre de Hardy

Dans [306], Hardy discute la réalité des états quantiques en faisant des hypothèses qui sont également différentes de celles de PBR ; en particulier, le raisonnement ne demande pas de mettre en jeu un grand nombre de copies du système physique. La nouvelle hypothèse cruciale est appelée "indifférence ontique" (ontic indifference) : un changement du dispositif expérimental qui n'a aucun effet sur le vecteur d'état ne modifie pas non plus les variables physiques $P$. Hardy illustre ces idées avec une expérience mettant en jeu un interféromètre de Mach-Zhender muni de deux détecteurs $D_1$ et $D_2$ à la sortie (Fig. VI.6). Dans la relation (VI-71), l'état $|\psi_a\rangle$ correspond à une particule qui se propage dans le bras $(a)$ de l'interféromètre, tandis que le second état $|\psi_b\rangle$ décrit une particule qui traverse l'interféromètre dans une superposition cohérente de deux états se propageant dans les deux bras $(a)$ et $(b)$. Le dispositif est ajusté de façon que toutes les particules dans l'état $|\psi_b\rangle$ atteignent à la sortie le détecteur $D_1$ ; toutefois, on peut insérer une lame de phase dans le bras $(b)$ afin que toutes les particules atteignent plutôt le détecteur $D_2$.

L'indifférence ontique assure que les propriétés physiques $P_a$ associées à $|\psi_a\rangle$, qui se propage dans le bras $(a)$, ne sont pas modifiées lorsque la lame de phase est insérée dans le bras $(b)$. Les particules dans l'état $|\psi_a\rangle$ peuvent atteindre les deux détecteurs, et leurs propriétés physiques sont décrites par

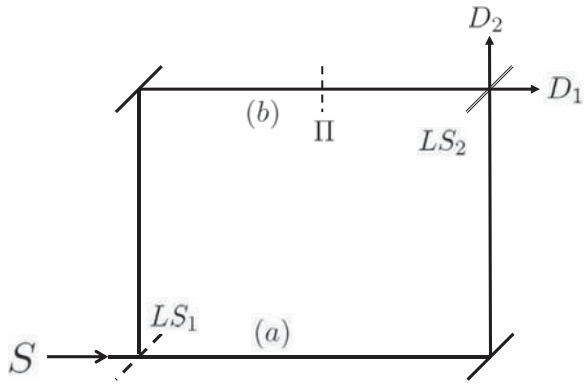


FIGURE *VI.6 – Schéma de l'expérience discutée par Hardy dans la Ref. [306]. Un interféromètre de Mach-Zhender reçoit des particules provenant d'une source $S$ ; les lames séparatrices $LS_1$ et $LS_2$ créent et recombinent ensuite deux chemins d'interférence $(a)$ et $(b)$ ; $D_1$ et $D_2$ sont deux détecteurs placés à la sortie de $BS_2$. Deux éléments de l'interféromètre sont amovibles : la lame séparatrice $BS_1$, et une lame de phase $\Pi$ qui peut être insérée dans le chemin $(b)$. Si $BS_1$ est retirée, la particule ne suit que le chemin $(a)$, aucun effet d'interférence ne se produit, et l'état quantique est $|\psi_a\rangle$ ; la lame de phase ne joue aucun rôle. Si $BS_1$ est en place, la particule est décrite par une superposition quantique $|\psi_b\rangle$ incluant les deux chemins ; la différence de chemin entre $(a)$ et $(b)$ est ajustée de sorte que, en l'absence de la lame de phase, toutes les particules vont alors vers le détecteur $D_1$ ; elles vont vers le détecteur $D_2$ lorsque la lame est insérée. Le but du raisonnement est de montrer que $|\psi_a\rangle$ et $|\psi_b\rangle$ ne peuvent pas partager de propriété physique commune.*

les variables $P_a$. L'ensemble $\Lambda_a$ de toutes les valeurs possibles $P_a$ est donc la somme (union) :

$$\Lambda_a = \Lambda_a^{D_1} \cup \Lambda_a^{D_2} \tag{VI-75}$$

des ensembles de propriétés $\Lambda_a^{D_1}$ des particules qui vont atteindre $D_1$ et de l'ensemble $\Lambda_a^{D_2}$ de celles qui vont atteindre $D_2$. Ces deux sous-ensembles sont alors comparés à l'ensemble $\Lambda_b$ des propriétés physiques possibles pour une particule dans l'état $|\psi_b\rangle$ avant qu'elle ne traverse la lame de phase ($\Lambda_b$ est donc indépendant de la présence éventuelle de la lame). $\Lambda_a^{D_2}$ possède une intersection vide avec les propriétés de $\Lambda_b$ puisque, lorsque la lame n'est pas

insérée, les deux ensembles de propriétés décrivent des particules qui vont atteindre des détecteurs différents ; de même, $\Lambda_a^{D_1}$ possède une intersection vide avec $\Lambda_b$ pour la même raison lorsque la lame est insérée. Il découle alors de (VI-75) que :

$$\Lambda_a \cup \Lambda_b = 0 \tag{VI-76}$$

qui montre que les deux états quantiques (VI-71) ne peuvent partager aucune propriété physique commune. Comme dans la démonstration ci-dessus du théorème PBR, le résultat peut être généralisé à deux états quantiques distincts quelconques. Hardy en conclut que, si les hypothèses sont correctes, l'état quantique est "quelque chose de réel", car il est écrit parmi les variables sous-jacentes qui décrivent la réalité.

#### E-3-c. Revues et expériences

Une revue générale détaillée du sujet peut être trouvée dans la Ref. [299]. D'autres méthodes de rejet des modèles $\psi$-épistémiques peuvent être trouvées dans les Refs. [307] et [308]. Une discussion plus récente de Colbeck et Renner [309] suppose que $P$ fournit une description complète de l'état physique du système, et examine les conditions dans lesquelles $\psi$ est déterminé de façon unique par $P$. Comme dans leur travail précédent [303], ces auteurs supposent réalisée une condition (suffisante) de "libre choix", reliée à la notion de "paramètres expérimentaux" et similaire aux "variables externes" de Bell, déjà discutées au § C-1-c du Chapitre IV (des définitions précises du libre choix et d'une description complète sont proposées dans [309]). La conclusion de cette analyse est que, si les conditions correspondantes sont satisfaites, $\psi$ est aussi objectif que $P$.

Un test expérimental avec des ions est décrit dans [310], et avec des photons dans [311] et [312] ; tous ces résultats confirment les prédictions de la mécanique quantique.

# Chapitre VII

# Intrication quantique

Dans ce chapitre, nous étudions les propriétés de l'intrication quantique et, de façon plus générale, la façon dont peuvent apparaître les corrélations en mécanique quantique. L'intrication quantique est une notion importante qui est déjà apparue dans cet ouvrage, par exemple à l'occasion de la discussion de la chaîne de von Neumann ou du chat de Schrödinger, mais ici nous étudions ses propriétés plus en détail.

En physique classique, la notion de corrélation est bien connue. Elle se base sur le calcul des probabilités et des pondérations linéaires sur un certain nombre de possibilités. On introduit pour cela une distribution donnant la probabilité que le premier système occupe un certain état et le second un autre état. Les deux systèmes sont corrélés lorsque cette distribution n'est pas un produit. Si, au contraire, c'est un produit, les deux systèmes ne sont pas corrélés ; une mesure effectuée sur l'un d'entre eux ne change pas l'information que l'on possède sur l'autre. C'est le cas en particulier si les états de chacun des deux systèmes sont parfaitement définis (de sorte que l'état du système total l'est également). Ainsi la notion de corrélation entre deux sous-systèmes est intimement liée à celle d'une définition imparfaite de l'état du système total ; ce sont les fluctuations de cet état qui donnent tout son sens au concept classique de corrélation.

En mécanique quantique, il en va tout autrement : nous l'avons vu (en particulier au Chapitre IV), même un système physique parfaitement défini par un vecteur d'état présente déjà des fluctuations de ses grandeurs physiques, ce qui introduit une notion de corrélation indépendante de toute fluctuation d'état. Par exemple, les composantes de deux spins 1/2 fluctuent de façon totalement corrélée dans un état singulet, qui est un état pur (§ A-1 du Chapitre IV). En effet, le principe de superposition de la mécanique quantique permet d'effectuer des combinaisons linéaires d'états différents directement au niveau du vecteur d'état lui-même, donc très différentes de combinaisons de probabilités, qui sont des fonctions quadratiques de ce vecteur

d'état. En introduisant des corrélations directement au niveau des amplitudes de probabilités, on a accès à un niveau qui est en quelque sorte "en dessous" de celui des pondérations linéaires des probabilités classiques ; les termes croisés entre ces amplitudes peuvent conduire à l'apparition de termes d'interférence quantique. Comme on peut également supposer en mécanique quantique que l'état du système total n'est connu que de façon probabiliste, les deux niveaux peuvent coexister, et il est clair que la notion de corrélation y est bien plus riche qu'en physique classique.

Nous reviendrons plus en détail au § A et au § B de ce chapitre sur les diverses caractérisations possibles de l'intrication. Ensuite nous discuterons au § C comment l'intrication quantique peut être créée dans les expériences, ainsi qu'un processus général qui va dans le sens opposé, la décohérence, qui tend à la faire disparaître[1]. La dynamique d'un système quantique couplé à un système quantique plus grand, ainsi que l'équation pilote correspondante, sont étudiées au § D.

## A. Une notion purement quantique

En mécanique quantique, la relation entre les parties et le tout est très particulière et certainement peu intuitive. Nous avons déjà signalé que les mots "intrication quantique" ont été introduits par Schrödinger en 1935, dans [313] où il écrit (page 555) : "Lorsque deux systèmes, dont nous connaissons les états par leurs représentations (vecteurs d'état), entrent temporairement en interaction et exercent des forces connues entre eux, et lorsqu'après un certain temps d'influence mutuelle les deux systèmes se séparent à nouveau, alors chacun d'entre eux ne peut plus être décrit de la même façon qu'auparavant, c'est-à-dire en lui attribuant à chacun une représentation (vecteur d'état) propre. Pour ma part, je n'appellerais pas cette propriété une des caractéristiques de la mécanique quantique mais plutôt sa caractéristique principale, celle qui nous force à adopter un changement total de nos lignes de pensée habituelles. Par l'interaction les deux représentations [les états quantiques] se sont intriquées... Une autre façon de discuter cette situation très particulière est de dire : la meilleure connaissance possible d'un tout n'inclut pas nécessairement la meilleure connaissance possible de ses parties, même si elles sont totalement séparées et pourraient virtuellement être capables d'être elles aussi 'connues aussi bien que possible', c'est-à-dire avoir un vecteur d'état à elles. Le manque de connaissance n'a rien à voir avec une interaction qui serait mal connue – en tous cas pas dans le sens où il serait possible de mieux la connaître – ce manque est dû à l'interaction elle-même".

[1] Plus précisément à la faire se propager de plus en plus loin dans l'environnement, de sorte qu'elle devient rapidement impossible à mesurer en pratique, et que tout se passe comme si elle avait disparu.

### A-1. La partie et le tout

En mécanique classique, la description d'une partie est simplement contenue dans la description du tout [2] : lorsqu'un système physique est constitué de deux sous-systèmes 1 et 2, une description complète du système total 1+2 fournit immédiatement une description complète de chacun des sous-systèmes. C'est automatique, puisque la description dynamique du système total se ramène à la somme des descriptions des sous-systèmes : si l'on spécifie les valeurs des positions et des impulsions de toutes les particules (ainsi que les valeurs des champs dans l'espace), toutes les variables dynamiques de chaque sous-système sont immédiatement connues. Par exemple, une description parfaite du système solaire contient une description parfaite de toutes les positions et vitesses des planètes et de leurs satellites ; une description parfaite du champ électromagnétique contient une description parfaite et en tous points du champ électrique, ainsi que du champ magnétique.

De façon très curieuse, et comme le souligne Schrödinger, ceci n'est plus vrai en mécanique quantique. Si le système global est décrit de la façon la plus précise possible, donc par un vecteur d'état, les sous-systèmes peuvent être décrits de façon moins précise ; on peut être conduit à leur attribuer seulement des probabilités d'occupation de plusieurs états quantiques – en d'autres termes, et comme nous le verrons plus en détail ci-dessous, ils ne sont pas dans un état pur mais dans un mélange statistique, décrit mathématiquement par un opérateur densité. C'est ainsi que les parties peuvent être connues de façon statistique seulement, alors que le tout est parfaitement connu, avec une probabilité égale à 1.

Pour avoir une idée rapide de comment ceci est possible, considérons un système constitué d'un premier sous-système 1 avec des états quantiques $|\varphi\rangle$, et d'un second sous-système 2 avec des états quantiques $|\chi\rangle$. Si le système global est décrit par un simple état produit[3] :

$$|\Psi\rangle = |1:\varphi\rangle\,|2:\chi\rangle \equiv |1:\varphi;\ 2:\chi\rangle \qquad \text{(VII-1)}$$

les deux systèmes ne sont pas corrélés ; le premier est décrit par l'état quan-

[2] Heisenberg a publié en 1969 un livre dont le titre est précisément *La partie et le tout*, où il relate comment la mécanique quantique a émergé au cours de discussions qu'il a pu avoir avec d'autres physiciens. Il semble toutefois que ce titre n'ait aucune relation particulière avec l'intrication, mais plutôt avec un concept plus abstrait : "C'est une erreur fondamentale que de séparer la partie du tout, d'atomiser ce qui ne doit pas être atomisé. C'est l'unité et la complémentarité qui constituent la réalité" (phrase attribuée à Heisenberg [314]).

[3] La notion de produit tensoriel est discutée au Chapitre XII, voir équation (XII-68). Nous utilisons trois notations équivalentes pour le produit tensoriel :

$$|1:\varphi\rangle \otimes |2:\chi\rangle \equiv |1:\varphi\rangle\,|2:\chi\rangle \equiv |1:\varphi;\ 2:\chi\rangle$$

Suivant le contexte, l'une ou l'autre peut être plus commode et mieux correspondre à l'usage.

tique $|\varphi\rangle$, le second par l'état quantique $|\chi\rangle$. Alors les trois systèmes (total et sous-systèmes) sont tous associés avec un vecteur d'état, la description la plus précise qui soit possible en mécanique quantique standard pour un système physique.

Mais supposons maintenant que le système global soit dans l'état :

$$|\Psi\rangle = \alpha\,|1:\varphi_a\rangle\,|2:\chi_a\rangle + \beta\,|1:\varphi_b\rangle\,|2:\chi_b\rangle \tag{VII-2}$$

où les $|1:\varphi_{a,b}\rangle$ sont deux états orthogonaux normés pour le premier sous-système, et $|2:\chi_{a,b}\rangle$ deux autres états normés et orthogonaux pour le second ; $\alpha$ et $\beta$ sont deux nombres complexes quelconques (non nuls) satisfaisant la relation $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Avec (VII-2), le système global est toujours dans un état quantique parfaitement bien défini. Mais le premier sous-système se trouve avoir la probabilité $|\alpha|^2$ d'être dans l'état $|\varphi_a\rangle$ et une probabilité $|\beta|^2$ d'être dans l'état $|\varphi_b\rangle$ ; il est alors décrit par un mélange statistique au lieu d'un état pur[4] – nous revenons sur ce point plus en détail ci-dessous. Il s'ensuit que les sous-systèmes sont décrits avec moins de précision que le système global, une situation sans aucun équivalent en physique classique. On utilise les mots "intrication quantique" pour décrire de telles situations physiques.

Le formalisme de l'opérateur densité (§ A-6 du Chapitre XII) permet d'exprimer cette propriété de façon plus quantitative, en particulier grâce à l'utilisation des traces partielles (§ B-3 du Chapitre XII). L'opérateur densité $\rho$ associé à l'état normé $|\Psi\rangle$ est :

$$\rho = |\Psi\rangle\,\langle\Psi| \tag{VII-3}$$

qui est tout simplement le projecteur sur l'état $|\Psi\rangle$, de trace unité, et satisfaisant la relation $\rho^2 = \rho$ car :

$$\rho^2 = |\Psi\rangle\,\langle\Psi|\;\Psi\rangle\,\langle\Psi| = |\Psi\rangle\,\langle\Psi| = \rho \tag{VII-4}$$

On dit alors que $\rho$ décrit un "état pur", ce qu'on reconnaît à l'égalité :

$$Tr\left\{\rho^2\right\} = 1 \tag{VII-5}$$

(la trace de l'opérateur $\rho$ lui-même valant toujours 1 par définition de cet opérateur). Quant aux deux sous-systèmes, ils sont décrits par les traces partielles de $\rho$ ; par exemple, le premier sous-système est décrit par un opérateur :

$$\rho_1 = Tr_2\left\{\rho\right\} \tag{VII-6}$$

[4] De même, le second sous-système a une probabilité $|\alpha|^2$ d'être dans l'état $|\chi_a\rangle$ et une probabilité $|\beta|^2$ d'être dans l'état $|\chi_b\rangle$, de sorte que lui aussi est associé à un mélange statistique.

dont la matrice s'écrit[5] dans la base $|\varphi_a\rangle$, $|\varphi_b\rangle$ :

$$(\rho_1) = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix} \tag{VII-7}$$

Cette expression diagonale montre que le système 1 est décrit par un mélange statistique des états $|\varphi_a\rangle$ et $|\varphi_b\rangle$ avec des probabilités $|\alpha|^2$ et $|\beta|^2$.

On a également :

$$(\rho_1)^2 = \begin{pmatrix} |\alpha|^4 & 0 \\ 0 & |\beta|^4 \end{pmatrix} \tag{VII-8}$$

et :

$$\begin{aligned} Tr\left\{(\rho_1)^2\right\} &= |\alpha|^4 + |\beta|^4 = \left[|\alpha|^2 + |\beta|^2\right]^2 - 2\,|\alpha|^2\,|\beta|^2 \\ &= 1 - 2\,|\alpha|^2\,|\beta|^2 \leq 1 \end{aligned} \tag{VII-9}$$

Si l'un des deux coefficients $\alpha$ ou $\beta$ est nul, on revient au cas des sous-systèmes non corrélés comme dans (VII-1) ; il vient $(\rho_1)^2 = \rho_1$ et la trace de $(\rho_1)^2$ vaut 1, ce qui permet de retrouver que le premier sous-système est lui aussi dans un état pur (c'est également vrai du second). Mais, si aucun de ces coefficients n'est nul, les sous-systèmes sont corrélés, on a $(\rho_1)^2 \neq \rho_1$, et la trace de $(\rho_1)^2$ est inférieure à 1 ; donc le premier sous-système est décrit avec moins de précision que s'il était dans un état pur, par un mélange statistique.

Il va sans dire qu'on peut ajouter plus de deux termes dans la somme de (VII-2), ce qui va tendre à diminuer encore plus la connaissance de l'état de chaque sous-système, alors que l'état du système total reste toujours parfaitement bien défini. Par exemple, si $|\Psi\rangle$ contient une superposition de trois termes, tous contenant des états individuels orthogonaux, l'opérateur densité $\rho_1$ décrivant le système 1 devient un opérateur diagonal $3\times3$, ce qui introduit trois états possibles pour ce système (états propres de $\rho_1$). De plus, et comme remarqué par Schrödinger [313], la détermination des états possibles pour le sous-système n'est pas nécessairement unique ; on ne peut alors même pas faire une liste non ambigüe des états accessibles[6]. On peut même atteindre une situation où la description de chaque sous-système est minimale, de sorte qu'aucune information n'est disponible sur leurs états : tous les kets dans leur espace des états sont également probables. Dans ce type de cas d'intrication extrême, le système global possède les propriétés physiques associées à son état quantique, mais rien ne peut être dit sur les propriétés spécifiques des

[5]Selon la formule (XII-84) du Chapitre XII définissant une trace partielle, les éléments de matrice de $\rho_A$ sont donnés par $\langle\varphi_i|\,\rho_1\,|\varphi_j\rangle = \sum_{k=a,b,\ldots} \langle 1:\varphi_i; 2:\chi_k|\ \Psi\rangle\,\langle\Psi\ |1:\varphi_j; 2:\chi_k\rangle$ (où $i$, $j$ et $k$ sont égaux à $a$ ou $b$) ce qui donne, compte tenu de l'expression (VII-2) de $|\Psi\rangle$, la relation $\langle\varphi_i|\,\rho_1\,|\varphi_j\rangle = (\alpha\delta_{i,a})\,(\alpha^*\delta_{j,a}) + (\beta\delta_{i,b})\,(\beta^*\ \delta_{j,b})$, soit la matrice (VII-7).

[6]Ceci se produit chaque fois que deux probabilités (valeurs propres de l'opérateur densité réduit) sont égales.

sous-systèmes. Un exemple simple d'intrication extrême est donné par l'état singulet de deux spins 1/2 déjà étudié plus haut – *cf.* équation (IV-1) – ou sa généralisation directe :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+,-\rangle + e^{i\xi}\,|-,+\rangle\right] \qquad \text{(VII-10)}$$

(où $e^{i\xi}$ est un facteur de phase quelconque). Avec cet état, le système total est parfaitement défini, alors qu'aucune information n'est disponible sur chacun des deux spins individuels, qui ont seulement des probabilités égales d'être dans les états $|+\rangle$ ou $|-\rangle$.

Ainsi apparaît clairement le caractère spécifiquement quantique de l'intrication. En mécanique classique, partant de deux systèmes physiques classiques dont les propriétés sont aussi bien définies que possible, après interaction mutuelle on arrive nécessairement à une situation du même type où chacun des sous-systèmes est resté tout aussi bien défini. En revanche, en mécanique quantique, partant à nouveau de systèmes aussi bien définis que le permet leur nature quantique, à la fin du processus ils sont en général moins bien définis, ce qui fournit une signature du caractère purement quantique de l'intrication qui est apparue (en termes d'entropies des deux systèmes – § B-3 – on dira qu'en mécanique classique ils gardent une entropie nulle s'ils l'avaient avant d'interagir, alors ce que n'est en général pas le cas en mécanique quantique).

### A-2. Deux origines possibles des corrélations

Intrication et corrélation sont évidemment des notions intimement liées. Comme nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction de ce chapitre, les corrélations peuvent avoir deux origines distinctes en mécanique quantique :

(i) une qui est une transposition directe des corrélations classiques : on attribue à chacun des sous-systèmes des états quantiques aléatoires corrélés. La moyenne statistique est alors effectuée linéairement dans le calcul des probabilités, et on dit que le système total est décrit par un mélange statistique d'états produits (ou par un opérateur densité). Les corrélations entre les deux sous-systèmes sont alors de type classique, et satisfont nécessairement les inégalités de Bell (§ A du Chapitre IV et Appendice C).

(ii) une purement quantique, à la base de l'intrication quantique, où l'on attribue au système global un vecteur d'état qui n'est ni aléatoire ni un produit. La superposition linéaire est alors effectuée au niveau du vecteur d'état lui-même, qui est la somme cohérente de plusieurs composantes dont la phase relative peut jouer un rôle important. Il est alors possible de violer les inégalités de Bell.

Dans le premier cas, on se place au niveau des événements, des propriétés des systèmes physiques, des résultats de mesure, etc. comme en physique

classique. Dans le second, on se place "au niveau en dessous", à celui qui met en jeu directement des vecteurs d'état et des amplitudes de probabilité (au lieu des probabilités elles-mêmes). On élargit alors l'ensemble des corrélations possibles, comme l'illustre par exemple le théorème de Bell.

On peut combiner les deux processus, et associer au système total un mélange statistique d'états qui ne sont pas nécessairement des produits. Le formalisme de l'opérateur densité (§ A-6 du Chapitre XII) permet d'inclure les deux possibilités dans un seul opérateur, ce qui est très commode ; inversement, ceci a parfois l'inconvénient de perdre la trace de la nature de corrélations d'origines différentes, statistique classique ou purement quantique[7]. On parle parfois de "mélange propre" pour désigner la situation de statistique classique habituelle, de "mélange impropre" pour la seconde situation (sans équivalent classique).

## B. Caractérisations de l'intrication

Etudions maintenant comment l'intrication quantique peut être caractérisée de façon plus quantitative, grâce à des outils tels que la décomposition de Schmidt ou les entropies statistiques. Nous commençons pas quelques considérations simples concernant l'ambigüité de l'intrication.

### B-1. Ambiguïté de l'intrication

Pour un ket donné $|\Psi\rangle$, le développement comme une somme de deux produits d'états n'est pas unique, ce qui implique que la nature détaillée de l'intrication peut apparaître ambigüe. Par exemple, l'expression (VII-2) de $|\Psi\rangle$ peut être modifiée en développant les kets $|1 : \varphi_{a,b}\rangle$ et $|2 : \chi_{a,b}\rangle$ sur des bases arbitraires $\{|u_i\rangle\}$ et $\{|v_l\rangle\}$ engendrant les espaces des états respectifs des systèmes 1 et 2. On obtient alors des expressions de $|\Psi\rangle$ sur les kets $|u_i, v_l\rangle$ qui diffèrent du développement initial ; si les dimensions des espaces des états sont $P$ et $Q$, ces nouveaux développements contiennent en général $PQ$ termes au lieu de 2.

Parmi tous ces développements, on pourrait alors choisir uniquement ceux qui contiennent le nombre minimum de termes ; toutefois, même avec cette condition, le développement n'est pas toujours unique. A titre de contre-exemple simple, considérons l'état intriqué suivant :

[7] Le formalisme de l'opérateur densité est élégant et compact, mais justement cette compacité occulte parfois l'origine des termes mathématiques. L'opérateur densité permet de traiter à la fois les probabilités classiques (mélanges propres), provenant d'une connaissance imparfaite du système physique, et des probabilités d'origine purement quantique et plus fondamentale (mélanges impropres), qui n'ont rien à voir avec une connaissance imparfaite ou un observateur particulier. Des commodités mathématiques ne devraient jamais cacher des difficultés physiques !

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1:\varphi_a\rangle\,|2:\chi_a\rangle + |1:\varphi_b\rangle\,|2:\chi_b\rangle\right] \tag{VII-11}$$

Au vu de cette expression, on pourrait avoir l'impression qu'elle indique directement que ce sont les états $|1:\varphi_{a,b}\rangle$ qui sont intriqués avec les états $|2:\chi_{a,b}\rangle$, en d'autres termes que la base des états individuels dans laquelle l'intrication s'exprime naturellement est parfaitement déterminée. Mais nous pouvons introduire une nouvelle base d'états pour le système 1 :

$$|\xi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\varphi_a\rangle \pm e^{i\xi}\,|\varphi_b\rangle\right] \tag{VII-12}$$

(si $|\varphi_a\rangle = |+\rangle$ et $|\varphi_b\rangle = |-\rangle$ sont les deux états propres de la composante sur $Oz$ d'un spin 1/2, les $|\xi_\pm\rangle$ sont les états propres de la composante du spin le long de l'axe $O\xi$ du plan $xOy$ qui fait un angle $\xi$ avec $Ox$). Nous remarquons alors que $|\Psi\rangle$ peut également s'écrire :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|1:\xi_+\rangle \otimes |2:\Xi_+\rangle + |1:\xi_-\rangle \otimes |2:\Xi_-\rangle\right\} \tag{VII-13}$$

avec :

$$|\Xi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\chi_a\rangle \pm e^{-i\xi}\,|\chi_b\rangle\right] \tag{VII-14}$$

L'équation (VII-13) possède exactement la même forme que (VII-11) ; il est suffisant de remplacer les deux kets $|\pm\rangle$ par les deux autres kets $|\xi_\pm\rangle$ ainsi que les $|\chi_{a,b}\rangle$ par les $|\Xi_\pm\rangle$. Au vu de l'expression (VII-13 ) du vecteur d'état intriqué, on a maintenant l'impression que la base naturelle pour caractériser l'intrication est celle des $|\xi_\pm\rangle$ (pour un spin 1/2, ce serait la composante du spin le long de $O\xi$ qui est intriquée avec l'autre système, au lieu de la composante sur $Oz$) et des $|\Xi_\pm\rangle$. La conclusion est que la base des états individuels sur laquelle un état intriqué se développe naturellement n'est pas définie de façon unique (contrairement à des corrélations classiques entre des états classiques bien définis des systèmes individuels) ; en ce sens l'intrication est ambigüe[8]. Cette remarque peut aisément être généralisée à des systèmes individuels qui ont accès à plus de deux états quantiques différents.

La conclusion est que la base d'états individuels produits sur laquelle un état intriqué peut être développé n'est pas toujours définie de façon unique. Une telle situation est très différente de ce qui se produit avec des corrélations classiques, qui mettent en jeu des corrélations entre états classiques bien définis.

[8] Au § B-2, nous montrons que cette ambigüité résulte de la forme particulière (VII-11) du vecteur d'état ; l'ambigüité ne se produit pas si les valeurs de $\alpha$ et $\beta$ dans l'état général (VII-2) sont quelconques.

### B-2. Décomposition de Schmidt d'un état pur

Voir si un état pur décrivant deux systèmes quantiques contient ou pas de l'intrication n'est pas en général évident. Par exemple, partant d'un produit tensoriel d'états, si l'on décompose chacun des deux termes du produit sur une base quelconque, on obtient la somme d'un grand nombre de produits ; il est alors difficile de voir qu'il peut se factoriser, et ne contient donc aucune intrication. Il est donc utile de disposer d'outils qui permettent de voir de façon systématique quel est le degré d'intrication contenu dans un état pur.

Reprenons donc la discussion du § A-1 pour la généraliser. Le système quantique constitué par l'ensemble des deux sous-systèmes 1 et 2 est décrit par un vecteur d'état normé $|\Psi\rangle$, ou de façon équivalente par l'opérateur densité $\rho$ donné par le projecteur sur $|\Psi\rangle$ ; la relation (VII-5) est satisfaite, ce qui est normal puisque le système total est dans un état pur. Chacun des sous-systèmes est pour sa part décrit par les opérateurs densité obtenus par traces partielles :

$$\rho_1 = Tr_2\{\rho\} \quad ; \quad \rho_2 = Tr_1\{\rho\} \tag{VII-15}$$

Ces deux opérateurs sont hermitiques, non négatifs, et de trace unité ; leurs matrices peuvent donc être diagonalisées en faisant apparaître des valeurs propres réelles comprises entre 0 et 1. Appelons $|u_i\rangle$ les vecteurs propres de $\rho_1$ (l'indice $i$ prend $P$ valeurs différentes, où $P$ est la dimension de l'espace des états du sous-système 1) et $q_i$ les valeurs propres correspondantes, toutes positives ou nulles (mais pas nécessairement distinctes) ; de même les vecteurs propres de $\rho_2$ sont notés $|v_l\rangle$ (où $l$ prend $Q$ valeurs différentes, $Q$ étant la dimension de l'espace des états du second sous-système), et les valeurs propres correspondantes $r_l$. Les deux opérateurs densité partiels se décomposent alors selon :

$$\rho_1 = \sum_{i=1}^{P} q_i \ |u_i\rangle\langle u_i| \qquad \rho_2 = \sum_{l=1}^{Q} r_l \ |v_l\rangle\langle v_l| \tag{VII-16}$$

avec $0 \leq q_i,\, r_l \leq 1$.

#### B-2-a. Obtention de la décomposition

Nous pouvons alors décomposer l'état $|\Psi\rangle$ sur la base des kets produits tensoriels $\{|1:u_i\rangle \otimes |2:v_l\rangle\}$, que nous notons pour simplifier $\{|u_i, v_l\rangle\}$ en supposant que le premier ket représente l'état de 1 et le second celui de 2 ; nous écrivons donc :

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,l} x_{i,l}\,|u_i, v_l\rangle \tag{VII-17}$$

où les $x_{i,l}$ sont les composantes de $|\Psi\rangle$ dans cette base. Si nous introduisons le ket $|\overline{w}_i\rangle$, appartenant à l'espace des états de 2, par :

$$|\overline{w}_i\rangle = \sum_{l} x_{i,l}\,|v_l\rangle \tag{VII-18}$$

l'expression (VII-17) se simplifie (une seule sommation) en :

$$|\Psi\rangle = \sum_i |u_i, \overline{w}_i\rangle \tag{VII-19}$$

Selon la définition de la trace partielle – *cf.* (XII-84) – les éléments de matrice de $\rho_1$ s'écrivent :

$$\langle u_i| \, \rho_1 \, |u_j\rangle = \sum_m \langle u_i, v_m \, |\Psi\rangle \, \langle\Psi| \, u_j, v_m\rangle \tag{VII-20}$$

où, selon (VII-19), $|\Psi\rangle \langle\Psi|$ s'écrit :

$$\big|\Psi\big\rangle \big\langle\Psi\big| = \sum_{i',j'} \big|u_{i'}, \overline{w}_{i'}\big\rangle \big\langle u_{j'}, \overline{w}_{j'}\big| \tag{VII-21}$$

Si l'on reporte ce résultat dans (VII-20), seuls subsistent les termes $i' = i$ et $j' = j$, de sorte que :

$$\langle u_i| \, \rho_1 \, |u_j\rangle = \sum_m \langle v_m| \, \overline{w}_i\rangle \, \langle \overline{w}_j| \, v_m\rangle = \langle \overline{w}_j| \, \overline{w}_i\rangle \tag{VII-22}$$

et il vient finalement :

$$\rho_1 = \sum_{i,j} |u_i\rangle \, \langle u_i| \, \rho_A \, |u_j\rangle \, \langle u_j| = \sum_{i,j} \; |u_i\rangle \, \langle u_j| \times \langle \overline{w}_j \, |\overline{w}_i\rangle \tag{VII-23}$$

Mais, par construction de la base $\{|u_i\rangle\}$ que nous avons utilisée, $\rho_1$ est diagonal et donné par l'expression (VII-16) ; la comparaison avec (VII-23) montre que l'on a nécessairement :

$$\langle \overline{w}_j \, |\overline{w}_i\rangle = \delta_{i,j} \;\; \times q_i \tag{VII-24}$$

Pour toutes les valeurs de l'indice $i$ correspondant à des valeurs propres $q_i$ non nulles, cette relation indique qu'on peut définir un ensemble de vecteurs orthonormés $|w_i\rangle$ de l'espace des états du système 2 par :

$$|w_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{q_i}} \, |\overline{w}_i\rangle \tag{VII-25}$$

Pour toutes les valeurs de l'indice $i$ associées à des valeurs propres $q_i$ nulles, la même relation indique que les kets $|\overline{w}_i\rangle$ sont nuls.

Pour finir, compte tenu de ce résultat, l'expression (VII-19) devient :

$$|\Psi\rangle = \sum_i \sqrt{q_i} \, |u_i, w_i\rangle \tag{VII-26}$$

où les $|u_i\rangle$ constituent un ensemble de vecteurs orthonormés dans l'espace des états du premier système, et les $|w_i\rangle$ un autre ensemble de vecteurs orthonormés dans le second espace des états. Cette expression constitue la décomposition de Schmidt d'un état pur intriqué, parfois également appelée "décomposition bi-orthonormale" de l'état $|\Psi\rangle$ ; elle joue un rôle important dans l'interprétation modale de la mécanique quantique (§ J du Chapitre XI).

#### B-2-b. Discussion

Si maintenant nous revenons aux traces partielles $\rho_1$ et $\rho_2$, le calcul à partir de (VII-26) donne deux expressions symétriques :

$$\rho_1 = \sum_i q_i \, |u_i\rangle \, \langle u_i| \tag{VII-27}$$

(expression déjà connue) et :

$$\rho_2 = \sum_i q_i \, |w_i\rangle \, \langle w_i| \tag{VII-28}$$

Nous constatons ainsi que la symétrie est rétablie entre les deux systèmes physiques : les $|u_i\rangle$ ont été définis comme vecteurs propres de $\rho_1$, mais nous voyons que les $|w_i\rangle$ sont également des vecteurs propres de $\rho_2$ ; de plus, les deux opérateurs densité partiels ont toujours les mêmes valeurs propres[9], leur somme valant 1 puisque les deux opérateurs sont de trace unité. Dans le cas particulier où elles sont toutes nulles sauf une, chacun des deux sous-systèmes est dans un état pur. Mais, en général, plusieurs des valeurs propres sont non nulles, et on voit immédiatement que $(\rho_1)^2$ n'est pas égal à $\rho_1$, et de même pour $\rho_2$. Nous retombons sur un cas où les deux sous-systèmes sont alors décrits par des mélanges statistiques, alors que le système total est dans un état pur.

Le nombre de valeurs propres $q_i$ différentes de zéro, soit le nombre de termes effectifs dans (VII-26), est appelé le "rang de Schmidt" de $|\Psi\rangle$ et noté $R$. Si $R = 1$, l'état du système total n'est pas intriqué, les deux sous-systèmes se trouvant donc dans des états purs. Si $R = 2$, on tombe sur l'exemple étudié au § A-1, si $R = 3$ sur une intrication plus compliquée, etc. Le fait que $R$ soit une grandeur indépendante du sous-système, 1 ou 2, montre que l'intrication est en quelque sorte partagée entre eux de façon symétrique ; il n'est par exemple pas possible qu'un des deux sous-systèmes soit dans un état pur et l'autre dans un mélange statistique. La dimension de l'espace des états du système 2 avec lequel 1 est intriqué donne évidemment une borne supérieure au nombre de vecteurs $|w_i\rangle$ indépendants, donc au rang $R$ ; en fait, $R$ ne peut dépasser la dimension d'aucun des espaces des deux sous-systèmes : il faut donc que les deux sous-systèmes aient des espaces des états de dimensions suffisantes si l'on veut obtenir une intrication de rang élevé entre eux.

Si toutes les valeurs propres $q_i$ de $\rho_A$ (et de $\rho_B$) sont distinctes, les décompositions (VII-16) et (VII-28) de $\rho_B$ selon les projecteurs sur ses vecteurs propres coïncident nécessairement ; la série des vecteurs propres $|w_i\rangle$ coïncide

[9] Ces propriétés découlent du fait que nous avons supposé que le système total est dans un état pur ; elles ne sont pas nécessairement satisfaites s'il est décrit par un mélange statistique.

alors avec celles des $|v_l\rangle$. Les vecteurs propres des opérateurs densité partiels donnent directement la décomposition de Schmidt, qui est donc unique dans ce cas.

Lorsque certaines valeurs propres $q_i$ sont dégénérées, la décomposition n'est plus unique. Par exemple, pour un état singulet, les deux matrices densité partielles ont deux valeurs propres égales à 1/2. Or cet état singulet peut être décomposé de la même façon sur des produits de vecteurs propres de composantes des spins le long d'une même direction arbitraire ; il admet donc une infinité de décompositions de Schmidt possibles. Dans le § B-1, nous avons vu un autre cas où les deux valeurs propres sont dégénérées, de sorte que l'intrication est ambigüe.

### B-3. Entropies statistiques

A tout opérateur densité $\rho$ on peut associer une entropie statistique (§ A-6-d du Chapitre XII). Comparons alors les entropies associées à $\rho$ et aux opérateurs densité partiels $\rho_1$ et $\rho_2$.

Si, comme dans le cas étudié au § précédent, le système physique total est dans un état pur, son opérateur densité est le projecteur (VII-3) sur un seul état $|\Psi\rangle$, de sorte que l'entropie associée est $S = 0$. Cependant les deux sous-systèmes ne sont en général pas dans des états purs (sauf dans le cas particulier où $|\Psi\rangle$ est un produit, donc sans intrication), de sorte que :

$$\begin{aligned} S_1 &= -k_B Tr\left\{\rho_1 \ln \rho_1\right\} \geq 0 \\ S_2 &= -k_B Tr\left\{\rho_2 \ln \rho_2\right\} \geq 0 \end{aligned} \qquad \text{(VII-29)}$$

Il en découle que :

$$S_1 + S_2 \geq S \qquad \text{(VII-30)}$$

(l'égalité correspondant au cas particulier où $|\Psi\rangle$ est un produit, et où le rang de Schmidt est donc égal à 1).

Mais, de façon plus générale, le système total est décrit par un opérateur densité $\rho$ qui ne correspond pas nécessairement à un état pur, de sorte que son entropie $S$ n'est pas nulle non plus. On peut cependant montrer que cette entropie $S$ reste toujours inférieure ou égale à la somme des entropies des deux sous-systèmes[10], de sorte que la relation (VII-30) reste valable dans ce cas plus général ; l'égalité est obtenue uniquement quand $\rho$ est un produit :

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 \qquad \text{(VII-31)}$$

ce qui correspond au cas de deux sous-systèmes qui sont séparément décrits par des mélanges statistiques, tout en restant non corrélés. Ainsi la différence

[10] On parle souvent de propriété de "sous-additivité de l'entropie" pour caractériser le fait que l'entropie du système total est inférieure à la somme des entropies de ses deux sous-systèmes.

$S_1 + S_2 - S$ donne une estimation de la perte de précision entre la description quantique du système total et les deux descriptions quantiques séparées des deux sous-systèmes.

### B-4. Mesures de l'intrication

Si le système total $S_1 + S_2$ est dans un état pur $|\Psi\rangle$, la décomposition de Schmidt montre que :

$$S_1 = S_2 = \sum_i q_i \ \ln q_i \geq 0 \qquad \text{(VII-32)}$$

Il est alors naturel de choisir $S_1$ comme définition de l'intrication des deux sous-systèmes. Lorsque le système total est dans un état pur, on dit que les deux sous-systèmes sont maximalement intriqués lorsque les entropies $S_1$ et $S_2$ atteignent leur valeur maximale. Si les dimensions des espaces des états des deux sous-systèmes sont égales à la même valeur $D$, ceci se produit quand les deux matrices densité partielles sont diagonales avec leurs éléments égaux à $1/D$. Par exemple, deux spins 1/2 dans un état singulet sont maximalement intriqués. Le cas opposé se produit lorsque le système total est dans un état produit ; les deux entropies s'annulent alors, ainsi que le degré d'intrication.

Mais on peut également chercher à définir une mesure générale du degré d'intrication de deux sous-systèmes quantiques, lorsque le système total n'est pas dans un état pur. Pour être acceptable physiquement, cette mesure doit satisfaire à un certain nombre de critères. Par exemple elle doit évidemment être nulle si le système total est dans un état produit tensoriel où les deux systèmes ne sont pas corrélés ; il faut également que le degré d'intrication reste invariant lorsqu'Alice et Bob, agissant sur deux sous-systèmes éloignés, effectuent des opérations locales sur eux [315]. Diverses mesures d'intrication ont été proposées, généralement liées aux entropies de l'opérateur densité et de ses traces partielles ; pour une revue, voir par exemple [316]. Lorsque les systèmes intriqués sont au nombre de trois ou plus, la question devient plus compliquée et il n'existe pas pour le moment de définition généralement acceptée d'un taux d'intrication de parties multiples.

On pourrait aussi s'attendre à ce qu'un système donnant lieu à des violations maximales des inégalités BCHSH doive également atteindre le degré maximal d'intrication. En fait, il se trouve que les notions d'intrication et de non-localité ne sont pas reliées directement, sauf dans certains cas particuliers (deux spins 1/2 par exemple). De façon curieuse, des états d'intrication maximale produisent en général des effets non locaux moins prononcés que des états d'intrication non maximale [215,317]. La non-localité et l'intrication sont en général des concepts très différents.

### B-5. Monogamie

Un état tel que (VII-10) est un état où deux spins sont fortement intriqués, et l'état GHZ (VI-1) en quelque sorte l'équivalent pour trois spins. On pourrait penser que cet état à trois spins préserve l'intrication entre les deux premiers spins du premier, tout en les intriquant avec un troisième. En réalité, ce n'est pas du tout ce qui se produit : en passant de (VII-10) à (VI-1), si l'on intrique effectivement le troisième spin avec les deux premiers, en même temps on détruit totalement leur intrication initiale. Nous l'avons d'ailleurs déjà noté au § A-3 du Chapitre VI : les états ne manifestent de fortes corrélations entre les spins que si l'ensemble des spins est mesuré ; si la mesure porte sur deux spins au lieu de trois, elle ne fait plus apparaître aucune corrélation entre eux.

Comment faire alors pour ajouter un spin supplémentaire sans détruire la corrélation entre les deux premiers ? On peut supposer que l'état des trois spins est :

$$\begin{aligned} |\ \Psi> &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|1:+;2:-\rangle + e^{i\xi}\,|1:-;2:+\rangle\Big]\otimes|3:\theta\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|1:+;2:-;3:\theta\rangle + e^{i\xi}\,|1:-;2:+;3:\theta\rangle\Big] \end{aligned} \qquad \text{(VII-33)}$$

(où $|\theta\rangle$ est un état normé quelconque pour le troisième spin), avec un état factorisé du spin supplémentaire ; ce choix préserve visiblement la même intrication entre les spins 1 et 2 que pour l'état (VII-10)[11]. Mais le troisième spin est alors totalement décorrélé avec les deux premiers !

Un compromis entre les deux tentatives précédentes est alors :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|1:+;2:-;3:\theta_1\rangle + e^{i\xi}\,|1:-;2:+;3:\theta_2\rangle\Big] \qquad \text{(VII-34)}$$

Si $|\theta_1\rangle = |\theta_2\rangle$, on retombe sur (VII-33), et le spin n'est pas intriqué du tout avec les deux premiers ; si $|\theta_1\rangle$ et $|\theta_2\rangle$ sont orthogonaux, on retombe sur un état GHZ où aucune des trois paires de spins n'a la moindre intrication, cette dernière n'apparaissant qu'au niveau des trois particules. Lorsque $|\theta_1\rangle$ et $|\theta_2\rangle$ ne sont ni parallèles, ni orthogonaux, la situation est intermédiaire : plus ils sont parallèles, plus les deux spins initiaux restent intriqués (nous verrons au § suivant que les termes cohérents font intervenir le produit scalaire $\langle\theta_1\,|\theta_2\rangle$), mais alors le troisième l'est très peu ; inversement, plus ils sont orthogonaux, plus les deux spins initiaux perdent leur corrélation pour la transmettre entièrement au niveau des trois spins. En fait, le troisième spin joue pour les deux premiers un rôle analogue à l'environnement dans la décohérence qui sera

[11] Dans le calcul de l'effet du terme cohérent (en $e^{i\xi}$) selon la méthode du § A-3 du Chapitre VI, il suffit maintenant de retourner deux spins, le troisième restant toujours dans l'état $|\theta\rangle$.

étudiée au § C-3-a : l'environnement détruit d'autant plus la cohérence du système initial qu'il s'y corrèle efficacement avec des états aussi orthogonaux que possible.

Il s'agit là d'une propriété générale : si deux systèmes physiques sont quantiquement intriqués de façon maximale, un principe d'exclusion mutuelle fait qu'il leur est impossible d'être intriqués avec un troisième. Mathématiquement, ceci s'exprime par une inégalité de Coffman-Kundu-Wootters[12] [318, 319]. Une telle propriété n'a guère d'équivalent en théorie classique, où évidemment rien n'empêche de corréler un troisième système à deux autres sans pour autant détruire leur corrélation initiale. On donne souvent le nom de "monogamie de l'intrication" à cette propriété quantique. On peut par exemple montrer que, si deux sous-systèmes quantiques A et B sont corrélés entre eux ainsi qu'à un troisième système C, et si deux d'entre eux sont suffisamment corrélés pour que des mesures qui les concernent violent les inégalités BCHSH, alors ces inégalités sont nécessairement satisfaites pour toutes les mesures portant sur l'un des deux autres couples de systèmes [320, 321].

### B-6. Critère de séparabilité pour l'opérateur densité

Nous l'avons vu au § C-3-c du Chapitre III, l'argument EPR et le théorème de Bell sont liés à la notion de non-séparabilité quantique ; ils le sont également avec la notion d'intrication quantique, puisque la violation des inégalités de Bell requiert l'existence d'une telle intrication. En termes d'opérateur densité, comment reconnaître la non-séparabilité quantique ?

Considérons un système total décrit par un opérateur densité $\rho$ et constitué de deux sous-systèmes partiels 1 et 2. Lorsque $\rho$ peut se développer en fonction d'une série d'opérateurs densité $\rho_1^n$ et $\rho_2^n$ relatifs à chacun des deux sous-systèmes selon :

$$\rho = \sum_n w_n \ \rho_1^n \otimes \rho_2^n \qquad \text{(VII-35)}$$

avec des coefficients $w_n$ réels positifs, on dit que l'opérateur densité est séparable[13] [190, 322]. La normalisation à 1 de la trace des opérateurs densité entraîne que :

$$1 = \sum_n w_n \qquad \text{et donc} \quad 0 \leq w_n \leq 1 \qquad \text{(VII-36)}$$

de sorte que les $w_n$ peuvent être interprétés comme des probabilités[14] (chaque

[12] La Ref [318] utilise une mesure de l'intrication appelée "concurrence". Elle établit que la somme des carrés de la concurrence entre $A$ et $B$ et de celle entre $A$ et $C$ ne peut dépasser le carré de la concurrence entre $A$ et la paire $BC$.

[13] Dans son article initial, Werner parle de sous-systèmes "classiquement corrélés" [190], mais le mot "séparable" utilisé par Peres [322] est maintenant plus fréquemment utilisé.

[14] Si l'on remplace la variable discrète $n$ par une variable continue $\lambda$, on tombe alors sur le cas étudié à l'Appendice C.

$w_n$ donne la probabilité pour que le premier système soit décrit par $\rho_1^n$ et le second par $\rho_2^n$). En revanche, si le développement (VII-35) comporte nécessairement des coefficients $w_n$ qui ne soient pas des réels positifs, on dit que l'opérateur densité $\rho$ n'est pas séparable et qu'il contient de l'intrication quantique[15].

Si l'on effectue des mesures séparées sur les sous-systèmes 1 et 2, un système décrit par un opérateur densité séparable satisfait toujours les inégalités de Bell [190] (la réciproque n'est cependant pas vraie : un opérateur densité non séparable ne conduit pas nécessairement à des violations de ces inégalités). Dans une telle situation, chacun des sous-systèmes possède des propriétés qui peuvent être arbitrairement quantiques, mais la façon dont sont introduites les corrélations entre ces propriétés reste classique. Un système séparable n'est donc jamais intriqué quantiquement, quel que soit le caractère fortement quantique ou non de chacun des deux systèmes séparés. Le critère de Peres-Horodecki [322, 323] indique qu'une condition nécessaire pour qu'une matrice densité représente un opérateur $\rho$ qui soit séparable est que la matrice obtenue par transposition partielle (transposition des indices relatifs à l'un des deux sous-systèmes seulement) n'ait que des valeurs propres non négatives. L'apparition de valeurs propres négatives de cet opérateur semi-transposé peut donc signaler l'apparition d'intrication quantique, avec une meilleure sensibilité qu'une violation des inégalités de Bell.

## C. Création et perte de l'intrication

Historiquement, à l'époque de Schrödinger, l'intrication était considérée comme un phénomène rare, ne se produisant à peu près que dans des expériences de pensée. De nos jours, de nombreuses méthodes expérimentales ont été mises au point pour obtenir de l'intrication. L'intrication est maintenant devenue une composante essentielle de l'information quantique, de la cryptographie, de la téléportation, etc. De fait, toutes les expériences mentionnées au § A-5 du Chapitre IV mettent en jeu des ensembles de deux particules intriquées, le plus souvent des photons dont l'intrication apparaît sur les variables de polarisation.

### C-1. Intrication par interactions locales

Comme Schrödinger l'avait initialement envisagé dans son article (voir la citation du § A), une façon d'obtenir l'intrication entre sous-systèmes physiques est de mettre en jeu des interactions locales entre particules. Un atome

[15] Pour deux spins 1/2, on peut aisément montrer que l'opérateur densité associé avec un état singulet, ainsi que sa généralisation directe (VII-10), mettent nécessairement en jeu des coefficients négatifs dans le développement (VII-35). Deux spins dans un état singulet ne sont donc pas séparables, mais quantiquement intriqués.

émettant successivement deux photons peut fournir un schéma de ce type, qui a été effectivement utilisé dans de nombreuses expériences. On part d'un atome excité, qui émet un premier photon, et atteint un état intermédiaire qui dépend des caractéristiques de polarisation du photon émis ; à ce stade le système atome + photon est décrit par un état intriqué, avec des composantes cohérentes sur plusieurs états de polarisation et états intermédiaires de l'atome. Chacune de ces composantes donne lieu ensuite à l'émission d'un second photon, avec des polarisations différentes, alors que l'atome lui-même atteint un état fondamental qui est indépendant des polarisations des photons émis. On retombe alors sur le cas $|\theta_1\rangle = |\theta_2\rangle$ étudié ci-dessus où l'état d'une des trois particules (l'atome en l'occurrence) se factorise, l'atome sortant alors de l'intrication quantique et permettant ainsi aux deux photons d'atteindre une intrication maximale.

Un exemple souvent utilisé est celui de la cascade atomique $J = 0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ de l'atome de Calcium qui permet, par simple émission spontanée successive de deux photons par le même atome, d'obtenir deux photons dans un état totalement intriqué :

$$| \Psi >= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |1 : H; 2 : H\rangle + |1 : V; 2 : V\rangle \right] \qquad \text{(VII-37)}$$

où $|H\rangle$ et $|V\rangle$ désignent deux états de polarisation linéaires (horizontale et verticale) perpendiculaires entre eux et à la direction de propagation des photons[16] ; ces états sont analogues aux états $|+\rangle$ et $|-\rangle$ d'un spin 1/2. Nous avons également vu que les techniques de la conversion paramétrique en optique non linéaire [152] permettent d'obtenir des paires de photons du même type, mais dans des conditions expérimentales plus favorables.

L'intrication quantique ne se limite pas aux photons, mais peut être obtenue avec des particules ayant une masse au repos. Par exemple, l'expérience décrite dans la Ref. [146] porte sur les corrélations entre les spins de deux protons obtenues à la suite d'une collision à basse énergie entre un jet de protons et une cible d'hydrogène ; la Ref. [217] propose d'utiliser la dissociation de dimères d'atomes de Mercure (dont l'isotope 199 a un spin nucléaire 1/2) pour obtenir des atomes dont les variables internes sont corrélées. On peut également utiliser un schéma où deux atomes sont intriqués par échange d'un seul photon confiné dans une cavité de très haute surtension [324]. Nous avons déjà discuté au § C-1-e du Chapitre IV la réalisation d'une expérience de Bell avec les spins de centres NV dans le diamant.

Les ions piégés fournissent d'autres possibilités pour obtenir de l'intrication quantique, dans un cas particulièrement intéressant où les particules sont

[16] Pour simplifier, nous ne prenons en compte ici que les variables de polarisation des photons, qui en particulier jouent un rôle essentiel dans la discussion des inégalités BCHCH. En réalité, les photons possèdent également d'autres variables, fréquence (énergie) et direction de propagation, que nous supposons ici fixées.

piégées et peuvent donc être observées pendant longtemps. La Ref. [325] décrit l'obtention d'une telle intrication avec des ions de Béryllium placés dans un piège de Paul à radiofréquences, selon la méthode proposée par Cirac et Zoller [326]. Pour une revue de l'obtention d'intrication dans des ions, voir la Ref. [327]. Enfin l'intrication peut être observée en physique du solide avec des courants supraconducteurs [328] mettant en jeu un grand nombre d'électrons (systèmes macroscopiques). Nous discutons maintenant une autre méthode, l'échange d'intrication ("entanglement swapping") qui permet d'intriquer des paires de particules sans qu'elles interagissent, uniquement sous l'effet du processus de mesure quantique concernant d'autres particules.

### C-2. Echange d'intrication

La méthode dite "entanglement swapping" permet d'intriquer des particules provenant de sources indépendantes (qui n'ont donc aucun passé commun) sous l'effet de la mesure quantique [329,330]. Supposons que l'on dispose de deux sources $S_{12}$ et $S_{34}$ créant chacune une paire de photons intriqués, 1 et 2 pour la première, 3 et 4 pour la seconde (Fig. VII.1). L'état décrivant les deux paires est le produit tensoriel de deux états du type (VII-37) :

$$\mid \Psi >= \frac{1}{2}\left[|1:H;2:H\rangle + |1:V;2:V\rangle\right] \otimes \left[|3:H;4:H\rangle + |3:V;4:V\rangle\right] \tag{VII-38}$$

Si l'on introduit les quatre états de Bell relatifs aux particules $i$, $j$ avec la définition :

$$\begin{array}{l} \mid \Phi^B_{i,j} >_{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|i:H;j:H\rangle \pm |i:V;j:V\rangle\right] \\ \mid \Theta^B_{i,j} >_{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|i:H;j:V\rangle \pm |i:V;j:H\rangle\right] \end{array} \tag{VII-39}$$

nous obtenons une base orthonormée de l'espace des états associé aux particules $i$ et $j$. Comme :

$$\mid \Phi^B_{1,4} >_{(+)} \otimes \mid \Phi^B_{2,3} >_{(+)} + \mid \Phi^B_{1,4} >_{(-)} \otimes \mid \Phi^B_{2,3} >_{(-)} = \left[|HHHH\rangle + |VVVV\rangle\right]$$

(pour simplifier l'écriture, nous supposons implicitement que l'ordre des particules est 1, 2, 3 et 4 dans le second membre) et :

$$\mid \Theta^B_{1,4} >_{(+)} \otimes \mid \Theta^B_{2,3} >_{(+)} + \mid \Theta^B_{1,4} >_{(-)} \otimes \mid \Theta^B_{2,3} >_{(-)} = \left[|HHVV\rangle + |VVHH\rangle\right] \tag{VII-40}$$

nous pouvons écrire l'état (VII-38) sous la forme :

$$\begin{array}{r} \mid \Psi >= \frac{1}{2}\Big[\mid \Phi^B_{1,4} >_{(+)} \otimes \mid \Phi^B_{2,3} >_{(+)} + \mid \Phi^B_{1,4} >_{(-)} \otimes \mid \Phi^B_{2,3} >_{(-)} + \\ + \mid \Theta^B_{1,4} >_{(+)} \otimes \mid \Theta^B_{2,3} >_{(+)} + \mid \Theta^B_{1,4} >_{(-)} \otimes \mid \Theta^B_{2,3} >_{(-)}\Big] \end{array} \tag{VII-41}$$

Supposons maintenant que le schéma de l'expérience soit celui de la Figure VII.1 : on effectue sur les particules 2 et 3 une mesure où les deux

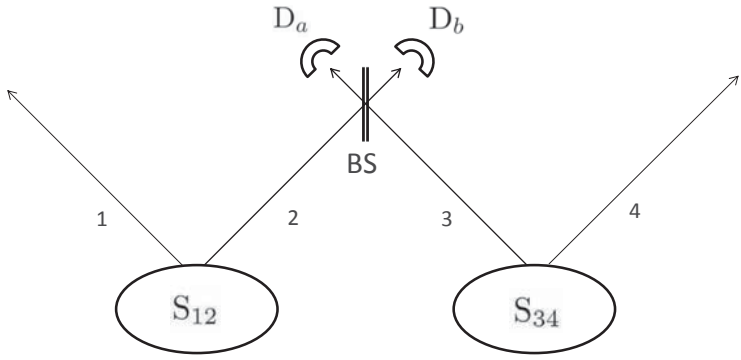


FIGURE *VII.1 – Schéma de la méthode d'échange d'intrication ("entanglement swapping"). Deux sources* $S_{12}$ *et* $S_{34}$ *émettent chacune une paire de particules intriquées, numérotées* 1 *et* 2 *pour la première,* 3 *et* 4 *pour la seconde. Une lame semi-réfléchissante BS est insérée sur la trajectoire des particules* 2 *et* 3*, et deux détecteurs* $D_a$ *et* $D_b$ *mesurent le nombre de particules dans les deux canaux de sortie. Cette mesure effectue une projection du vecteur d'état qui met les deux particules* 1 *et* 4 *dans un état totalement intriqué, alors qu'elles n'ont jamais interagi.*

particules interfèrent et dont les vecteurs propres de mesure sont les quatre états de Bell de ces deux particules – ceci peut être réalisé en envoyant les deux particules sur une lame semi-réfléchissante et en observant avec des détecteurs $D_a$ et $D_b$ dans quels canaux de sortie les particules sont mesurées[17] après la lame. La projection sur l'un des quatre états de Bell pour ces particules projette le système sur un état où les deux autres particules occupent le même état de Bell. Les deux particules non observées sont donc projetées dans un état totalement intriqué. Ce qui est remarquable dans ce schéma est que, initialement, la paire des deux particules 1 et 2 est intriquée de façon interne, mais pas avec la paire de particules 3 et 4, qui elle aussi

[17]Parmi les quatre états de Bell, le seul pour lequel chacune des deux directions de sortie contient une particule est l'état $\mid \Theta^B_{23} >_{(-)}$ ; les trois autres états correspondent à des situations où les deux particules sortent toujours dans le même canal de sortie (effet Hong-Ou-Mandel). Si donc les deux détecteurs $D_a$ et $D_b$ enregistrent une particule, la mesure projette les particules 1 et 4 dans l'état totalement intriqué $\mid \Theta^B_{14} >_{(-)}$.

n'a qu'une intrication interne. En effectuant une mesure appropriée sur une particule de chaque paire, on projette les deux particules restantes sur un état fortement intriqué, même si ces deux particules n'ont interagi à aucune étape du processus.

Il est intéressant de comparer les corrélations obtenues par échange d'intrication avec des corrélations classiques. Supposons que deux sources indépendantes émettent des paires d'objets corrélés, numérotés 1 et 2 pour la première source, 3 et 4 pour la seconde, comme sur la Figure VII.1. Dans chaque réalisation de l'expérience, chaque source émet deux objets partageant une propriété commune (par exemple la même couleur, des moments angulaires opposés, etc.), mais les deux sources sont totalement incorrélées (les objets émis dans la même réalisation par deux sources différentes ne présentent aucune corrélation entre leurs couleurs, moments angulaires, etc.). Si toutefois nous sélectionnons les événements où les particules 2 et 3 présentent une certaine corrélation (par exemple couleurs identiques, couleurs différentes, moments angulaires parallèles ou antiparallèles, etc.), il est clair que les particules 1 et 4 seront également corrélées de la même façon, et ceci même si elles n'ont jamais interagi dans le passé. Ce résultat est juste une conséquence de la sélection opérée dans une distribution classique de probabilités, et pourrait s'appeler "échange de corrélations classiques". Cependant, même avec cette sélection, si une expérience de Bell est réalisée avec les objets 1 et 4, les corrélations obtenues seront toujours telles que les inégalités de Bell seront satisfaites. En revanche, la méthode d'échange d'intrication permet d'obtenir de fortes violations de ces inégalités. C'est donc une méthode plus puissante pour créer des corrélations que l'échange de corrélations classiques. Nous avons déjà discuté dans le § C-1-e du Chapitre IV plusieurs exemples d'expériences de Bell utilisant cette méthode.

Nous avons déjà mentionné la possibilité d'intriquer un plus grand nombre de particules [274] par des méthodes du même type. D'autres protocoles créant de l'intrication quantique ont été mis en œuvre, permettant ainsi de mettre 6 ions dans un état NOON [331] ou jusqu'à 8 ions dans un état W (superposition cohérente d'états où une seule excitation est localisée sur l'un quelconque des ions avec des amplitudes de probabilité égales) [332]. En optique quantique, les techniques de conversion paramétrique dans des cristaux non linéaires ont été utilisées pour des expériences mettant en jeu l'intrication de 2, 4 ou 6 photons [333, 334]. Dans le § C-1-d du Chapitre IV nous avons également vu comment l'échange d'intrication a pu être mis en œuvre pour créer avec des photons des corrélations quantiques entre ions éloignés dans des pièges différents (dans la Figure VII.1, les particules 1 et 4 sont alors des ions, les particules 2 et 3 des photons). Ceci a conduit à des violations des inégalités de Bell se rapprochant un peu plus d'une expérience idéale (sans échappatoire).

Diverses méthodes expérimentales ont été mises au point pour créer une intrication entre atomes neutres [335, 336]. La méthode récente dite "sculpture d'états intriqués" consiste à partir d'un état produit pour les atomes, pour ensuite en supprimer certaines composantes et aboutir ainsi à un état fortement intriqué [337, 338].

## C-3. Décohérence

Nous discutons maintenant plus en détail un phénomène déjà introduit plus haut, la décohérence, qui tend constamment à réduire la durée de vie des superpositions cohérentes ; ce processus est très rapide si le nombre de particules corrélées est grand. Nous l'avons défini dans le § A du Chapitre II, comme l'étape initiale du phénomène associé avec la chaîne infinie de von Neumann : les superpositions cohérentes tendent constamment à se propager au sein de l'environnement, mettant en jeu des corrélations de plus en plus complexes avec lui. Lors du processus de décohérence, l'intrication ne disparaît pas vraiment, mais elle va encore plus loin dans l'environnement ; en pratique, elle devient rapidement impossible à mettre en évidence.

### C-3-a. Mécanisme

Afin de mieux comprendre comment ceci se produit, considérons un état :

$$|\Psi\rangle = \Big[\alpha\,|\varphi_a\rangle + \beta\,|\varphi_b\rangle\Big] \otimes |\mathbf{k}_0\rangle \qquad \text{(VII-42)}$$

qui est le produit de deux états, l'un décrivant un atome dans une superposition cohérente de deux états orthogonaux $|\varphi_a\rangle$ et $|\varphi_b\rangle$, localisés dans des régions différentes de l'espace, l'autre décrivant une autre particule, un photon par exemple, initialement dans l'état $|\mathbf{k}_0\rangle$ (nous supposons tous ces états normalisés).

Initialement, l'atome est décrit par un état possédant des propriétés quantiques qui dépendent de la phase relative de $\alpha$ et $\beta$, et sont donc cohérentes ; la décohérence est un processus dans lequel ces propriétés cohérentes disparaissent. Supposons en effet que le photon interagisse avec l'atome et soit diffusé dans un état quantique qui est différent selon l'endroit où la diffusion s'est produite : si l'atome diffusant est dans le premier état $|\varphi_a\rangle$, le photon est diffusé vers l'état $|\mathbf{k}_+\rangle$ ; s'il est dans l'état $|\varphi_b\rangle$, le photon est diffusé dans l'état $|\mathbf{k}_-\rangle$ (nous supposons que les états $|\mathbf{k}_\pm\rangle$ sont normalisés)[18]. Après diffusion l'atome n'a pas changé de position, et retourne au même état initial (on suppose tout transfert d'impulsion négligeable), et le vecteur d'état qu'il

[18] Nous aurions tout aussi bien pu supposer que le photon est focalisé de sorte qu'il n'interagit qu'avec l'atome s'il se trouve dans l'un des deux états, mais n'est pas diffusé si l'atome est dans l'autre état.

faut utiliser pour décrire le système devient alors :

$$\left|\Psi'\right\rangle = \alpha \left|\varphi_a\right\rangle \otimes \left|\mathbf{k}_+\right\rangle + \beta \left|\varphi_b\right\rangle \otimes \left|\mathbf{k}_-\right\rangle \tag{VII-43}$$

Supposons maintenant que nous ne soyons intéressés que par les propriétés de l'atome, pas par celles du photon ; la raison pourrait en être, par exemple, que la détection de ce photon est, soit impossible, soit très difficile (comme c'est le cas pour un photon de l'infrarouge lointain). Il est alors utile de calculer la trace partielle (cf § B-3 du Chapitre XII) sur ce photon, afin d'obtenir l'opérateur densité qui décrit les atomes seuls. Un calcul simple, analogue à celui qui a conduit à (VII-23), montre que cette trace partielle peut être écrite, dans la base des deux états $\left|\varphi_a\right\rangle$ et $\left|\varphi_b\right\rangle$ :

$$\rho = \begin{pmatrix} \mid \alpha \mid^2 & \alpha\beta^* \left\langle \mathbf{k}_- \right| \left. \mathbf{k}_+ \right\rangle \\ \alpha^*\beta \left\langle \mathbf{k}_+ \right| \left. \mathbf{k}_- \right\rangle & \mid \beta \mid^2 \end{pmatrix} \tag{VII-44}$$

Nous voyons sur cette formule que, si le produit scalaire $\left\langle \mathbf{k}_- \right| \left. \mathbf{k}_+ \right\rangle$ était égal à 1, la matrice densité de l'atome ne serait pas affectée par la diffusion du seul photon. Mais cela reviendrait à supposer que le photon est diffusé exactement dans le même état, quelle que soit la localisation spatiale en $\left|\varphi_a\right\rangle$ ou $\left|\varphi_b\right\rangle$ de l'atome diffusant, de sorte qu'il n'emporte strictement aucune information sur l'endroit où il a été diffusé ! C'est très peu probable si la distance entre les positions de l'atome est bien plus grande que la longueur d'onde du photon. En fait, il est bien plus réaliste de penser que ce produit scalaire est proche de zéro, ce qui signifie que les éléments non diagonaux de (VII-44) sont, eux aussi, presque zéro. Nous en concluons que la diffusion d'une seule particule détruit presque totalement la cohérence entre les deux états atomiques, dès lors qu'ils sont situés en des endroits différents.

La perte de cohérence devient encore pire quand plus de photons sont diffusés (en supposant qu'ils sont tous dans le même état initial $\left|\mathbf{k}_0\right\rangle$), car il faut alors remplacer (VII-43) par l'état :

$$\left|\Psi''\right\rangle = \alpha \left|\varphi_a\right\rangle \otimes \left|\mathbf{k}_+\right\rangle \left|\mathbf{k}'_+\right\rangle \left|\mathbf{k}''_+\right\rangle ... + \beta \left|\varphi_b\right\rangle \otimes \left|\mathbf{k}_-\right\rangle \left|\mathbf{k}'_-\right\rangle \left|\mathbf{k}''_-\right\rangle ... \tag{VII-45}$$

avec des notations évidentes (les états avec $n$ primes correspondent au $n-1$ ième photon diffusé) ; le même calcul que ci-dessus fournit alors la valeur suivante pour la trace partielle $\rho$ :

$$\begin{pmatrix} \mid \alpha \mid^2 & \alpha\beta^* \left\langle \mathbf{k}_- \right| \left. \mathbf{k}_+ \right\rangle \left\langle \mathbf{k}'_- \right| \left. \mathbf{k}'_+ \right\rangle ... \\ \alpha^*\beta \left\langle \mathbf{k}_+ \right| \left. \mathbf{k}_- \right\rangle \left\langle \mathbf{k}'_+ \right| \left. \mathbf{k}'_- \right\rangle ... & \mid \beta \mid^2 \end{pmatrix} \tag{VII-46}$$

Maintenant nous avons, dans les éléments non diagonaux, le produit d'un grand nombre de produits scalaires $\left\langle \mathbf{k}_- \right| \left. \mathbf{k}_+ \right\rangle$, tous plus petits que 1 ; il est clair que ces éléments ont un module encore plus petit que lorsqu'un seul photon est diffusé. En fait, dès que les deux états $\left|\mathbf{k}_+\right\rangle$ et $\left|\mathbf{k}_-\right\rangle$ ne sont pas

strictement identiques, ils tendent exponentiellement vers zéro avec le nombre de processus de diffusion, et la cohérence disparaît rapidement.

Il s'agit là d'une propriété totalement générale : les objets ont une forte tendance à laisser une trace dans l'environnement, car ils développent des corrélations avec toute particule élémentaire qui passe à portée d'interaction. C'est encore plus vrai s'ils sont macroscopiques et constitués d'un grand nombre d'atomes ; on peut par exemple dans (VII-42) remplacer l'état cohérent à un atome par un état de type GHZ (cohérent à un grand nombre d'atomes) et prendre pour état initial :

$$|\Psi\rangle = \Big[\alpha\,|\varphi_a, \varphi_a, ..., \varphi_a\rangle + \beta\,|\varphi_b, \varphi_b, ..., \varphi_b\rangle\Big] \otimes |\mathbf{k}_0\rangle \qquad \text{(VII-47)}$$

Plus le nombre d'atomes se trouvant initialement dans les états $|\varphi_a\rangle$ et $|\varphi_b\rangle$ est élevé, plus rapidement se produira la diffusion de nombreux photons, entraînant une décroissance encore plus rapide des éléments non diagonaux. Or nous avons vu qu'il suffit de la diffusion d'un seul photon dans deux états orthogonaux pour détruire la cohérence. Ainsi la grande taille d'un système physique dans une superposition cohérente rend cette superposition extrêmement fragile. La cohérence des objets macroscopiques se transforme rapidement en une cohérence mettant en jeu l'environnement avec des corrélations de plus en plus complexes (le photon diffusé peut, à son tour, se corréler avec d'autres particules) ; rapidement cette cohérence devient impossible à détecter expérimentalement et tout se passe comme si elle avait simplement disparu. Un tel phénomène est inévitable – à moins bien sûr que les propriétés de diffusion des deux états symbolisés par $|\varphi_a\rangle$ et $|\varphi_b\rangle$ soient exactement les mêmes, ce qui exclut toute séparation spatiale notable entre les états, sinon la différence serait invisible ! Ceci montre combien fragiles sont les superpositions macroscopiques d'objets, chaque fois qu'elles comprennent des états qui peuvent être perçus comme distincts[19].

#### C-3-b. Retour sur le chat de Schrödinger et sur l'unicité macroscopique

Nous pouvons maintenant revenir plus en détail sur certaines questions que nous avons déjà abordées au § B du Chapitre II, et qui sont reliées à la décohérence et/ou au chat de Schrödinger. Evidemment, un chat n'est pas un système quantique à deux niveaux, comme l'atome que nous avons décrit par la matrice densité (VII-46) ; un nombre énorme d'états quantiques est associé à un chat qui est vivant, et il en est de même pour un chat mort. Si $\mathcal{N}$ est le nombre de ces états, chaque élément de matrice de (VII-46) doit être remplacé par un bloc carré d'éléments disposés sur $\mathcal{N}$ lignes et $\mathcal{N}$ colonnes. Une fois ce changement effectué, le reste du raisonnement demeure le même

[19] Dans le § A-2 du Chapitre IX, nous étudions les effets de la décohérence induite par l'environnement d'un appareil de mesure, et introduisons la notion d'"état pointeur".

que plus haut. En particulier, un chat vivant et un chat mort ne diffuseront pas tous les photons de la même façon, et il est clair que le processus de décohérence va très rapidement intervenir dans le scénario. Cette remarque fournit-elle une solution évidente au paradoxe ? De façon plus générale, ne peut-on voir dans la décohérence une "explication" du postulat de réduction du vecteur d'état : quand la superposition du système initial devient incohérente, ne sommes-nous pas en présence d'un mélange statistique qui ressemble beaucoup à la description d'un objet classique avec des propriétés physiques bien définies (mais inconnues) ? Un nombre incalculable d'auteurs redécouvre constamment cette possibilité, et pense ainsi résoudre les difficultés relatives à la mesure quantique[20]. Est-ce une position raisonnable ?

Nous avons déjà donné la réponse à cette question dans les §§ B-2 et B-3 du Chapitre II : une telle explication est peu satisfaisante parce que le but du postulat de réduction du paquet d'ondes n'est pas d'expliquer la décohérence, déjà contenue dans l'équation de Schrödinger, mais l'unicité du résultat de la mesure, qui échappe à cette équation. En fait, l'effet de la réduction du vecteur d'état est parfois juste l'opposé d'une décohérence : il remet le sous-système mesuré dans un état pur, le complet opposé d'un mélange statistique, de sorte que la vraie question est de comprendre l'émergence (ou la ré-émergence) d'un résultat unique [57], pas d'un mélange statistique. Dans la vie courante, ainsi que dans les laboratoires, on n'observe jamais de superposition de résultats de mesure différents ; la Nature semble fonctionner d'une façon où un seul résultat émerge de chaque expérience. Par quel processus, ou perturbation, ce qui était indéterminé peut-il devenir déterminé ? Ce fait ne sera jamais expliqué par l'équation de Schrödinger, car tout ce qu'elle réussit à faire est à étendre sans fin ses ramifications dans l'environnement, sans jamais réussir à sélectionner une seule d'entre elles.

Une autre façon de répondre à la question est de se mettre sur le plan de la logique. Le point délicat du paradoxe vient de la nécessité de trouver une limite à la validité de l'équation linéaire de Schrödinger, puisqu'une équation linéaire ne peut jamais prédire l'émergence d'un résultat unique dans une seule expérience. La vraie difficulté est donc de savoir comment introduire la frontière correspondante. Logiquement, il est clair que le problème ne pourra jamais être résolu en invoquant un processus qui est déjà contenu dans l'équation de Schrödinger[21], comme la décohérence et d'autres processus similaires

[20] Bell regrettait cette constante résurgence de la même idée. Dans [102] par exemple, après avoir insisté sur la différence profonde entre un état où les éléments diagonaux de la matrice densité coexistent après décohérence et un autre où ces éléments diagonaux apparaissent en alternative ('et' est différent de 'ou', *cf.* note 11), il écrit : "L'idée selon laquelle l'élimination de la cohérence implique, d'une façon ou une autre, le remplacement et 'et' par 'ou' est très commune parmi ceux qui croient résoudre le problème de la mesure. Cela m'a toujours surpris".

[21] Chacun sait que ce n'est pas en restant au milieu d'un pays que l'on peut atteindre ses frontières...

linéaires. Bien sûr, personne ne doute qu'un processus de mesure fasse intervenir la décohérence dans sa première étape, mais la vraie question est de savoir ce qui se produit ensuite pour faire émerger un résultat unique.

En d'autres termes, une fois que dans une étape préliminaire les éléments non diagonaux ont disparu sous l'effet de la décohérence, la question est de comprendre ce qu'il advient des éléments diagonaux. Pour obtenir une dynamique quantique qui soit compatible avec le fait qu'une mesure fournit un seul résultat (ou, plus généralement, pour obtenir l'unicité macroscopique), il faudrait introduire un processus qui soit capable de forcer tous les éléments diagonaux à se concentrer en un seul (pour l'atome à deux niveaux considéré plus haut ; pour le chat, cette coalescence doit se faire vers un seul des deux blocs diagonaux, soit ceux décrivant un chat vivant, soit ceux décrivant un chat mort). Comment cela peut-il se produire ? C'est la partie difficile du problème de la mesure : expliquer pourquoi, à la fin du processus de mesure, les éléments diagonaux peuvent coalescer. Bien sûr, ils rappellent beaucoup les probabilités habituelles, dont ils possèdent toutes les propriétés mathématiques : ce sont des nombres positifs et leur somme est l'unité (*cf.* la discussion du § B-3 du Chapitre II) ; on pourrait les appeler des "pré-probabilités" [339]. Mais toutes ces pré-probabilités apparaissent simultanément lors de chaque réalisation de l'expérience, alors que de véritables probabilités caractérisent des événements qui sont exclusifs (*cf.* la citation de Bell dans la note 20). Transformer des pré-probabilités en de véritables probabilités est une étape importante, qui demande pour être franchie par exemple l'introduction du postulat de réduction de von Neumann.

Poussés à ce point de la discussion, certains physiciens rétorquent qu'après tout on peut toujours supposer qu'ultérieurement, et d'une façon ou d'une autre, la superposition quantique de l'équation de Schrödinger se résout en une seule de ses branches. C'est assurément exact, mais cela revient à faire sortir un problème par la porte, et le laisser rentrer ensuite par la fenêtre ! Cette attitude revient en effet à considérer que l'équation dynamique standard ne peut pas toujours être valable, ce qui était précisément le point du paradoxe. Une solution plus logique serait de compléter la décohérence par l'interprétation d'Everett de la mécanique quantique (§ M du Chapitre XI) ; alors effectivement on obtient un point de vue cohérent, où l'émergence d'un résultat n'a plus à être expliquée, tout simplement parce qu'on suppose qu'elle ne se produit jamais (l'équation de Schrödinger n'a plus de frontière de validité). Mais, bien sûr, dans ce point de vue il faut se préoccuper des autres difficultés intrinsèques qu'introduit cette interprétation, que nous discuterons plus bas (§ M du Chapitre XI). Une discussion générale des relations entre décohérence et le problème de la mesure, ainsi que de son rôle dans le cadre des diverses interprétations de la mécanique quantique, est donnée dans la Ref. [340].

Concernant la terminologie, nous avons déjà mentionné au § B du Cha-

pitre II qu'au fil des années il est devenu de plus en plus courant d'utiliser les mots "chat de Schrödinger" (Schrödinger cat ou SC en anglais) pour décrire des états cohérents tels que (VI-16), même parfois pour de petites valeurs de $N$ (parfois pour un ion unique !). Ceci introduit une redéfinition des mots, du fait que la propriété essentielle du chat original est d'avoir un nombre de degrés de liberté macroscopique, et donc de toujours résoudre les superpositions linéaires (par opposition à un atome radioactif ou un ion). Supposons un instant que l'on puisse réaliser un état "par tout ou rien" avec une très grande valeur de $N$, serait-ce une meilleure réalisation du chat de Schrödinger tel que l'entendait son inventeur ? Dans une certaine mesure, oui, puisque le chat peut être vu comme le symbole d'un système de beaucoup de particules qui changent d'état quantique individuel pour aller vers un état orthogonal, lorsqu'on passe d'une composante du vecteur d'état à l'autre. Effectivement il est très probable que beaucoup des atomes qui constituent le chat prennent part à des liaisons chimiques différentes, selon que le chat est vivant ou mort. Mais il semble plutôt difficile d'inventer une raison pour laquelle tous les atomes et tous les degrés de liberté devraient nécessairement passer vers des états orthogonaux, alors que c'est la propriété essentielle des états par tout ou rien. En un sens, ils en font plus que ce qui est requis pour un chat de Schrödinger standard, de sorte que pour finir les deux concepts restent relativement distincts, même pour de grandes valeurs de $N$.

#### C-3-c. Ingéniérie du réservoir

Le résultat du couplage d'un système quantique avec son environnement n'est pas toujours négatif, mais peut s'avérer très utile. Il peut servir à "adapter sur mesure" l'équation pilote régissant l'opérateur densité du système, et pour le conduire vers un état quantique donné ; la méthode est appelée en anglais "quantum reservoir engineering" [341–343]. Un exemple bien connu est la méthode du pompage optique [344, 345], qui permet de transférer un ensemble d'atomes se trouvant dans un mélange statistique thermique de tous les sous-niveaux Zeeman de leur état fondamental vers un seul de ces sous-niveaux, ou une superposition cohérente de ces sous-niveaux. Dans ce cas, le rôle de l'environnement (le "réservoir") est joué par tous les modes du champ électromagnétique, qui sont couplés aux atomes par le processus d'émission spontanée. Depuis, de nombreuses autres applications du "quantum reservoir engineering" ont été proposées, voir par exemple les Refs. [346–349] ainsi que [350] pour une réalisation expérimentale avec des ions piégés. Ainsi, le couplage dissipatif avec un réservoir ne conduit-il pas nécessairement à des états sans cohérence quantique ; en fait, une décohérence bien contrôlée peut parfaitement servir à préparer des états quantiques très intéressants.

#### C-3-d. Théorie et expériences

Le problème de l'évolution d'un système quantique microscopique couplé à un environnement macroscopique lui aussi quantique recouvre de nombreuses situations physiques différentes, que l'on groupe parfois sous le terme commun de "dissipation quantique". Ce sujet possède une longue histoire, que nous ne pouvons que survoler ici. En 1963, Feynman et Vernon [351] ont étudié le couplage entre un système test et un environnement externe constitué par des combinaisons d'oscillateurs harmoniques, ou encore par un environnement qui peut approximativement être traité de cette façon. Ces auteurs ont montré que l'évolution du système test peut être obtenue en termes de ses seules variables propres, tandis que l'influence de l'environnement externe est compris dans des "fonctionnelles d'influence" qui dépendent des variables du système test. En 1983, Caldeira et Leggett [352], motivés par l'étude de l'effet tunnel du courant électrique dans un SQUID (Superconducting Quantum Interference Device), ont proposé une théorie où l'environnement est aussi supposé avoir une réponse linéaire aux perturbations créées par le système test. Ce travail a été suivi d'une étude générale de la dynamique d'un système à deux niveaux couplé à un environnement dissipatif constitué par un ensemble d'oscillateurs [353]. Toutefois, de nombreux environnements ne peuvent pas être modélisés par de tels bains d'oscillateurs ("spin bath"). Une revue générale du sujet, accompagnée d'une analyse détaillée des environnements "spin bath" (y compris un système à deux niveaux couplé à un bain de systèmes à deux niveaux – appelé "central spin model") peut être touvée dans l'article de Prokof'ev et Stamp [354]. Les Refs. [355] et [356] proposent également une introduction historique, dans un point de vue plus orienté vers la philosophie. Nous donnerons plus de références sur le sujet dans le contexte de la mesure quantique et de la détermination des "états pointeurs" au § A-2 du Chapitre IX.

Des expériences sur la décohérence ont été réalisées avec des systèmes quantiques variés. Par exemple, des superpositions d'états cohérents de photons de phases différents ont été étudiées dans la Ref. [357], fournissant des informations sur les constantes de temps associées au processus de décohérence dans ce cas. Un autre système quantique intéressant est fourni par la superposition cohérente de deux courants circulant en directions opposées dans un SQUID [358] ; des études ultérieures ont montré que le processus de décohérence peut être maîtrisé et étudié avec précision avec un tel système [359]. La décohérence a également été étudiée dans des cristaux contenant des aimants quantiques moléculaires [360] ; dans ce cas, la théorie prédit l'existence de trois contributions principales à la décohérence : les phonons, les spins nucléaires, et les interactions entre molécules, ce qui illustre bien la variété des types de décohérence possibles.

### C-4. Purification, distillation

La distribution d'états intriqués entre deux partenaires peut jouer un rôle important dans plusieurs processus physiques très intéressants, comme la cryptographie quantique ou la téléportation, que nous étudierons au § B du Chapitre VIII. Mais il n'est pas suffisant pour les réaliser de disposer d'une source qui produise des paires de particules dans un état fortement intriqué, car il faut également que ces particules se propagent jusqu'à Alice et Bob, qui dans bien des applications peuvent se trouver en des endroits éloignés. Or cette propagation peut entraîner une transformation de l'état de la paire qu'ils reçoivent, soit en un état pur différent, soit sous l'effet de la décohérence en un mélange statistique, et donc réduire son intrication. Le problème se pose alors de trouver une méthode de "purification" pour restaurer l'intrication initiale afin de continuer à disposer de paires de particules dans des états d'intrication maximale. Pour y arriver, les seules opérations possibles sont des opérations locales : chacun dans son laboratoire, Alice et Bob peuvent modifier localement les propriétés des particules en appliquant des évolutions appropriées (par exemple, on peut appliquer un champ magnétique pour faire tourner localement un spin, ou une lame de phase pour changer la polarisation d'un photon) ; ils peuvent également effectuer des mesures et s'en communiquer mutuellement les résultats par des canaux classiques.

Il a été remarqué théoriquement qu'une telle purification est effectivement possible dans le cadre des règles de la mécanique quantique [361, 362], pourvu qu'on accepte de diminuer le nombre de paires utilisables dont disposent Alice et Bob, qui devient alors plus faible que le nombre de paires émises ; on convertit en quelque sorte le manque de qualité de l'intrication en une diminution de l'efficacité de la source, mais on est sûr que les paires restantes sont bien dans l'état quantique requis. Bien sûr, il faut pour cela que la perte initiale de qualité de l'intrication ne soit pas trop importante. Le processus conserve l'entropie d'intrication, en ce sens que les opérations locales effectuées par Alice et Bob ne modifient en rien les entropies de von Neumann des opérateurs densité de leurs sous-systèmes respectifs. De fait, le rendement de l'opération (nombre de paires obtenues à la fin du processus de concentration d'intrication, ramené au nombre total de paires reçues) est simplement donné par cette entropie. La méthode permet de produire n'importe quel état quantique du système des deux particules, pourvu que les deux partenaires puissent échanger de l'information par un canal classique et agir en conséquence. Elle a un lien fondamental avec la correction quantique des erreurs, essentielle pour le calcul quantique (§ D du Chapitre VIII) [363].

D'un point de vue expérimental, la faisabilité de la méthode a été testée avec succès [364], avec toutefois des taux de succès inférieurs aux taux maximaux théoriques, car les protocoles mis en jeu sont difficiles à appliquer en pratique de sorte que certains compromis sont nécessaires.

## D. Dynamique quantique d'un sous-système

Nous étudions maintenant la dynamique temporelle d'un système test $S$ en interaction avec un autre système quantique $B$ (éventuellement bien plus grand). Lorsque des conditions générales sont remplies, en particulier quand le couplage entre $S$ et $B$ est suffisamment faible, et par exemple lorsque $B$ est un grand système jouant le rôle pour $S$ d'un réservoir thermique, on peut obtenir une "équation pilote" donnant l'évolution temporelle de l'opérateur densité partiel $\rho_S$ de $S$. Non seulement l'équation pilote fournit des informations plus quantitatives sur le processus de décohérence, généralement appelé "relaxation transverse" dans ce contexte, mais aussi sur d'autres types d'évolution comme la "relaxation longitudinale" ou "l'hamiltonien effectif" résultant du couplage avec $B$. Mais, pour introduire une telle équation, il peut être utile de commencer par définir les opérateurs appelés "opérateurs de Kraus".

### D-1. Opérateurs de Kraus

L'espace des états de $S$ est un espace $\mathcal{E}_S$ de dimension $N_S$, engendré par une base orthonormée $\{|u_n\rangle\}$, avec $n = 1, 2, ..., N_S$. Initialement, $S$ est dans l'état :

$$|\varphi_0\rangle = \sum_{n=1}^{N_S} c_n \, |u_n\rangle \tag{VII-48}$$

tandis que $B$ est dans un état $|\Phi_0\rangle \in \mathcal{E}_B$, où $\mathcal{E}_B$ est l'espace des états de $B$ engendré par une base orthonormée $\{|\Theta_q\rangle\}$ avec $q = 0, 1, ..., N_B - 1$ (nous appelons $N_B$ la dimension de $\mathcal{E}_B$. Nous supposons que l'état initial $|\Psi\rangle$ de l'ensemble $S + B$ est à l'instant initial $t = 0$ un produit :

$$|\Psi\rangle = |\varphi_0\rangle \otimes |\Phi_0\rangle \tag{VII-49}$$

Entre les instants $t = 0$ et $t = \tau$, les deux systèmes interagissent et s'intriquent entre eux ; nous appelons $|\Psi'\rangle$ leur état à l'instant $\tau$ après interaction. Nous souhaitons étudier l'expression de $|\Psi'\rangle$ ainsi que celle de l'opérateur densité $\rho'_S$ du système $S$ qui lui est associé.

#### D-1-a. Un premier calcul

Nous commençons par un calcul simple pour définir $N_B$ opérateurs $M_q$ agissant dans l'espace des états de $S$, appelés opérateurs de Kraus. Nous raffinerons ensuite cette définition pour montrer que le nombre d'opérateurs de Kraus peut être limité par une borne qui ne dépend que de la dimension $N_S$ de $\mathcal{E}_S$ au lieu de $N_B$.

Supposons en premier lieu que l'état initial de $S$ soit l'un des $|u_n\rangle$ :

$$|\Psi\rangle = |u_n\rangle \otimes |\Phi_0\rangle \tag{VII-50}$$

L'état final correspondant $|\Psi'\rangle$ peut alors être développé sur la base des produits tensoriels $|u_{n'}\rangle \otimes |\Theta_q\rangle$ selon :

$$\left|\Psi'\right\rangle_n = \sum_{n'=1}^{N_S} \sum_{q=0}^{N_B-1} x^{(n)}_{n',q} \ |u_{n'}\rangle \otimes |\Theta_q\rangle \tag{VII-51}$$

(pour des raisons qui deviendront claires au § D-3, il est commode de faire courir l'indice de sommation $q$ entre 1 et $N_B - 1$) ou encore :

$$\left|\Psi'\right\rangle_n = \sum_{q=0}^{N_B-1} \left|\overline{u}^{(n)}_q\right\rangle \otimes \left|\Theta_q\right\rangle \tag{VII-52}$$

avec :

$$\left|\overline{u}^{(n)}_q\right\rangle = \sum_{n'=1}^{N_S} x^{(n)}_{n',q} \ \left|u_{n'}\right\rangle \tag{VII-53}$$

Les états $\left|\overline{u}^{(n)}_q\right\rangle$ de $S$ qui apparaissent dans ce développement ne sont nécessairement ni orthogonaux, ni normalisés. Nous pouvons introduire les $N_B$ opérateurs linéaires $M_q$ agissant dans $\mathcal{E}_S$ et définis par :

$$M_q \left|u_n\right\rangle = \left|\overline{u}^{(n)}_q\right\rangle \tag{VII-54}$$

pour toute valeur de $n$. Alors (VII-52) devient :

$$\left|\Psi'\right\rangle_n = \sum_{q=0}^{N_B-1} M_q \left|u_n\right\rangle \otimes |\Theta_q\rangle \tag{VII-55}$$

Supposons maintenant que l'état initial de $S$ soit un état quelconque (VII-48) dans $\mathcal{E}_S$. Par linéarité, l'état après interaction peut maintenant être écrit :

$$\begin{aligned} |\Psi'\rangle &= \sum_{n=1}^{N_S} c_n \sum_{q=0}^{N_B-1} M_q \left|u_n\right\rangle \otimes |\Theta_q\rangle \\ &= \sum_{q=0}^{N_B-1} M_q \left|\varphi_0\right\rangle \otimes |\Theta_q\rangle \end{aligned} \tag{VII-56}$$

Comme l'interaction entre $S$ et $B$ se traduit par une évolution unitaire qui ne change pas la norme du vecteur d'état, cet état est normalisé à 1. Mais, par construction, les $|\Theta_q\rangle$ sont orthonormés ; nous avons donc :

$$\sum_{q=0}^{N_B-1} \left\langle\varphi_0\right| M_q^\dagger M_q \left|\varphi_0\right\rangle = 1 \tag{VII-57}$$

pour tout $|\varphi_0\rangle$. Il s'ensuit[22] que :

$$\sum_{q=0}^{N_B-1} M_q^\dagger M_q = 1 \tag{VII-58}$$

#### D-1-b. Une limite supérieure pour le nombre d'opérateurs de Kraus

Les sommations sur $q$ dans les expressions précédentes contiennent $N_B$ termes, ce qui peut devenir rapidement très lourd lorsque la dimension $N_B$ de l'espace des états du système quantique $B$ devient grande (si par exemple $B$ est un thermostat macroscopique). Nous allons montrer que ces sommations peuvent en fait être limitées à un nombre maximal de termes qui est égal à $(N_S)^2$, c'est-à-dire au plus le carré de la dimension de l'espace des états de $S$. L'idée générale est que la sommation de Kraus ne doit pas nécessairement se faire sur une base qui engendre tout l'espace des états $\mathcal{E}_B$ de $B$ ; il est suffisant d'engendrer le sous-espace $\mathcal{E}'_B$ qui est accessible à partir de $|\Phi_0\rangle$ par interaction avec $S$.

Dans l'expression (VII-51) de $|\Psi'\rangle_n$, au lieu de commencer par effectuer la somme sur l'indice $n'$, commençons par celle sur l'indice $q$ et posons :

$$\left|\overline{\Theta}_{n'}^{(n)}\right\rangle = \sum_{q=0}^{N_B-1} x_{n',q}^{(n)} \left|\Theta_q\right\rangle \tag{VII-59}$$

Nous obtenons alors :

$$\left|\Psi'\right\rangle_n = \sum_{n'=1}^{N_S} |u_{n'}\rangle \otimes \left|\overline{\Theta}_{n'}^{(n)}\right\rangle \tag{VII-60}$$

Si maintenant l'état initial de $S$ n'est plus $|u_n\rangle$ mais la superposition générale (VII-48), le vecteur d'état après interaction s'écrit :

$$\left|\Psi'\right\rangle = \sum_{n=1}^{N_S} c_n \sum_{n'=1}^{N_S} |u_{n'}\rangle \otimes \left|\overline{\Theta}_{n'}^{(n)}\right\rangle \tag{VII-61}$$

Les $(N_S)^2$ kets $\left|\overline{\Theta}_{n'}^{(n)}\right\rangle$ engendrent un sous-espace $\mathcal{E}'_B$ de $\mathcal{E}_B$ dont la dimension est $N'_B \leq (N_S)^2$. Dans ce sous-espace, nous choisissons une base orthonormée de $N'_B$ kets $|\Xi_q\rangle$. Le développement de tous les $\left|\overline{\Theta}_{n'}^{(n)}\right\rangle$ sur cette base conduit à :

$$\left|\Psi'\right\rangle = \sum_{n=1}^{N_S} c_n \sum_{n'=1}^{N_S} \sum_{q=0}^{N'_B-1} \left\langle \Xi_q \left| \overline{\Theta}_{n'}^{(n)} \right\rangle \right. |u_{n'}\rangle \otimes \left|\Xi_q\right\rangle \tag{VII-62}$$

[22] L'opérateur $\sum_{q=0}^{N_B-1} M_q^\dagger M_q$ est hermitique, ce qui permet de le diagonaliser. La relation (VII-57) montre alors que toutes ses valeurs propres sont nécessairement égales à 1, ce qui signifie que l'opérateur lui-même est égal à l'opérateur identité agissant dans $\mathcal{E}_S$.

Nous pouvons alors introduire les $N'_B$ opérateurs $M_q$ par :

$$M_q \left|u_n\right\rangle = \sum_{n'=1}^{N_S} \left\langle \Xi_q \left| \overline{\Theta}_{n'}^{(n)} \right\rangle \right. \left|u_{n'}\right\rangle \tag{VII-63}$$

et obtenir :

$$\begin{aligned} \left|\Psi'\right\rangle &= \sum_{n=1}^{N_S} c_n \sum_{q=0}^{N'_B-1} M_q \left|u_n\right\rangle \otimes \left|\Xi_q\right\rangle \\ &= \sum_{q=0}^{N'_B-1} M_q \left|\varphi_0\right\rangle \otimes \left|\Xi_{q'}\right\rangle \end{aligned} \tag{VII-64}$$

Cette expression a la même forme que (VII-56), mais la somme est maintenant réduite à un nombre de termes $N'_B$ qui est plus petit ou égal à $(N_S)^2$. Le domaine de sommation peut donc être beaucoup plus petit si la dimension de l'espace des états $\mathcal{E}_B$ est très grande. La relation d'unitarité (VII-58) est toujours valable, pour la même raison que ci-dessus. De façon générale, on remarque que les opérateurs de Kraus ne sont pas définis de façon unique : il existe une grande flexibilité dans le choix de la base $|\Xi_q\rangle$ dans le sous-espace de dimension $N'_B$, ce qui peut conduire à des opérateurs $M_q$ différents.

### D-2. Opérateur densité, somme de Kraus

L'opérateur densité du système $S$ après interaction est obtenu par trace sur les états de $B$ :

$$\rho'_S = Tr_B \left\{ \left|\Psi'\right\rangle \left\langle \Psi'\right| \right\} \tag{VII-65}$$

où $|\Psi'\rangle$ est donné par (VII-64). Puisque les $|\Xi_q\rangle$ sont orthonormés, nous avons :

$$\rho'_S = \sum_{q=0}^{N'_B-1} M_q \left|\varphi_0\right\rangle \left\langle \varphi_0\right| M_q^\dagger \tag{VII-66}$$

Il en découle que l'opérateur densité de $S$ après interaction peut être écrit en fonction de sa valeur initiale $\rho_0 = |\varphi_0\rangle \langle\varphi_0|$ avant intrication sous la forme :

$$\rho'_S = \sum_{q=0}^{N'_B-1} M_q \ \rho_0 \ M_q^\dagger \tag{VII-67}$$

où les "opérateurs de Kraus" satisfont la condition de normalisation (VII-58) et où $N' \leq (N_S)^2$. Le membre de droite de (VII-67) est appelé une "somme de Kraus" ; il fournit l'expression générale de l'opérateur densité de $S$ à la fin du processus d'intrication.

Les opérateurs de Kraus caractérisent donc bien, non seulement la façon dont l'état du système total évolue à partir d'un état initial produit (VII-49), mais aussi l'évolution de l'opérateur densité $\rho_S$ du système test. Si, initialement, l'état du système $S$ est défini par un opérateur densité qui est un mélange statistique et non un état pur, une simple superposition linéaire permet de montrer que la relation (VII-67) reste valable avec les mêmes opérateurs. Si, initialement, le système $B$ est également défini par un mélange statistique, on peut encore utiliser une superposition linéaire ; cependant, comme la définition des opérateurs de Kraus dépend de l'état initial $|\Phi_0\rangle$ de $B$, il faut procéder à un moyennage approprié des opérateurs de Kraus avec les racines carrées des probabilités associées aux états initiaux de $B$. Physiquement, il n'est pas surprenant que les opérateurs de Kraus $M_q$, qui régissent l'évolution de l'opérateur densité partiel $\rho_S$ du système $S$, dépendent de l'état du système $B$ auquel il est couplé ; par exemple, si $B$ est un réservoir thermique, l'évolution de $S$ dépend de la température du réservoir.

### D-3. Equation pilote, forme de Lindblad

Nous supposons maintenant que l'interaction entre les deux systèmes est faible et, pour simplifier, nous ignorons leur évolution propre entre les instants $t = 0$ et $t = \tau$. L'opérateur d'évolution $U(0, \tau)$ est alors proche de 1, et le ket $|\Psi'\rangle$ n'est pas très différent de $|\Psi\rangle$. Si nous choisissons une base $\{|\Theta_q\rangle\}$ dont le premier vecteur est $|\Phi_0\rangle$, nous avons :

$$\left|\Psi'\right\rangle \simeq |\Psi\rangle = |\varphi_0\rangle \otimes |\Theta_0\rangle \tag{VII-68}$$

et la contribution de la valeur $q = 0$ domine donc dans (VII-56), avec $M_0 \simeq 1$. Nous écrivons alors $M_0$ sous la forme :

$$M_0 = 1 + J + iK \tag{VII-69}$$

avec les définitions suivantes de $J$ et $K$ :

$$J = \frac{M_0 + M_0^\dagger}{2} - 1 \quad ; \quad K = i\frac{M_0^\dagger - M_0}{2} \tag{VII-70}$$

Ce sont tous deux des opérateurs hermitiques, qui sont petits si l'interaction est faible. Au premier ordre par rapport à cette interaction, nous avons :

$$M_0^\dagger M_0 = 1 + 2J + ... \tag{VII-71}$$

et la contribution du terme $q = 0$ dans le membre de droite de (VII-67) est :

$$\rho_0 + [J, \rho_0]_+ + i\,[K, \rho_0] + ... \tag{VII-72}$$

où $[C, D]_+$ est l'anticommutateur $CD + DC$, alors que $[C, D]$ est le commutateur $CD - DC$.

Lorsque nous insérons (VII-71) dans (VII-58), nous obtenons :

$$1 + 2J + \sum_{q=1}^{N'-1} M_q^\dagger M_q = 1 \tag{VII-73}$$

ou encore :

$$J = -\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{N'-1} M_q^\dagger M_q \tag{VII-74}$$

Au premier ordre, nous pouvons donc écrire (VII-67) sous la forme :

$$\rho'_S - \rho_0 = i\,[K, \rho_0] + \sum_{q=1}^{N'-1} \left( M_q \rho_0 M_q^\dagger - \frac{1}{2} M_q^\dagger M_q \rho_0 - \frac{1}{2} \rho_0 M_q^\dagger M_q \right) \tag{VII-75}$$

où $\rho_0 = |\varphi_0\rangle \langle\varphi_0|$ est l'opérateur densité initial de $S$.

Supposons maintenant que $S$ interagisse successivement pendant le temps $dt$ avec $ndt$ systèmes $B$, tous identiques et initialement dans le même état $|\Phi_0\rangle$ (où $n$ a la dimension de l'inverse d'un temps). La variation $d\rho_S$ de $\rho_S$ pendant cet intervalle de temps est alors donnée par :

$$\frac{d\rho_S}{dt} = \frac{-i}{\hbar} [H_{\text{eff}}, \rho_S] + \sum_{q=1}^{N'-1} \left( L_q \rho_S L_q^\dagger - \frac{1}{2} L_q^\dagger L_q \rho_S - \frac{1}{2} \rho_S L_q^\dagger L_q \right) \tag{VII-76}$$

où $H_{\text{eff}}$ est un "hamiltonien effectif" agissant sur $S$ :

$$H_{\text{eff}} = -\hbar n K \tag{VII-77}$$

et $L_q$ un "opérateur de Lindblad" :

$$L_q = \sqrt{n} M_q \tag{VII-78}$$

L'équation différentielle (VII-76) est une "équation pilote" pour l'évolution de l'opérateur densité partiel $\rho_S$, dont le membre de droite possède une forme générale appelée "forme de Lindblad". Le nombre d'opérateurs de Lindblad ne peut dépasser, ni le carré de la dimension de l'espace des états du système test, ni la dimension du système couplé $B$.

Ce type d'équation pilote se rencontre dans un grand nombre de situations physiques. Il peut être généralisé de plusieurs façons :

(i) Si $S$ est initialement décrit par un opérateur densité $\rho_0$ correspondant à un mélange statistique, au lieu d'un état pur, on peut décomposer cet opérateur selon :

$$\rho_0 = \sum_m p_m \,|\varphi_0^m\rangle \langle\varphi_0^m| \tag{VII-79}$$

Le raisonnement ci-dessus s'applique alors à chaque composante $|\varphi_0^m\rangle\langle\varphi_0^m|$ de cet opérateur et conduit à (VII-75) avec $\rho_0$ remplacé par $|\varphi_0^m\rangle\langle\varphi_0^m|$. La linéarité implique alors que les équations (VII-75) et (VII-76) sont toujours valables.

(ii) Si $B$ est également décrit par un opérateur densité associé à un mélange statistique et si l'opérateur densité initial du système total est le produit de cet opérateur densité par $\rho_0$, le raisonnement n'est plus aussi direct du fait que les opérateurs $M_q$ dépendent de l'état initial $|\Phi_0\rangle$ de $B$. Toutefois, des formes de Lindblad peuvent toujours être obtenues dans ce cas (voir par exemple § 4.3 de [365]).

(iii) Nous avons supposé que le même système $S$ interagit successivement et pour un instant très court avec un grand nombre d'autres systèmes $B$. Une situation plus fréquente est celle où $S$ interagit constamment (mais faiblement) avec un seul système $B$, par exemple un réservoir thermique. Dans un tel cas, on peut encore obtenir des équations pilotes du même type, à condition que les temps de corrélation associés au système $B$ soient suffisamment courts. Physiquement, on comprend bien qu'un grand système avec des temps de corrélation courts soit équivalent à une série de systèmes physiques préparés indépendamment. Pour plus de détails, on pourra par exemple consulter le Chapitre IV de [366].

(iv) L'évolution propre des systèmes $S$ et $B$ peut être incluse dans l'équation pilote.

# Chapitre VIII

# Applications de l'intrication quantique

L'intrication quantique n'est pas seulement l'objet d'études fondamentales ; elle peut également être utilisée pour des applications. Dans ce chapitre, après avoir introduit deux théorèmes généraux qui sont utiles dans le contexte de cette discussion (§ A), nous proposons quelques exemples : la cryptographie quantique (§ B), la téléportation (§ C), le calcul et la simulation quantiques (§ D). Certes, pour le moment, seule la cryptographie quantique a réellement donné lieu à des applications, étant mise en œuvre de façon très concrète et même commerciale ; elle permet la distribution de clés cryptographiques entre plusieurs partenaires, grâce à un protocole où ce sont les lois fondamentales de la physique elles-mêmes qui garantissent qu'un espion est dans l'impossibilité totale d'intercepter la clé sans que les partenaires s'en rendent compte. Quant au calcul quantique, basé sur la manipulation générale de l'information quantique, c'est un domaine de recherche peut-être plus futuriste en termes d'applications, mais qui fait actuellement l'objet de travaux de recherche abondants et variés dans le monde entier.

En toute rigueur, il faut admettre qu'aucun de ces sujets n'apporte en soi de vue nouvelle sur l'interprétation de la mécanique quantique. Cependant, en plus de leur grand intérêt intrinsèque, ils fournissent une application très directe et particulièrement intéressante de ses principes de base, et c'est la raison pour laquelle nous les étudions dans ce chapitre, même si cela constitue un peu une digression. Nous nous contenterons donc de résumer les idées principales de façon assez brève ; le lecteur intéressé qui désire en savoir plus est invité à lire les références proposées.

## A. Deux théorèmes

Les deux théorèmes qui suivent sont quelque peu similaires ; le premier concerne la création et la duplication d'états quantiques, le second leur détermination.

### A-1. Non-clonage

La duplication d'un état quantique, souvent appelée "clonage quantique", est l'opération qui part d'une particule dans un état quantique arbitraire $|\varphi\rangle$ pour arriver à une situation où deux particules (ou plus) occupent ce même état $|\varphi\rangle$. Comme nous allons le voir, dans le cadre des lois de la mécanique quantique, il se trouve que cette opération est fondamentalement impossible, propriété qui est souvent appelée le "no-cloning theorem" [367, 368]. La démonstration fait intervenir la linéarité et l'unitarité de l'évolution du vecteur d'état (conservation de la norme du produit scalaire entre vecteurs d'état au cours de l'évolution).

Supposons que le système total étudié comporte :

– la "source" à dupliquer dans l'état normé $|\varphi\rangle$ ;

– la "cible", qui se trouve initialement dans l'état normé $|\xi_0\rangle$, et qu'il s'agit de transférer dans le même état $|\varphi\rangle$ que le premier (ce qui implique que la cible ait le même espace des états que la source, ou au moins un espace isomorphe) ;

– et enfin un environnement dont l'espace des états est quelconque et qui se trouve dans l'état initial normé $|\Phi_0\rangle$.

Nous voulons étudier l'éventualité que l'état du système total évolue depuis l'état initial :

$$|\varphi_i\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\xi_0\rangle \otimes |\Phi_0\rangle \tag{VIII-1}$$

vers un état final $|\Psi_f\rangle$ donné par :

$$|\Psi_f\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\varphi\rangle \otimes |\Phi_f(\varphi)\rangle \tag{VIII-2}$$

Considérons alors deux valeurs différentes $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$ de $|\varphi\rangle$, associées aux états initiaux $\left|\Psi_i^{(1)}\right\rangle$ et $\left|\Psi_i^{(2)}\right\rangle$ ; d'après (VIII-1) le produit scalaire de ces derniers est :

$$\left\langle \Psi_i^{(1)} \middle| \Psi_i^{(2)} \right\rangle = \langle \varphi_1 \, | \varphi_2 \rangle \tag{VIII-3}$$

Après évolution, ce produit scalaire doit devenir, d'après (VIII-2) :

$$\left\langle \Psi_f^{(1)} \middle| \Psi_f^{(2)} \right\rangle = [\langle \varphi_1 \, | \varphi_2 \rangle]^2 \, \langle \Phi_f(\varphi_1) \, | \Phi_f(\varphi_2) \rangle \tag{VIII-4}$$

Pour qu'il soit égal à (VIII-3), deux cas sont possibles :

– soit :

$$\langle \varphi_1 \, | \varphi_2 \rangle = 0 \tag{VIII-5}$$

– soit :

$$\langle\varphi_1\,|\varphi_2\rangle \times \langle\Phi_f(\varphi_1)\,|\Phi_f(\varphi_2)\rangle = 1 \qquad \text{(VIII-6)}$$

Si cette seconde possibilité est réalisée, puisque tous les kets de cette expression sont normés, chacun des deux produits scalaires de cette expression est en module inférieur ou égal à 1 (inégalité de Schwarz), l'égalité ne se produisant que si les vecteurs eux-mêmes sont égaux (moyennant un facteur de phase sans importance). La relation (VIII-6) implique donc à la fois que $|\varphi_1\rangle = |\varphi_2\rangle$ et $|\Phi_f(\varphi_1)\rangle = |\Phi_f(\varphi_2)\rangle$, alors que nous avons supposé les états $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$ différents. Nous aboutissons donc à une contradiction, ce qui signifie que c'est l'autre possibilité qui est réalisée : le produit scalaire $\langle\varphi_1\,|\varphi_2\rangle$ est nécessairement nul. Pour finir, du fait de la condition d'unitarité, si le clonage est possible pour un état $|\varphi_1\rangle$, les seuls autres états $|\varphi_2\rangle$ qui peuvent être clonés sont des états orthogonaux ; il est impossible pour des combinaisons linéaires quelconques d'états de la source.

Si maintenant nous renonçons à l'une des hypothèses, à savoir que l'état $|\varphi\rangle$ reste invariant dans tout le processus, le clonage devient-il alors possible ? Nous supposons maintenant que, au lieu de mettre deux systèmes dans l'état initial $|\varphi\rangle$ de la source, le processus les met tous les deux dans un autre état $|\overline{\varphi}\rangle$ qui est une fonction de $|\varphi\rangle$ donnée par :

$$|\overline{\varphi}\rangle = \overline{U}\,|\varphi\rangle \qquad \text{(VIII-7)}$$

où $\overline{U}$ est un opérateur unitaire. L'équation (VIII-2) devient alors :

$$|\Psi_f\rangle = |\overline{\varphi}\rangle \otimes |\overline{\varphi}\rangle \otimes |\Phi_f(\varphi)\rangle \qquad \text{(VIII-8)}$$

Après tout, ce serait également une sorte utile de clonage, puisque connaissant l'état $|\overline{\varphi}\rangle$ l'on peut toujours remonter à $|\varphi\rangle$. Mais ce processus est tout aussi interdit par les règles de la mécanique quantique. En effet, si l'on applique le même raisonnement que plus haut à l'opérateur unitaire obtenu en multipliant l'opérateur d'évolution par le produit $\overline{U}^{-1}(\text{source}) \times \overline{U}^{-1}(\text{cible})$, on arrive aux mêmes équations et donc aux mêmes contradictions. Ainsi, abandonner l'invariance de l'état source ne facilite en rien le processus.

S'il est impossible de cloner exactement des états, peut-on au moins le faire de façon approchée ? L'argument qui suit montre que c'est tout aussi impossible. En effet, sans imposer l'égalité stricte de (VIII-2) pour l'état final, écrivons maintenant la condition plus faible :

$$|\Psi_f\rangle = |\overline{\varphi}\rangle \otimes |\widetilde{\varphi}\rangle \otimes |\Phi_f(\varphi)\rangle \qquad \text{(VIII-9)}$$

où $|\overline{\varphi}\rangle$ et $|\widetilde{\varphi}\rangle$ sont de bonnes approximations de l'état initial cible $|\varphi\rangle$. La condition de conservation du produit scalaire donne alors :

$$\langle\varphi_1\,|\varphi_2\rangle = \langle\overline{\varphi}_1\,|\overline{\varphi}_2\rangle\,\langle\widetilde{\varphi}_1\,|\widetilde{\varphi}_2\rangle\,\langle\Phi_f(\varphi_1)\,|\Phi_f(\varphi_2)\rangle \qquad \text{(VIII-10)}$$

Comme $\langle\overline{\varphi}_1\,|\overline{\varphi}_2\rangle \simeq \langle\varphi_1\,|\varphi_2\rangle$, on a nécessairement :

– soit :

$$\langle\varphi_1\,|\varphi_2\rangle \simeq 0 \tag{VIII-11}$$

– soit :

$$\langle\widetilde{\varphi}_1\,|\widetilde{\varphi}_2\rangle \times \langle\Phi_f(\varphi_1)\,|\Phi_f(\varphi_2)\rangle \simeq 1 \tag{VIII-12}$$

qui entraîne que $\langle\widetilde{\varphi}_1\,|\widetilde{\varphi}_2\rangle \simeq 1$ et, par symétrie, que $\langle\overline{\varphi}_1\,|\overline{\varphi}_2\rangle \simeq 1$. Ainsi, les états approximativement clonés sont, soit presque orthogonaux, soit presque identiques ; à nouveau, des combinaisons linéaires arbitraires ne peuvent pas être clonées.

### A-2. Non-détermination d'un état avec une seule réalisation

Un théorème similaire est le suivant : étant donné un système quantique unique dans un état $|\varphi\rangle$, il est impossible de déterminer exactement $|\varphi\rangle$ en utilisant une séquence quelconque de mesures. En effet, quelle que soit la première mesure effectuée sur le système, l'information fournie par la connaissance du résultat se limite au fait que $|\varphi\rangle$ n'est pas orthogonal à l'état propre de mesure correspondant ; une probabilité ne peut être obtenue à partir d'une seule mesure. De plus, aucune information n'est obtenue sur les phases relatives des composantes de $|\varphi\rangle$ sur les différents vecteurs propres. Il serait donc nécessaire d'effectuer des mesures supplémentaires pour connaître $|\varphi\rangle$. Mais l'état quantique du système a été modifié par la première mesure (postulat de projection du vecteur d'état), de sorte que des mesures ultérieures n'ont plus accès qu'à cet état modifié, ce qui rend impossible la détermination précise de l'état initial $|\varphi\rangle$.

Ce théorème est d'ailleurs nécessaire pour assurer la cohérence avec le théorème du non-clonage : si l'on pouvait déterminer l'état $|\varphi\rangle$ avec une précision arbitraire, on pourrait ensuite construire un filtre (appareil de Stern et Gerlach pour des spins) qui mettrait ainsi un nombre arbitraire de particules dans l'état initial $|\varphi\rangle$, en violation avec le théorème du non-clonage.

Le théorème de non-détermination n'est valable que si une seule réalisation du système quantique est donnée ; si de nombreuses copies du même système dans l'état $|\varphi\rangle$ sont disponibles, il devient alors possible de déterminer cet état de façon d'autant plus précise que le nombre de copies est grand. Plusieurs méthodes ont été proposées, en particulier la "tomographie quantique", qui met en œuvre des mesures successives d'observables incompatibles avec plusieurs réalisations du même état quantique, suivie d'une reconstruction mathématique de l'état initial le plus probable [369–371] ; elle a été utilisée dans de nombreuses expériences. Voir aussi la discussion du Chapitre 15 de la Ref. [372] et la méthode appelée "mesures quantiques faibles" (§ C-1 du Chapitre IX) [373, 374], qui a permis la détermination de la fonction d'onde de photons uniques par l'utilisation de petites lames biréfringentes, d'un filtre de Fourier et de mesures de polarisation [375].

Un résultat théorique intéressant, relié à ce théorème, est le suivant : lorsque plusieurs copies du système initial décrit par un même opérateur densité $\rho$ (état pur ou mélange statistique) sont disponibles, il n'est pas nécessaire d'effectuer de nombreux types de mesures différentes : l'utilisation d'un appareillage de mesure unique permet la détermination parfaite d'un état quantique (pur ou mélange statistique donné par un opérateur densité $\rho$), pourvu qu'un système quantique auxiliaire plus grand interagisse de façon contrôlée avec le système à déterminer [376]. A la fin du processus, on mesure une observable factorisée unique faisant intervenir les deux systèmes. L'interaction avec le système auxiliaire (parfois appelé "ancilla") permet donc de transformer l'information associée à des opérateurs ne commutant pas dans l'espace du système initial en une information commutative pour l'ensemble des deux systèmes.

### A-3. Conséquences en termes de transmission de signaux

Si le clonage d'états était possible dans une expérience EPR, il deviendrait possible pour Bob de l'appliquer à la particule qu'il reçoit après qu'Alice ait effectué une mesure selon la direction $a$. Comme sa particule est également polarisée selon cette direction, s'il disposait de copies multiples il pourrait en déterminer l'état de polarisation avec précision et donc connaître $a$. Un tel schéma permettrait de transmettre à distance de l'information concernant la direction $a$ choisie, sans le délai minimal proportionnel à la distance imposée par la relativité, en contradiction avec elle. Heureusement pour la cohérence de la physique, il n'en est rien ! L'impossibilité du clonage est donc essentielle pour assurer la compatibilité entre mécaniqe quantique et relativité. L'Appendice F propose une discussion plus détaillée de cette impossibilité, même si par exemple l'expérience est répétée un grand nombre de fois. Voir [377] pour une discussion historique du théorème de non-clonage, et [378] pour une étude du clonage multiple.

## B. Cryptographie quantique

Contrairement à ce que pourrait laisser croire son nom, la cryptographie quantique n'est pas une méthode de cryptographie qui permettrait de coder ou décoder des messages secrets par des méthodes quantiques ; c'est en fait une méthode qui concerne uniquement la transmission entre deux partenaires de clés de codage cryptographique par l'intermédiaire de systèmes quantiques, l'utilisation ultérieure de cette clé restant classique. On utilise d'ailleurs également pour la désigner la dénomination plus précise "distribution quantique de clé" (ou "quantum key distribution" en anglais).

### B-1. Distribution de clés cryptographiques

Il s'agit donc de mettre à profit les propriétés spécifiques de la mécanique quantique pour assurer la transmission à distance de clés cryptographiques sans risque d'interception. La méthode se décline en plusieurs versions, soit utilisant la transmission de séries de particules uniques [379] comme dans le protocole BB84, soit celle de plusieurs particules corrélées, typiquement dans un état EPR [380, 381]. Pour une introduction générale, voir [382] et, pour une revue avec plus de détails, voir [383].

L'idée de base est de construire un schéma permettant la transmission à distance parfaitement sécurisée d'une clé cryptographique – une telle clé est une séquence aléatoire de 0 et de 1 utilisée pour coder, puis ensuite décoder, un message devant rester secret. Dans une première étape, les deux correspondants éloignés Alice et Bob partagent en commun cette clé ; ensuite ils l'utilisent pour coder[1] et décoder tous les messages qu'ils doivent échanger ultérieurement. Si la clé est parfaitement aléatoire et si chacun de ses éléments n'est utilisé qu'une seule fois (ce qui implique que la clé doit être aussi longue que les messages eux-mêmes), il devient totalement impossible de décoder un message sans connaître la clé ; c'est vrai même si la version codée est envoyée de façon publique. Mais le risque est que, durant le processus initial de communication de la clé, un espion (traditionnellement appelé Ève à cause du mot anglais "eavesdropping", "procéder à des écoutes") réussisse à l'intercepter pour en prendre connaissance ; à partir de ce moment, il/elle sera capable de décoder les messages envoyés avec cette clé. L'échange de clés est donc une étape particulièrement délicate. La stratégie habituelle est d'utiliser au mieux les méthodes classiques de confidentialité : stockage dans un coffre-fort, transport sécurisé, etc., mais il est toujours difficile d'évaluer la sécurité réelle de telles méthodes, où interviennent beaucoup de facteurs humains.

En revanche, le partage quantique de clés se base sur des lois physiques fondamentales qui sont impossibles à violer : si habiles et inventifs que soient les espions, jamais ils ne pourront violer les lois de la mécanique quantique ! L'idée de base est qu'Alice et Bob vont créer leur clé cryptographique commune en effectuant des mesures quantiques, par exemple sur des particules dans des états corrélés EPR ; ils obtiennent ainsi des séries de nombres aléatoires communs qu'ils peuvent ensuite utiliser comme clé secrète de communication. Que se produit-il alors si Ève tente d'intercepter les photons échangés par Alice et Bob durant la création de la clé, par exemple en couplant un sys-

[1] La méthode la plus simple est d'écrire le message en clair avec un codage binaire des caractères, puis d'effectuer une somme binaire de chaque bit du message avec le bit de la clé de même rang ; le résultat, qui apparaît alors comme une suite totalement aléatoire et donc illisible, est envoyé par Alice à Bob. Il suffit ensuite à ce dernier d'effectuer sur la chaîne de bits qu'il reçoit une seconde fois la même somme binaire pour rétablir le message initial.

tème optique très élaboré à la fibre qui court entre Alice et Bob, et en faisant des mesures ? Si Ève absorbe les photons qu'elle mesure, elle change immédiatement les propriétés de corrélations que peuvent observer Alice et Bob, et la tentative d'espionnage est immédiatement détectable. Cette prise de conscience ne fait pas nécessairement cesser la tentative d'espionnage, mais au moins Alice et Bob savent quelles données ont été perturbées et peuvent n'utiliser que les autres comme clé cryptographique parfaitement sûre.

### B-2. Exemples de protocoles d'échange de clés

La cryptographie quantique est devenue un grand domaine de recherche, varié et actif. Il a été proposé toute une série de schémas et de protocoles possibles, dont certains font usage d'événements à une seule particule comme dans le protocole BB84 [379], d'autres mettant en jeu plusieurs particules intriquées dans un état EPR [380, 381]. Pour une introduction générale, voir [382] ; pour une revue plus détaillée, voir [383]. Certains de ces schémas ont été mis en pratique de façon très concrète, permettant des distributions de clés sur des distances dépassant 100 km. Nous nous limiterons ici à la présentation de quelques exemples.

#### B-2-a. Protocole BB84

Supposons qu'Alice envoie à Bob des photons un par un, soit dans l'état $|H\rangle$ de polarisation horizontale pour signaler un bit de la clé égal à 0, soit dans l'état $|V\rangle$ de polarisation verticale pour signaler un bit égal à 1 (Fig. VIII.1). Bob, mesurant la polarisation des photons qu'il reçoit, peut reconstruire la clé, mais dans ce cas il n'existe aucune garantie que cette clé n'ait pas été interceptée en chemin par Ève. En effet cette dernière peut, dans son laboratoire le long de la ligne de transmission, effectuer la même mesure que Bob ; ceci la conduit à absorber le photon envoyé par Alice, mais elle a la possibilité de renvoyer ensuite un autre photon sur la ligne de communication avec la polarisation qu'elle vient de mesurer. Bob reçoit alors exactement les mêmes signaux qu'en l'absence d'intervention de Ève, sans que lui ni Alice ne puissent se rendre compte qu'ils sont espionnés.

Le protocole BB84 (pour Bennett et Brasssard, 1984 [379]) permet de s'affranchir de ce risque. Il met en jeu l'utilisation de deux bases différentes pour les polarisations, celle déjà mentionnée des deux états $|H\rangle$ et $|V\rangle$, et en plus une base de deux nouveaux états :

$$\begin{aligned} |A\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[|H\rangle + |V\rangle\right] \\ |B\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left[|H\rangle - |V\rangle\right] \end{aligned} \qquad \text{(VIII-13)}$$

correspondant aux deux polarisations linéaires à $\pm 45°$ des polarisations $|H\rangle$ et $|V\rangle$. Par convention, $|H\rangle$ et $|A\rangle$ sont associés à un bit de la clé égal à 0,

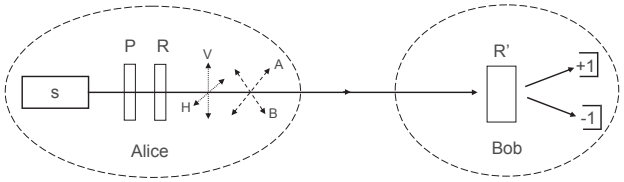


FIGURE *VIII.1 – Schéma du protocole BB84 d'échange sécurisé d'une clé cryptographique. Alice envoie à Bob des photons un par un, et pour chacun d'entre eux choisit au hasard la polarisation parmi quatre possibilités : H (horizontal), V (vertical), A (première diagonale à 45°) et B (seconde diagonale à -45°). Elle utilise pour cela deux dispositifs optiques P et R qui produisent ces quatre polarisations. Par convention, H et A correspondent à un bit 0, V et B à un bit 1. De son côté, Bob utilise un système analyseur de polarisations R' qui lui permet de choisir au hasard la paire de polarisations, (H,V) ou (A,B), selon laquelle il effectue chaque mesure ; il obtient ensuite un résultat* $\pm 1$*. L'extraction d'une clé cryptographique secrète à partir de ces résultats est discutée dans le texte et résumée dans la Figure VIII.2.*

et $|V\rangle$ et $|B\rangle$ à un bit égal à 1 (on pourrait choisir toute autre convention associant 0 à un état de chaque base, puis 1 aux deux autres états).

Un point crucial est qu'Alice doit choisir totalement au hasard d'utiliser pour chaque bit, soit la base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$, soit la base $\{|A\rangle, |B\rangle\}$, lorsqu'elle envoie la clé. De son côté, Bob choisit également au hasard sa direction d'analyse, de sorte qu'une fois sur deux sa base diffère de celle d'Alice ; on voit alors sur (VIII-13) que les deux résultats qu'il peut mesurer ont tous deux la même probabilité 1/2, indépendamment du bit choisi par Alice, de sorte qu'aucune information ne lui parvient. Mais si par chance il a choisi la même base, l'information est effectivement contenue dans la mesure qu'il effectue. Le protocole comprend donc, dans un premier temps, l'envoi de particules entre Alice et Bob et, seulement ensuite (et c'est essentiel pour que la sécurité soit assurée) un échange public (c'est-à-dire non nécessairement secret) d'information entre Alice et Bob, qui se communiquent l'information sur la base utilisée par chacun d'eux. Bien sûr, ils ne communiquent rien concernant les résultats observés, sinon la confidentialité serait perdue ! Cet

échange permet à Bob de ne retenir que les bits mesurés dans le cas où les bases sont les mêmes, et de rejeter les autres mesures comme inutiles. Ce sont alors les bits retenus qui constituent la clé secrète, dont le nombre est proche de la moitié du nombre de particules envoyées par Alice (si ce nombre est grand). Cette méthode peut sembler compliquée, mais nous allons voir qu'elle assure que toute interception des données devient ainsi détectable par Alice et Bob.

| Polarisations d'Alice | V | A | V | H | B | B | H | V |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Bits envoyés | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| Directions d'analyse de Bob | ✥ | ✕ | ✕ | ✥ | ✥ | ✕ | ✕ | ✥ |
| Résultats de Bob | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| Bits de la clé commune | 1 | 0 | | 0 | | 1 | | 1 |

FIGURE *VIII.2 – Série d'événements typiques dans une expérience d'échange de clé cryptographique. Alice envoie des photons en choisissant au hasard parmi les quatre polarisations H,V, A, et B ; ensuite Bob mesure la polarisation qu'il détecte en choisissant, soit la base (H,V), soit la base (A,B). Une fois la série de mesures terminée, tous deux se communiquent publiquement le choix de leur base pour chaque paire, mais pas les résultats. La clé cryptographique commune est obtenue en ne retenant que les résultats où il s'est trouvé que les bases sont les mêmes ; tous les résultats pour lesquels les bases sont différentes sont rejetés. Dans le cas représenté, la clé ainsi obtenue n'a que 5 bits, mais il suffit de répéter l'expérience autant de fois que nécessaire pour obtenir une clé de longueur arbitraire.*

En effet, que peut faire Ève pour tenter d'intercepter de l'information ? Pendant que les photons se propagent entre Alice et Bob, elle peut essayer de les capter un par un et d'effectuer la mesure de leurs polarisations ; pour

passer inaperçue, à chaque interception elle renvoie vers Bob une particule de même polarisation. Mais, au moment du transfert des particules quantiques (avant communication des bases entre Alice et Bob), aucune information n'est disponible sur la polarisation utilisée par Alice, de sorte qu'Ève ne sait pas si elle doit effectuer l'analyse selon la base $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ ou la base $\{|A\rangle, |B\rangle\}$ ; nous avons vu au § A qu'il lui est impossible de déterminer l'état quantique d'une particule unique, et que de plus le théorème du non-clonage lui interdit de pouvoir multiplier la particule reçue en plusieurs particules dans le même état. Pour finir, tout comme Bob, Ève a une chance sur deux de se tromper de base. Si par exemple Alice a utilisé la première et Ève la seconde, cette dernière recevra un état $|H\rangle$ ou $|V\rangle$ mais renverra une particule dans l'un des états $|A\rangle$ ou $|B\rangle$, ce qui perturbe le flux de particules reçues par Bob et peut créer des anomalies visibles. Comme il y a une chance sur deux qu'Ève se trompe de base, et ensuite une chance sur deux que cela entraîne une perturbation du résultat observé par Bob, c'est au total dans 25 % des cas que la perturbation créée par Alice se traduit par une telle anomalie.

La stratégie d'Alice et Bob est donc de sacrifier un certain nombre des bits obtenus lorsque les bases coïncident, de se les communiquer publiquement, ce qui leur permet de vérifier qu'ils sont bien identiques comme attendu (Fig. VIII.2) ; peu importe qu'Ève intercepte alors la valeur de ces bits sacrifiés, puisqu'ils ne seront plus utilisés. Alice et Bob comparent leurs résultats et, s'ils diffèrent de 25 % environ, c'est que quelqu'un est en train de s'interposer dans leur communication. Ainsi, tout ce que Ève peut faire pour obtenir de l'information modifie inévitablement les propriétés de corrélation des photons observées aux deux extrémités du canal de communication. Alice et Bob peuvent donc se rendre compte de la tentative d'intrusion – en supposant évidemment qu'ils comparent soigneusement leurs données et les taux de corrélation.

Bien sûr, notre discussion est simplifiée et se limite aux principes généraux. Dans la pratique, même lorsqu'Alice et Bob utilisent la même base et en l'absence d'Ève, la coïncidence entre leurs résultats n'est pas parfaite, à cause de diverses perturbations qui peuvent se produire lors de la propagation et lors des mesures. Si le taux des erreurs introduites ne dépasse par une certaine valeur, on peut alors parfaitement avoir recours à toutes les techniques habituelles mettant en œuvre les codes classiques de corrections d'erreur (comme ceux qui servent lors de la lecture des CD ou des disques durs d'ordinateurs, par exemple des contrôles de parité) ; on réduit alors encore un peu la taille de la clé, mais on élimine efficacement des erreurs aléatoires. Pour une discussion des diverses méthodes d'amplification de la confidentialité ("privacy amplification" et "quantum secret growing" en anglais), nous renvoyons à la Ref. [383].

Le schéma fonctionne en principe avec des particules quantiques quelconques mais, en pratique, ce sont généralement des photons se propageant

dans des fibres optiques. Or ces dernières modifient la polarisation des photons, au risque de détruire les corrélations utilisées dans la transmission de la clé. Pour résoudre ce problème, Bennett [384] a proposé une autre technique mettant en jeu une résolution temporelle, et où Alice et Bob font chacun usage d'un interféromètre de Mach-Zhender muni d'un réglage de phase ajustable dans un bras. Chaque photon émis dans le laboratoire d'Alice peut atteindre les détecteurs de Bob via plusieurs chemins quantiques, dont deux interfèrent dans l'impulsion temporelle qu'il mesure. L'effet d'interférence quantique qui se produit alors est très similaire à l'interférence entre deux polarisations différentes dans le schéma précédent ; un protocole analogue se basant sur des mesures quantiques associées à des opérateurs ne commutant pas peut être utilisé pour transmettre des clés cryptographiques. Ce schéma a été mis en pratique avec succès dans une expérience en 1993 [385] et continue à être utilisé.

#### B-2-b. Protocole EPR

Dans le protocole précédent, les particules quantiques transmettant l'information sont envoyées par l'un des deux partenaires et reçues par l'autre. Il est également possible d'imaginer des protocoles plus symétriques où tous deux reçoivent des particules appartenant à des paires émises par une source commune. Un cas particulièrement intéressant sur le plan conceptuel est celui où ces paires se trouvent dans un état intriqué comme celui utilisé dans le schéma de Bell, ce qui permet de faire un lien entre la complétude de la mécanique quantique (ou sa non-localité) et la distribution quantique de clés [380]. Pour mettre en avant la similarité avec la discussion du § A du Chapitre IV des inégalités de Bell, nous revenons au cas de deux particules de spin 1/2 initialement dans l'état singulet écrit en (IV-1) – mais la discussion en termes de polarisations verticales ou inclinées de photons serait semblable.

Le protocole à utiliser dans ce cas est relativement similaire au protocole BB84 ; il fait également jouer un rôle central à un choix aléatoire de bases, mais cette fois ce sont à la fois Alice et Bob qui font des choix complètement aléatoires des composantes des spins qu'ils mesurent. On peut par exemple supposer qu'ils se limitent à deux directions de mesure, soit le long d'un axe $Oz$, soit le long d'un axe perpendiculaire $Ox$. Comme précédemment, deux situations peuvent se produire : soit ils font des choix différents, et leurs résultats n'ont aucune corrélation ; soit ils font le même choix et, pour une expérience idéale, les corrélations sont parfaites. Ici aussi, ce n'est qu'après la réception de l'ensemble des particules et la fin de leurs mesures qu'Alice et Bob communiquent entre eux (de façon non nécessairement confidentielle) pour s'informer mutuellement des choix faits pour les directions de mesure (mais pas des résultats qui restent secrets). Seuls sont retenus par chacun

des deux partenaires les résultats de mesures où il se trouve que les deux choix de directions de mesure ont coïncidé. Avec ce protocole, souvent appelé "protocole EPR", la clé cryptographique extraite par Alice et Bob de leurs mesures est totalement aléatoire : aucun d'entre eux ne peut imposer la suite de bits constituant la clé (alors que, dans le protocole BB84, Alice pourrait la choisir), mais cela n'affecte en rien son utilisation dans la transmission ultérieure de messages.

La discussion des possibilités d'intrusion par Ève est du même type que plus haut : comme Ève ne sait pas quelle base sera utilisée par Alice et Bob, toute intervention de sa part implique une probabilité importante de modifier les corrélations entre les polarisations des spins observées par les deux partenaires dans les cas où ils ont choisi la même base. Plus précisément, au moment où Ève effectue une mesure sur un des spins et trouve un résultat, l'autre spin est projeté dans un état propre selon la direction de mesure qu'elle a choisie, avec la valeur propre opposée. Si Ève renvoie sur la ligne un second spin ayant la polarisation correspondant à son résultat de mesure, et si par hasard Alice et Bob choisissent une direction d'analyse parallèle à celle d'Ève, ils vont constater une anti-corrélation parfaite de leurs résultats, comme si de rien n'était : l'intervention d'Ève n'est pas visible. En revanche, si par hasard ils choisissent une direction commune perpendiculaire à celle d'Ève, il apparaît une chance sur deux pour qu'ils observent le même résultat, ce qui serait impossible sans la perturbation imposée par Ève ; un taux d'erreur de 25% s'introduit alors. Ainsi, si Alice et Bob décident de sacrifier une fraction de leurs résultats à une vérification de l'absence de toute perturbation, comme dans le protocole BB84, ils peuvent aisément s'assurer de la confidentialité de leur communication.

De plus, ils peuvent utiliser un éventail plus varié de directions de mesures, en particulier celles qui conduisent à une violation quantique des inégalités BCHSH [135] ; ceci fournit un autre test qui leur permet de vérifier qu'aucune intervention sur les deux spins n'a été faite entre les sources et les deux régions de mesure. En effet, la direction choisie par Ève et le résultat qu'elle observe jouent un rôle semblable à la variable supplémentaire $\lambda$, qui ici détermine la polarisation des particules reçues par les deux partenaires ; les moyennes sur cette variable conduisent tout naturellement aux inégalités BCHSH (on tombe en fait ici sur le cas précis étudié dans l'Appendice C). Si donc Alice et Bob vérifient qu'ils sont capables d'obtenir des résultats qui conduisent à des violations des inégalités, ils vérifient en quelque sorte que personne n'a projeté entre temps la polarisation de leurs photons sur une direction donnée, et donc la confidentialité de la transmission. On voit ainsi apparaître un lien intéressant entre le théorème de Bell et la cryptographie quantique.

Sur le plan conceptuel, le protocole EPR reste cependant assez différent du protocole BB84 puisque, au moment où Ève peut tenter son intrusion dans

le système, l'information qui sera utilisée par Alice et Bob pour construire leur clé n'existe toujours pas : tous les résultats possibles de toutes les composantes des spins sont toujours potentiellement présents dans l'état intriqué singulet, puisqu'aucune mesure n'a encore été effectuée – en d'autres termes l'information utile n'existe pas encore. Nous l'avons vu, si Ève s'interpose, c'est elle en quelque sorte qui prend la responsabilité de projeter le vecteur d'état et d'attribuer des polarisations définies aux spins ; on comprend assez aisément que cette opération soit détectable par Alice et Bob.

On peut aller encore plus loin dans cette direction et envisager un schéma ou, pour les événements utiles à la construction de la clé, aucune particule ne se propage dans la ligne de transmission où Ève pourrait s'interposer ; il a déjà été discuté brièvement à la fin du § D du Chapitre II – voir aussi la Ref. [83]. Il s'agit d'un protocole mettant en jeu des mesures ne concernant qu'une seule particule ; la construction de la clé se fait à partir des événements où la particule est restée localisée dans le laboratoire d'Alice, de sorte qu'elle ne s'est jamais propagée entre les laboratoires d'Alice et Bob, à cause d'un effet d'interférence destructive. C'est un cas extrême où, pour les événements retenus dans la distribution de la clé, aucune particule ne se propage entre les partenaires, ce qui interdit évidemment à Ève toute intervention.

Ceci ne clôt pas la liste des protocoles possibles pour la distribution quantique de clés cryptographiques. Il est possible par exemple d'utiliser des protocoles mettant en jeu six états quantiques, ou des systèmes quantiques individuels dont la dimension de l'espace des états est plus grande que 2 ; à nouveau nous renvoyons à l'article de revue [383] pour plus de détails.

## C. Téléportation d'un état quantique

La notion de téléportation quantique [386] est également liée à la non-localité quantique. L'idée est d'exploiter les corrélations entre deux particules intriquées, qui sont par exemple initialement dans l'état écrit en (VI-16) (pour $N = 2$), de façon à reproduire à distance l'état de spin arbitraire d'une troisième particule. Le scénario est le suivant (Fig. VIII.3) : initialement, les deux particules intriquées se propagent vers deux régions éloignées de l'espace ; l'une d'entre elles atteint le laboratoire d'Alice, alors que l'autre atteint celui de Bob ; une troisième particule dans un état arbitraire $|\varphi\rangle$ est alors fournie à Alice dans son laboratoire ; le but final de ce scénario est de mettre la particule de Bob exactement dans le même état $|\varphi\rangle$, quel qu'il soit (sans, bien sûr, transporter la particule elle-même). On dit alors que l'état $|\varphi\rangle$ a été téléporté.

Quelle procédure peut conduire à une telle téléportation ? Naïvement, on pourrait penser que la meilleure stratégie pour Alice serait d'effectuer une mesure sur la particule dans l'état $|\varphi\rangle$ à téléporter, mais ce n'est pas le cas. On peut montrer qu'il est plus efficace d'effectuer une "mesure com-

binée" concernant à la fois cette particule ainsi que sa particule de la paire intriquée. De plus, une condition essentielle pour que la téléportation fonctionne est qu'aucune distinction ne soit possible entre les deux particules utilisées par Alice. Avec des photons elle peut par exemple, comme dans la Ref. [387], diriger les particules en question sur les deux faces d'entrée d'une lame séparatrice, et mesurer en sortie de chaque côté combien de photons sont réfléchis ou transmis ; ce dispositif ne permet effectivement pas de savoir de quelle direction initiale venaient les photons détectés, de sorte que la condition essentielle est remplie. Alors Alice communique à Bob le résultat de sa mesure ; cette communication peut se faire par un canal classique tel que téléphone, courrier électronique, etc., en d'autres termes par une méthode qui n'est pas instantanée mais soumise à la limitation provenant de la vitesse finie de la lumière. Pour finir, Bob modifie l'état de sa particule en lui appliquant une transformation unitaire qui dépend de l'information qu'il a reçue. L'opération met alors sa propre particule exactement dans le même état $|\varphi\rangle$ que l'état initial de la troisième particule, ce qui finalement réalise la "téléportation" de l'état. Il s'agit d'un scénario "mixte" nécessitant la combinaison d'une transmission d'information quantique (par la paire intriquée) et de l'information classique (l'appel téléphonique d'Alice à Bob). Nous ne discutons ici que les idées générales, sans donner les calculs qui permettent de comprendre comment opère le processus de mesure sur le vecteur d'état et de calculer précisément quelle opération unitaire Bob doit appliquer, même s'ils ne sont pas très compliqués. On en trouvera une description plus détaillée dans la référence originale [386], ou par exemple dans le § 9.8 de [388], ou encore dans le § 6.5.3 de [389].

La téléportation peut paraître soit magique, soit triviale, selon la façon dont on la regarde. La possibilité de reproduire à distance un état quantique à partir d'une information classique n'est pas en soi une surprise. Si par exemple nous supposons qu'Alice puisse décider de l'état à téléporter, et donc qu'elle filtre le spin (elle envoie des particules à travers un aimant de Stern et Gerlach[2] jusqu'à ce qu'elle obtienne un résultat $+1$ ) ; elle pourrait alors dire à Bob au téléphone d'aligner son filtre de Stern et Gerlach dans la même direction, et répéter l'expérience jusqu'à ce qu'il obtienne un résultat $+1$. La téléportation serait ainsi réalisée de façon triviale, simplement par la transmission d'information classique. Mais la véritable téléportation quantique est bien plus que cela ! En premier lieu, l'état qui est transporté n'est pas nécessairement choisi par Alice, mais peut être totalement arbitraire et

[2]Pour filtrer un état de spin, il est évident que l'on a besoin d'utiliser une méthode non destructive dans la détection de la particule après l'aimant de Stern et Gerlach. On pourrait par exemple imaginer un schéma de détection laser, conçu de façon que l'atome passe par un état excité et émette alors un photon en retournant vers son état fondamental de départ (cycle de pompage optique fermé, ce qui est possible par un choix approprié de la transition atomique et de la polarisation du laser).

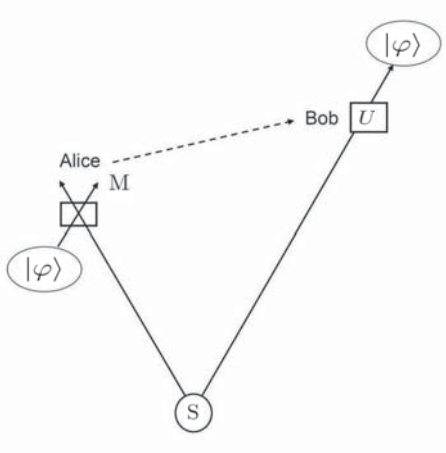


FIGURE *VIII.3 – Une source S émet deux particules de spin 1/2 intriquées, qui se propagent vers Alice et Bob. Alice reçoit en plus une particule de spin 1/2 qui se trouve dans un état arbitraire* $|\varphi\rangle$*, qu'elle ne connaît pas. Elle effectue alors une mesure M qui met en jeu à la fois cette particule et l'une des particules de la paire émise par S. Ensuite elle envoie un message à Bob pour lui communiquer le résultat de son expérience (deux bits d'information classique). Bob fait usage de cette information pour effectuer sur sa particule une transformation unitaire qui lui permet de transférer sa particule exactement dans le même état que la particule lointaine fournie à Alice. Ce proccessus est souvent appelé "téléportation quantique".*

inconnu d'elle. En second lieu, le message envoyé ne contient que deux bits[3] d'information binaire classique (le résultat de l'expérience combinée faite par Alice), ce qui ne procure pas suffisamment d'information pour reconstruire un état quantique (un état quantique dépend de paramètres continus). En un certain sens, le processus de téléportation a réussi à transformer une information binaire finie en une information continue ! Cette dernière, en théorie classique de l'information, correspondrait à un nombre infini de bits.

Du point de vue de Bob, l'information reçue comprend deux composantes : de l'information classique envoyée par Alice, dont le contenu n'est pas décidé par elle, mais décrit le résultat aléatoire d'une expérience ; de l'information quantique contenue dans l'état téléporté (que nous appelons

[3] Alice peut observer quatre résultats différents avec son expérience sur deux particules.

"qubit" dans le § suivant), qui peut être contrôlée par elle. Si la téléportation est répétée un grand nombre de fois sur le même état préparé par Alice, grâce à des mesures successives Bob pourra déterminer l'état quantique avec une précision arbitraire, donc la direction qui a été choisie par Alice ; il reçoit de sa part un message réel (pour une discussion de la stratégie optimale que Bob devrait utiliser, voir Ref. [390]).

Ainsi, si l'on veut présenter la téléportation d'une façon sensationnelle, on peut expliquer que, avant même que Bob ne reçoive l'information classique, il a déjà reçu "presque toute l'information" sur l'état quantique, et de plus toute l'information contrôlable (le contenu du message classique est totalement aléatoire) ; cette "information" lui est parvenue de façon instantanée, exactement au moment où Alice a effectué sa mesure combinée, sans aucun retard qui soit proportionnel à la distance parcourue. Le reste de cette information, la différence entre une information continue et une information discrète, ne vient qu'ensuite, puisqu'il est soumis au retard minimal de transmission imposé par la relativité. Mais tout ce raisonnement fait intervenir une notion intuitive de "différence entre l'information quantique contrôlable et l'information classique non contrôlable" que nous n'avons pas définie de façon précise ; inutile de dire que cela n'implique aucune violation des principes de base de la relativité !

Pour finir, est-ce que véritablement "quelque chose" a été transporté dans la téléportation, ou seulement de l'information ? Ce qui est parfaitement clair est que ce qui est transporté est un état quantique, pas une particule. L'essence même du processus de téléportation est totalement différente d'aucun scénario imaginable pour la communication classique entre des êtres humains. La relation entre la téléportation quantique et les expériences de non-localité de Bell est discutée dans [391] ; voir aussi [392] ainsi que [393] pour une revue de résultats récents, et [394] pour une expérience de téléportation d'un état GHZ à N photons grâce à une seule paire de particules intriquées. Récemment, un groupe a mis en évidence la téléportation d'états quantiques de photons dans l'espace libre sur une distance de 16 kilomètres [395].

## D. Calcul et simulation quantiques

Ce que nous avons dit de la cryptographie et de la téléportation est encore plus vrai de l'information et du calcul quantique : c'est un sujet de recherche très actif, avec de nouveaux résultats qui paraissent constamment dans la littérature. En donner ici un compte rendu à jour est donc hors de question. Nous nous limiterons à une très brève introduction et à quelques idées importantes, renvoyant à nouveau le lecteur intéressé qui voudrait en savoir plus aux Refs. [396–398] ou aux ouvrages suivants [399–402].

### D-1. Principe général

L'idée générale du calcul quantique [403] est de baser des calculs numériques, non plus sur des "bits" classiques qui ne peuvent occuper que deux états discrets (correspondant à 0 et 1 dans la notation binaire habituelle), mais sur des bits quantiques ou "qubits", c'est-à-dire sur des systèmes quantiques qui ont accès chacun à un espace des états à deux dimensions. Ceci implique que des qubits peuvent, non seulement être dans des états $|0\rangle$ et $|1\rangle$, mais aussi dans n'importe quelle superposition linéaire de ces états. Pour un seul qubit, il est déjà clair qu'un continuum d'états est bien "plus grand" que seulement deux états. Pour un ensemble de nombreux bits classiques ou quantiques, la différence est encore plus grande : pour des bits classiques, la dimension de l'espace des états augmente linéairement avec leur nombre (par exemple, l'état d'un système à 3 bits définit un vecteur à trois composantes, égales à 0 ou 1) ; pour des qubits, la dimension croît exponentiellement (c'est une propriété du produit tensoriel d'espaces ; par exemple, pour 3 qubits, la dimension de l'espace est $2^3 = 8$). Si donc l'on suppose qu'un nombre important de qubits est disponible, on a accès à un espace des états avec une "taille" énorme, au sein duquel un nombre immense d'effets d'interférence peuvent se produire.

On comprend alors que, si l'on pouvait d'une façon ou d'une autre faire "travailler en parallèle" toutes les branches du vecteur d'état pour réaliser des calculs indépendants, on pourrait réaliser des calculs bien plus rapides, au moins en théorie. Supposons par exemple que l'on souhaite résoudre un système d'équations qui dépende d'un paramètre ; on pourrait imaginer un algorithme où le système de qubits soit mis dans une superposition d'états associés chacun à une valeur du paramètre, contenant simultanément toutes les solutions des équations pour toute une série de valeurs du paramètre. Mais la difficulté est alors d'avoir accès à ces composantes : on ne peut pas mesurer directement les composantes d'un vecteur d'état, comme on le ferait pour une variable classique. Toutefois, des protocoles de mesures quantiques peuvent être conçus qui permettent effectivement de faire usage d'une partie de ce "parallélisme quantique", ce qui ouvre bien des possibilités. La notion de complexité de calcul unique pour un problème mathématique donné, qui limite l'efficacité des calculateurs classiques, ne s'applique plus de la même façon.

Un résumé de l'histoire et de la préhistoire du calcul quantique se trouve par exemple dans la Ref. [404]. Feynman, au cours d'une conférence donnée en 1981 au MIT, avait remarqué qu'il semble en général impossible de simuler avec une efficacité raisonnable l'évolution d'un système quantique avec un ordinateur classique. Ceci l'a conduit à proposer un modèle de base pour un calculateur quantique qui accomplirait cette tâche. En 1985, David Deutsch [403] a décrit un "calculateur quantique universel", ou "machine de

Turing quantique", capable de simuler n'importe quel autre calculateur quantique, comme une machine de Turing classique peut simuler n'importe quel ordinateur classique. Le domaine entier est actuellement l'objet de recherches toujours très actives, et s'est rapidement développé à partir de la décennie 1990-2000 avec l'introduction de portes et algorithmes quantiques.

### D-2. Portes quantiques et algorithmes

Un "ordinateur quantique" est généralement considéré comme un ensemble d'éléments de base, les "portes logiques quantiques", connectés entre eux de façon appropriée pour le calcul à effectuer. Les plus simples sont celles qui agissent sur un seul qubit :

– la "porte X" qui transforme $|0\rangle$ en $|1\rangle$ et $|1\rangle$ en $|0\rangle$, et dont l'action correspond donc à la matrice de Pauli $\sigma_x$ ;

– la "porte de Hadamard $H$", qui agit selon :

$$\begin{aligned} H\,|0\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,[|0\rangle + |1\rangle] \\ H\,|1\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,[|0\rangle - |1\rangle] \end{aligned} \qquad \text{(VIII-14)}$$

(si les deux états de base $|0\rangle$ et $|1\rangle$ correspondent à des états de photons polarisés horizontalement et verticalement, l'effet de $H$ est de tourner les polarisations linéaires de 45°). Il existe également des portes quantiques agissant sur les états à deux qubits, comme la "porte cNOT" (pour "controlled not" en anglais) qui agit à la fois sur un qubit de contrôle et sur un qubit cible. Pour une introduction aux différentes portes et une discussion simple de la façon de les utiliser pour mettre en œuvre des algorithmes quantiques, voir par exemple le § 6.5 de [389] ou le Chapitre 8 de [405].

Parmi les algorithmes quantiques, on cite souvent en premier celui de Shor [406], qui a remarqué que la factorisation de grands nombres entiers en facteurs premiers pourrait devenir immensément plus rapide que par des méthodes classiques ; une discussion générale des relations entre la mécanique quantique et la factorisation des nombres est donnée dans la Ref. [407], ou avec plus de détails dans le Chapitre 3 de [400]. L'algorithme de Grover [408] est un algorithme quantique qui permet la recherche de données à l'intérieur d'une base d'une façon bien plus efficace que le calcul classique (le gain est quadratique en fonction du nombre d'objets dans la base). C'est un algorithme probabiliste qui donne la réponse correcte avec une grande probabilité, la probabilité d'échec pouvant être diminuée autant que nécessaire en répétant l'algorithme – pour plus de détails voir le Chapitre 4 de [400]. L'algorithme de Deutsch-Jozsa [409] fournit un autre cas où le gain obtenu par le calcul quantique est exponentiel (voir par exemple § 2.2 de [400]). Des gains analogues de la vitesse de calcul sont prédits pour la simulation de systèmes quantiques à beaucoup de particules [410]. Le gain théorique en vitesse est fonction du problème considéré, polynômial ou exponentiel selon

les cas ; mais il existe aussi des cas où aucun gain n'est obtenu ! Plus récemment, un nouvel algorithme a été proposé pour obtenir des informations utiles sur de très grands systèmes d'équations linéaires, en fournissant des valeurs approchées de quantités mathématiques dépendant de la solution [411].

D'un point de vue fondamental, les différences sont nombreuses entre bits classiques et qubits quantiques. Nous l'avons vu, les bits classiques possèdent deux états de référence fixés une fois pour toutes, alors que les qubits peuvent utiliser n'importe quelle base orthogonale dans leur espace des états, mais ceci est loin d'être la seule différence. Par exemple, les bits classiques peuvent être copiés à volonté et un nombre infini de fois (en particulier grâce à l'application de codes de corrections d'erreurs), alors que le théorème du non-clonage interdit de faire de même pour des qubits. Mais, d'un autre côté, les bits classiques ne peuvent être transmis qu'à l'intérieur de cônes de lumière et dans la direction avant, alors que l'utilisation de l'intrication et de la téléportation permet de s'affranchir dans certains cas de cette limitation pour des qubits. Une autre différence est que l'information est codée moins directement dans les bits quantiques que classiques : pour transmettre et recevoir une information utilisable à partir de qubits, il faut spécifier quelles sortes de mesures doivent être faites avec eux (ce point est relié à la flexibilité dans l'espace des états mentionnée ci-dessus). Comme le processus de mesure quantique met en jeu un processus fondamentalement aléatoire, souvent l'algorithme fournira le résultat avec une certaine composante aléatoire, de sorte qu'il peut devenir nécessaire de le répéter. Pour finir, comme tous les êtres humains, Alice et Bob ne peuvent communiquer directement qu'à un niveau classique, en ajustant des paramètres macroscopiques de leurs appareils de mesure, et en observant des éclairs lumineux rouges ou verts associés aux résultats de mesure. Pour paraphraser Bohr (voir la fin du § B-3 au Chapitre I), nous pourrions dire que "il n'existe pas de concept d'information quantique ; l'information échangée entre humains est classique de façon inhérente, mais peut être transmise par l'intermédiaire de qubits quantiques". En dépit de cette remarque, tout ce champ de recherches très actives et intéressantes est généralement appelé "théorie de l'information quantique".

Pour une des premières propositions de mise en œuvre pratique d'un schéma d'ordinateur quantique avec des ions piégés froids, et de réalisation d'une porte quantique cNOT, voir la Ref. [326]. Depuis, de nombreux laboratoires dans le monde ont monté des expériences pour démontrer la faisabilité d'ordinateurs quantiques élémentaires avec des ions [327]. En 2001, un groupe à IBM [412] a utilisé les techniques de la résonance magnétique nucléaire pour mettre en œuvre l'algorithme de Shor et factoriser le nombre $N = 15$ en $3 \times 5$. En 2011, un autre groupe au Center for Quantum Photonics à Bristol a utilisé un système optique quantique pour factoriser $N = 21$ [413]. Plus récemment, un groupe chinois à Hefei et Shanghai a réussi à factoriser $N = 143$ [414], ce

qui est un nombre plus grand mais reste toujours modeste. Les progrès sont constants mais, pour le moment, nous sommes encore loin des applications pratiques !

### D-3. Codes de correction quantique des erreurs

La décohérence est la grande ennemie du calcul quantique, et ceci pour une raison bien simple : elle tend constamment à détruire les superpositions cohérentes qui y jouent un rôle si utile [398, 415]. Elle tend ainsi à réduire l'information quantique complète à sa seule composante classique, booléenne – celle des éléments de matrice diagonaux seulement. Il est d'ailleurs maintenant parfaitement clair qu'un calculateur quantique "simple" basé sur l'utilisation non redondante de qubits ne pourra jamais fonctionner, à moins d'être restreint à un nombre très petit de qubits. Il a même été remarqué que ce type de calculateur serait une sorte de résurgence évoluée des anciens calculateurs analogiques, dans une version particulièrement fragile vis-à-vis des perturbations !

Mais, heureusement, il a également été remarqué qu'une utilisation appropriée de redondance quantique peut conduire à des codes de corrections d'erreurs fort efficaces [416, 417]. La décohérence peut être corrigée grâce à l'utilisation d'un système contenant plus de qubits, par projection de son état dans des sous-espaces appropriés dans lesquels l'information quantique correcte survit sans être entachée d'erreurs [418] ; les schémas théoriques mettent donc en jeu des mesures collectives de plusieurs qubits, qui donnent accès à une information combinée sur l'ensemble d'entre eux, mais aucune sur un qubit isolé. En d'autres termes, les deux états de base d'un qubit ne sont plus simplement les états plus ou moins d'un seul spin, mais deux états intriqués et orthogonaux de plusieurs spins ; une superposition cohérente n'est donc pas stockée dans un seul système quantique, mais dans une superposition de ces états intriqués. Pour s'affranchir de la décohérence extérieure, on peut ensuite utiliser la redondance contenue dans les états intriqués pour "purifier" des états quantiques en combinant plusieurs systèmes, en leur appliquant des transformations locales de façon à extraire un plus petit nombre de systèmes dans des états non perturbés [419]. Le Chapitre 5 de la Ref. [400] discute de façon détaillée comment ce "miracle" peut se produire et quels schémas de corrections peuvent être construits à partir de portes quantiques logiques élémentaires. Pour des revues du sujet, voir par exemple [420, 421].

Le "théorème du seuil quantique", parfois également appelé "quantum fault-tolerance theorem", permet de connaître le seuil maximum de bruit que peut tolérer un calculateur quantique afin de pouvoir reproduire le fonctionnement d'un calculateur quantique parfait [422,423]. Les codes de corrections quantiques s'appliquent, non seulement au calcul quantique, mais également à la communication et la cryptographie [424]. De façon similaire, la notion de

"répéteurs quantiques" [425] a été introduite pour corriger l'effet des imperfections et du bruit dans les communications quantiques. Une autre approche très différente du calcul quantique a été proposée, basée sur un concept semi-classique où les qubits sont toujours utilisés, mais communiquent entre eux uniquement par des signaux classiques macroscopiques, signaux qui sont utilisés pour déterminer le type de mesure à réaliser sur le qubit suivant [426] ; ce genre de calculateur devrait être moins sensible à la décohérence.

Une autre façon de procéder est de contrôler avec précision le couplage d'un système quantique avec son environnement. Si en général, pour de nombreuses formes de dissipation, la décohérence tend à détruire les effets qui sont à la base du calcul quantique, la dissipation peut parfois avoir l'effet opposé. Ainsi, avec un bon contrôle du couplage du système à un réservoir externe, l'environnement peut en fait conduire le système vers un état quantique dans lequel le résultat du calcul quantique est contenu [420, 421, 427].

De façon générale, personne ne peut prévoir avec certitude s'il sera un jour possible de bloquer la décohérence dans un système physique suffisamment grand pour que le calcul quantique devienne un véritable outil de calcul utile. De plus, bien que la factorisation de nombres premiers soit une question importante (en particulier pour la cryptographie), ainsi que le problème à N corps quantiques, il serait utile de pouvoir généraliser ce genre d'approche à une classe plus large de problèmes ! L'avenir dira si, oui ou non, le calcul quantique doit réussir la percée attendue. Quoi qu'il en soit, il s'agit d'un domaine de recherche passionnant.

### D-4. Simulation quantique

Le but d'un autre champ de recherches relié au précédent est, non pas d'utiliser des systèmes quantiques pour réaliser des calculs abstraits (comme la factorisation de grands nombres), mais d'obtenir des simulations. L'idée, introduite par Feynman dans des exposés célèbres en 1959 et 1981 [428], est de simuler le système physique quantique auquel on s'intéresse par un autre système physique qui est plus facile à manipuler. Il est bien connu que le calcul direct des propriétés d'un grand système physique quantique, comme ceux que l'on rencontre fréquemment en matière condensée, pose des problèmes de calcul redoutables. On peut alors songer à remplacer le grand système par un autre qui se comporte de la même façon, tout en étant plus accessible et contrôlable sur le plan expérimental, afin d'obtenir des informations utiles sur le comportement des deux systèmes. De façon générale, deux types de simulations quantiques sont possibles : la simulation numérique ("digital simulation" en anglais), où les calculs sont réalisés avec un calculateur quantique ; la simulation analogique, où l'on ne fait pas de calculs mais où l'on observe les propriétés du premier système qui imite le second. Pour une revue de ce champ de recherches, voir les Refs. [429], [430]

et [431] ; une discussion détaillée de l'effet du désordre et du bruit sur les performances de la simulation quantique est donnée dans la Ref. [432].

Par exemple, un succès marquant de cette seconde approche a été l'observation directe de la transition d'un gaz quantique depuis la phase superfluide vers celle d'un isolant de Mott [433]. Dans ce cas, le simulateur était un gaz placé dans le potentiel périodique créé par un réseau optique. Bien d'autres systèmes physiques ont cependant été utilisés pour la simulation quantique : des ions piégés [327], des spins nucléaires [434] de temps de cohèrence très long, des circuits supraconducteurs [435], des photons [436], etc. Des perspectives intéressantes sont ouvertes par la possibilité de simuler des théories des champs, en particuler par celle de créer des potentiels de jauge artificiels pour des atomes neutres [437].

# Chapitre IX

# Mesure quantique

Le processus de mesure joue un rôle important en théorie quantique. Une mesure peut être directe, si le système physique étudié $S$ interagit directement avec l'appareil de mesure $M$ (comme nous l'avons supposé jusqu'à maintenant), ou indirecte. Dans ce second cas, dans un premier temps le système physique interagit avec un système physique auxiliaire $B$, dont l'espace des états peut être très différent de celui de $S$, par exemple plus grand ; ensuite, lorsque cette interaction a cessé, l'appareil $M$ est utilisé pour effectuer une mesure sur $B$, sans aucune interaction directe avec $A$. Comme $S$ est alors "protégé" de toute interaction directe avec l'appareil de mesure, son état n'est pas nécessairement modifié fortement, et peut même dans certains cas ne l'être que très faiblement. Dans les deux cas, le processus met en jeu l'intrication entre plusieurs systèmes physiques.

Dans ce chapitre nous étudions comment l'intrication est créée et modifiée au cours de la mesure, ainsi que les notions de mesure faible et de mesure continue. Ces questions jouent un rôle important dans plusieurs des interprétations de la mécanique quantique que nous discutons au Chapitre XI. Au § A nous étudions les mesures directes et présentons le modèle classique de von Neumann, qui fournit un cadre général et permet de prendre en compte les effets de l'environnement ; nous introduisons également au § A-4 le théorème de Wigner-Araki-Yanase. Au § B nous discutons les mesures indirectes et la notion importante d'observables POVM. Enfin, au § C, nous étudions les mesures faibles et mesures continues, ainsi que la dynamique particulière (processus de Wiener) qu'elles peuvent introduire.

## A. Mesures directes

Le modèle de von Neumann de la mesure quantique [4] fournit un cadre général pour décrire le processus en termes de corrélations apparaissant (ou disparaissant) dans le vecteur d'état associé au système total $S + M$. Dans ce modèle, les deux systèmes $S$ et $M$ sont initialement décrits par un état

produit $|\Psi_0\rangle$ et interagissent pendant un certain temps, de sorte qu'ils deviennent intriqués ; ils atteignent alors un état $|\Psi'\rangle$ et n'interagissent plus ensuite.

### A-1. Mesure idéale, modèle de von Neumann

Supposons que la quantité physique mesurée sur $S$ soit décrite, dans son espace des états, par un opérateur $A$ dont les vecteurs propres normés sont les kets $|a_n\rangle$ avec les valeurs propres $a_n$ (que nous supposons non dégénérées pour simplifier l'écriture) :

$$A\,|a_n\rangle = a_n\,|a_n\rangle \tag{IX-1}$$

Initialement, l'état $|\varphi_0\rangle$ de $S$ est une combinaison linéaire quelconque des $|a_n\rangle$ :

$$|\varphi_0\rangle = \sum_{n=1}^{N_S} c_n\,|a_n\rangle \tag{IX-2}$$

avec des coefficients complexes $c_n$ ayant pour seule contrainte que la somme des carrés de leurs modules soit égale à 1 (condition de normalisation). Pour l'appareil de mesure $M$, nous supposons qu'initialement il est toujours dans le même état quantique $|\Phi_0\rangle$. L'état initial du système total est alors :

$$|\Psi_0\rangle = |\varphi_0\rangle \otimes |\Phi_0\rangle \tag{IX-3}$$

#### A-1-a. Processus à la base de la mesure

Commençons par le cas particulier où, initialement, $S$ se trouve dans l'un des états propres associés à la mesure : $|\varphi_0\rangle = |a_n\rangle$. Dans ce cas :

$$|\Psi_0\rangle = |a_n\rangle \otimes |\Phi_0\rangle \tag{IX-4}$$

Après la mesure, $S$ reste dans le même état $|a_n\rangle$. Cependant, l'appareil de mesure atteint un état $|\Phi'_n\rangle$ qui est différent de $|\Phi_0\rangle$ et dépend de $n$ ; il faut qu'il en soit ainsi car, pour que le résultat soit accessible expérimentalement, la position du "pointeur" utilisé pour la lecture du résultat (l'aiguille de mesure macroscopique, l'inscription du résultat dans une mémoire, etc.) doit évidemment dépendre de $n$ pour permettre l'acquisition de ce résultat. Il est même logique de supposer que les différents états $|\Phi_n\rangle$ sont orthogonaux entre eux, puisque le pointeur met nécessairement en jeu un très grand nombre d'atomes qui atteignent un état différent pour permettre la lecture par un observateur macroscopique[1]. L'effet de la mesure sur le système total

[1] C'est une condition nécessaire pour que $M$ constitue un appareil de mesure, mais pas suffisante. Les états $|\Phi'_n\rangle$ doivent également permettre un enregistrement stable du résultat de mesure, qui ne doit pas être rapidement effacé sous l'effet de l'évolution propre de $M$ ou de son couplage à l'environnement – nous revenons sur ce point au § A-2.

est donc résumé dans ce cas simple par :

$$|\Psi_0\rangle = |a_n\rangle \otimes |\Phi_0\rangle \implies \left|\Psi'_n\right\rangle = |a_n\rangle \otimes \left|\Phi'_n\right\rangle \tag{IX-5}$$

où $|\Phi'_n\rangle$ est un état normé de $M$. A ce stade, aucune corrélation ou intrication n'est donc apparue entre l'appareil de mesure et le système mesuré ; ceci correspond à la situation simple où le résultat de la mesure est certain.

Mais, dans le cas général, l'état initial du système $S$ est une superposition (IX-2) d'états propres correspondant à la mesure. L'état qui remplace alors (IX-4) est la combinaison linéaire avec les mêmes coefficients :

$$|\Psi_0\rangle = \sum_n c_n \ |a_n\rangle \otimes |\Phi_0\rangle \tag{IX-6}$$

La linéarité de l'équation de Schrödinger entraîne alors que :

$$|\Psi_0\rangle \Longrightarrow \left|\Psi'\right\rangle = \sum_n c_n \ |a_n\rangle \otimes \left|\Phi'_n\right\rangle \tag{IX-7}$$

qui est maintenant un état où l'appareil de mesure est intriqué avec le système mesuré $S$. Après la mesure, on ne peut plus attribuer un vecteur d'état au système $S$ (état pur), mais seulement un opérateur densité obtenu par trace partielle. Comme les $|\Phi'_n\rangle$ sont mutuellement orthogonaux et normés, cet opérateur densité est donné par :

$$\rho'_S = Tr_M \left\{ \left|\Psi'\right\rangle \left\langle\Psi'\right| \right\} = \sum_n |c_n|^2 \ |a_n\rangle \langle a_n| \tag{IX-8}$$

Cette formule paraît très naturelle : elle nous dit que le système mesuré a une probabilité $|c_n|^2$ de se trouver dans chacun des états $|\varphi_n\rangle$ associés aux résultats de mesure $a_n$, ce qui correspond bien à la règle des probabilités habituelles de Born. C'est donc une formule très utile qui résume de façon simple un certains nombre de caractéristiques du postulat de la mesure en mécanique quantique. Cependant, et comme nous l'avons déjà indiqué à plusieurs reprises (en particulier aux §§ A et B du Chapitre II), elle ne contient pas une composante essentielle de ce postulat : l'unicité du résultat de mesure (émergence de l'unicité macroscopique). Tous les résultats possibles continuent à être présents dans la trace partielle, étant considérés comme également possibles même après la mesure ; ceci semble contradictoire avec l'observation d'un seul résultat bien défini lors d'une réalisation unique de l'expérience. Rien de surprenant à cela : la relation (IX-8) n'est qu'une conséquence directe de l'équation de Schrödinger, qui est incapable à elle seule de faire cesser la progression sans fin de la chaîne de von Neumann, et donc d'assurer l'unicité macroscopique.

Comme nous l'avons vu au § B-2-a du Chapitre I, pour résoudre ce problème, von Neumann a introduit un postulat spécifique : le postulat de réduction du vecteur d'état, dont le but est de forcer l'apparition de l'unicité

du résultat de mesure. Selon ce postulat, un seul résultat $a_r$ est effectivement observé à la fin de la mesure et, dans les sommations de (IX-7) et de (IX-8), toutes les composantes sauf celle $n = r$ doivent être supprimées[2]. Le vecteur d'état après la mesure redevient alors un produit, dont l'intrication a disparu de sorte que $S$ est à nouveau dans un état pur.

#### A-1-b. Effets des interactions, observable "pointeur"

Les relations (IX-5) ou (IX-7) impliquent qu'une interaction s'est produite entre les systèmes $S$ et $M$. Nous pouvons par exemple supposer que leur hamiltonien d'interaction $H_{int}$ s'écrit :

$$H_{int} = g\ A\ P_M \tag{IX-9}$$

où $A$ est l'opérateur déjà introduit plus haut (agissant sur $S$ seulement), $P_M$ un opérateur agissant sur $M$ seulement et $g$ une constante de couplage. Nous supposons également que, dans l'espace des états de $M$, l'opérateur $P_M$ possède un opérateur conjugué $X_M$ :

$$[X_M, P_M] = i\hbar \tag{IX-10}$$

Cette égalité signifie que $P_M$ est le générateur des opérateurs de translation par rapport à $X_M$, en d'autres termes que l'action de son exponentielle sur un vecteur propre quelconque $|x_M\rangle$ de $X_M$ :

$$X_M\,|x_M\rangle = x_M\,|x_M\rangle \tag{IX-11}$$

produit une translation de la valeur propre $x_M$ :

$$e^{-i\Delta x P_M/\hbar}\,|x_M\rangle = |x_M + \Delta x\rangle \tag{IX-12}$$

où $\Delta x$ est un nombre réel quelconque.

Supposons maintenant que $|\Phi_0\rangle$ (état de l'appareil de mesure avant la mesure) soit un état propre de $X_M$ de valeur propre $x_0$, et ignorons[3] toute autre source d'évolution du système total autre que l'interaction entre $S$ et $M$. L'opérateur d'évolution entre le temps $t = 0$ avant la mesure et le temps $t = \tau$ où cesse l'interaction est :

$$U(0,t) = e^{-ig\tau A P_M/\hbar} \tag{IX-13}$$

[2]Des interprétations non standard de la mécanique quantique (variables supplémentaires, interprétation modale, dynamique non linéaire, etc.) résolvent le problème d'une façon différente (Chap. XI).

[3]Sinon, le calcul pourrait être mené dans la représentation d'interaction par rapport à la somme des évolutions propres de $S$ et $B$. Toutefois, comme nous mettons ici l'accent plutôt sur la dynamique introduite par leur couplage mutuel, pour simplifier les calculs nous supposons que ces évolutions propres ont un effet négligeable pendant l'intervalle de temps $\tau$.

Son application au ket (IX-4) donne alors :

$$U(t)\,|a_n\rangle \otimes |\Phi_0(x_0)\rangle = |a_n\rangle \otimes |\Phi(x_0 + g\tau a_n)\rangle \qquad \text{(IX-14)}$$

où les variables entre parenthèses dans les états de l'appareil de mesure [4] désignent les valeurs propres de $X_M$. En termes des kets $|\Phi'_n\rangle$ introduits dans (IX-5), nous avons ainsi :

$$\left|\Phi'_n\right\rangle = |\Phi(x_0 + g\tau a_n)\rangle \qquad \text{(IX-15)}$$

Ces relations montrent que, pour l'appareil de mesure $M$, la valeur propre de $X$ a été translatée d'une quantité $g\tau a_n$ qui dépend de la valeur propre $a_n$ de $S$. L'observable $X_M$ joue donc le rôle de la position d'un "pointeur" de l'appareil de mesure (aiguille de mesure), qui indique le résultat de mesure après interaction entre les deux systèmes.

Si, initialement, le système est dans un état propre de $A$, il reste dans le même état propre après mesure : l'opération ne change pas son état. On dit alors que la mesure est une "mesure quantique sans démolition" (en anglais "quantum non demolition measurement", ou QND)[5]. Bien sûr, en général le système $S$ n'est pas initialement dans un état propre de $A$, et l'interaction avec l'appareil de mesure change son état en un mélange statistique compliqué obtenu en insérant (IX-15) dans (IX-7) ; la "chaîne de von Neumann" (§ A du Chapitre II) se produit.

### A-2. Effets de l'environnement, états pointeurs

L'état (IX-7) du système total après la mesure est un état intriqué, écrit dans la base associée à la mesure. Mais nous avons remarqué dans le § B-1 du Chapitre VII que, pour un état intriqué, plusieurs développements de ce type sur des bases différentes sont possibles (ambigüité de l'intrication). Cela signifie-t-il que la nature même de l'observable mesurée dans le processus est également ambigüe ? Il n'en est rien car, pour correspondre à une mesure utilisable, n'importe quel processus d'interaction ne convient pas ; plusieurs conditions doivent être respectées.

En premier lieu, nous avons vu dans le § A-1-b que l'observable mesurée dépend de la forme de l'interaction entre $S$ et l'appareil de mesure ; dans ce modèle simple, les états propres de la mesure $|a_n\rangle$ sont invariants sous l'effet de cette interaction. Une seconde condition, évidente, est que les états $|\Phi'_n\rangle$ de l'appareil de mesure $M$ doivent stocker l'information correspondant au résultat de mesure de façon robuste, et ne pas la détruire immédiatement

[4] Inutile de dire qu'un appareil de mesure est macroscopique et possède bien d'autres degrés de liberté que la seule position du pointeur. Pour simplifier, nous n'introduisons pas ces degrés de liberté dans les notations.

[5] Des mesures QND peuvent par exemple être réalisées en optique quantique [438]. Au cours du Chapitre X, nous donnons d'autres exemples de mesures QND.

sous l'effet de l'évolution propre de $M$. Cette condition est vérifiée si $X_M$ est une constante du mouvement de $M$, en d'autres termes si $X_M$ commute avec l'hamiltonien propre $H_M$ de $M$.

De plus, il est impossible que l'appareil de mesure reste totalement isolé de son environnement, surtout à un niveau microscopique. Ceci demanderait qu'aucun de ses atomes, ses électrons, etc., qui sont pourtant en nombre macroscopique, n'interagisse avec aucune particule de l'environnement et ne s'y corrèle d'une façon ou d'une autre (par exemple un photon qui est diffusé vers un état différent selon la position de l'aiguille de mesure, comme dans le schéma discuté au § C-3-a du Chapitre VII). On peut même remarquer que, de par sa fonction même, l'appareil doit être capable d'interagir et de se corréler avec l'expérimentateur lorsque ce dernier prend connaissance du résultat de mesure. Cette impossibilité d'avoir un appareil totalement isolé a incité Zeh [439] et Zurek [440, 441] à pousser plus loin l'analyse du processus de mesure quantique, et à y inclure l'environnement de l'appareil de mesure.

Des modèles ont été développés, certes simplifiés, mais dont l'intérêt est de permettre des calculs qui donnent une bonne idée de la nature générale des phénomènes physiques produits par l'intrication avec l'environnement. Dans le modèle de Coleman-Hepp [442, 443], le système quantique étudié est couplé à un réseau linéaire semi-infini de $N$ spins 1/2 à des positions fixes, qui représentent l'appareil. Le calcul montre alors que, si l'on se limite à la mesure d'observables "locales" construites à partir d'un nombre fini d'opérateurs de spin, leur mesure ne permet pas de faire la distinction entre une superposition cohérente des diverses positions du pointeur et une superposition incohérente. Dans la même ligne que Leggett et Caldeira [352, 353], Zurek [441] considère un modèle mettant en jeu le couplage de l'appareil de mesure $M$ avec un environnement composé d'une collection d'oscillateurs harmoniques [444] ; comme la Ref. [354], il étudie également le cas où l'environnement est constitué d'un ensemble de spins 1/2 ("central spin model"). L'appareil de mesure lui-même est aussi simplifié et également modélisé par un système à deux niveaux (donc un spin 1/2). Ce couplage se traduit par un hamiltonien $H_{ME}(i)$ entre le $i^{\text{ème}}$ spin de l'environnement et le spin de l'appareil de mesure ; $H_{ME}(i)$ est proportionnel au produit de leurs composantes de spin selon $Oz$ avec une constante de couplage $g_i$ qui varie aléatoirement en fonction de $i$. On peut alors montrer qu'il existe dans l'espace des états de l'appareil de mesure $M$ (tel que simplifié dans ce modèle) une base privilégiée, dite base des "états pointeurs" ("pointer states" en anglais), qui est celle dans laquelle le système $S + M$ devient diagonal. C'est dans cette base uniquement, définie par des critères de localisation du pointeur, que l'intrication avec $E$ tend à détruire les cohérences. Ce qui fixe la base privilégiée par rapport aux autres est donc la forme explicite de l'hamiltonien de couplage entre l'appareil de mesure et son environnement. Pour revenir à un appareil de mesure plus réaliste qu'un spin unique, par exemple un appareil compor-

tant un cadran sur lequel se déplace une aiguille, cette base correspondra à des états où l'aiguille est bien localisée en position (par opposition, par exemple, avec une base constituée avec des états propres de l'impulsion du centre de masse de l'aiguille, ou de n'importe quel état s'étendant dans une grande région de l'espace). Zurek parle de "einselection" (pour "environment induced selection") pour décrire le phénomène.

C'est une idée importante : la constitution physique même d'un appareil de mesure détermine la façon dont il est couplé à l'environnement, et c'est l'hamiltonien responsable de ce couplage qui détermine la base des états pointeurs [445]. En fait, si la dynamique propre de l'appareil n'est pas prise en compte, ces états sont simplement les vecteurs propres d'un opérateur réduit qui commute avec l'hamiltonien d'interaction entre l'appareil de mesure et son environnement [440] ; si cette dynamique est prise en compte, la situation est plus compliquée. Nous voyons ainsi apparaître plusieurs conditions nécessaires pour qu'un dispositif puisse être considéré comme un appareil de mesure satisfaisant pour donner accès à une grandeur physique de $S$ ; il faut évidemment que le couplage entre $S$ et $M$ soit approprié pour transférer la bonne information de l'un à l'autre ; il faut également que cette information transférée reste ensuite stable dans le temps vis-à-vis de l'évolution propre de $M$, ainsi que du couplage entre $M$ et $E$ ; il faut enfin qu'elle soit robuste vis-à-vis des perturbations.

Sur le plan fondamental cependant, la même remarque que plus haut s'applique une fois de plus : la base des états pointeurs est certes privilégiée, en ce sens qu'elle correspond à des populations auxquelles on peut avoir accès (alors que les effets de cohérence entre ces états se propagent rapidement de plus en plus loin dans l'environnement, ce qui les rend rapidement impossibles à observer). Cependant cette cohérence, même inobservable en pratique, existe toujours, se contentant de se propager de façon de plus en plus complexe dans l'univers physique ; après la mesure, la disparition de tous les résultats au profit d'un seul d'entre eux n'est pas contenue dans la théorie, de sorte qu'il faut bien recourir à un postulat indépendant pour l'expliquer. Zurek [446] (voir également § VI-D de [441] et § III-F de [340]) a cependant proposé d'utiliser la notion qu'il appelle "envariance" ("environment-assisted invariance"), une symétrie que présentent les systèmes quantiques corrélés, pour décrire la nature de l'ignorance statistique et en déduire la règle de Born ainsi que la classicalité macroscopique, sans faire appel à la notion de mesure ou de réduction du vecteur d'état.

### A-3. Le paradoxe de Hund

Il existe en physique moléculaire un problème similaire, souvent appelé le "paradoxe de Hund" [447], qui soulève la question de l'origine de la stabilité d'états moléculaires chiraux. Les molécules chirales dans leur état fondamen-

tal peuvent se trouver dans deux configurations symétriques l'une de l'autre par rapport à un plan (symétrie miroir) : la première de symétrie gauche associée à l'état quantique $|L\rangle$, la seconde de symétrie droite associée à l'état quantique $|R\rangle$. Aucun de ces deux états lui-même n'est invariant : chacun présente une chiralité, qui se manifeste par le fait qu'une solution de molécules dans l'un de ces deux états manifeste un "pouvoir rotatoire" (elle fait tourner le plan de polarisation d'un faisceau lumineux qui la traverse).

Ces deux états sont toujours couplés par effet tunnel (comme les configurations symétriques de la molécule d'Ammoniac), de sorte que le véritable état fondamental de la molécule est la combinaison symétrique :

$$|G\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|L\rangle + |R\rangle\right] \tag{IX-16}$$

Un tel état est invariant par symétrie miroir, comme on s'y attend pour l'état fondamental non dégénéré de tout système quantique, qui doit posséder la même symétrie que son hamiltonien (ici l'hamiltonien de la molécule, invariant pas symétrie miroir). L'état $|G\rangle$ n'a donc ni chiralité ni pouvoir rotatoire.

Toutefois, lorsqu'on mesure la rotation du plan de polarisation d'un faisceau lumineux traversant la solution, on observe que les molécules sont des "énantiomères" : elles sont, soit dans l'état $|L\rangle$, soit dans l'état $|R\rangle$, donc dans l'un des deux états qui font tourner la polarisation dans des directions opposées ; elles ne sont pas dans l'état $|G\rangle$, sans pouvoir rotatoire. On peut même trier les molécules dans l'une seule des configurations, $|L\rangle$ ou $|R\rangle$, afin d'augmenter la rotation. Une question intrigante est alors : pourquoi les molécules ne sont-elles pas chacune dans un état qui possède la même symétrie que l'hamiltonien de la molécule ? De façon plus générale, pourquoi ne pourraient-elles pas se trouver dans n'importe quelle superposition linéaire :

$$|D_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|L\rangle \pm e^{i\xi}\,|R\rangle\right] \tag{IX-17}$$

puisque cette possibilité est une conséquence directe du principe de superposition ?

La réponse à cette question met en jeu le couplage de la molécule avec l'environnement, comme pour les états pointeurs discutés ci-dessus. La molécule subit constamment des collisions avec d'autres molécules, et se corrèle avec elles d'une façon qui est différente pour les états $|L\rangle$ et $|R\rangle$ ; ce sont donc ces deux états qui fournissent la base privilégiée par rapport à l'environnement, alors que $|G\rangle$ est une combinaison linéaire de ces états et se trouve donc très fragile vis-à-vis de la décohérence [445, 448]. C'est la raison pour laquelle l'on n'observe pas les propriétés optiques associées à l'état $|G\rangle$.

En fait, si le couplage avec les autres molécules est suffisamment rapide et si l'effet tunnel reste relativement lent, l'interaction entre la molécule bloque

l'effet tunnel. Supposons par exemple qu'une molécule isolée se trouve dans l'état initial $|L\rangle$ ; si la molécule était parfaitement isolée, elle oscillerait entre cet état et l'état $|R\rangle$ sous l'effet de son hamiltonien interne, à une fréquence qui est déterminée par le taux d'effet tunnel entre ces états. Mais, en présence des interactions avec l'environnement, cette oscillation ne se produit pas, la molécule restant bloquée dans l'état $|L\rangle$ (ce blocage porte parfois le nom de "effet Zénon quantique").

### A-4. Le théorème WAY (Wigner-Araki-Yanase)

Wigner a montré que le processus de mesure a des limites introduites par les lois de conservation [449] (cette référence est traduite en anglais dans [450]). Le sujet a été repris ensuite plus en détail par Araki et Yanase [451, 452], de sorte que l'on parle souvent du théorème WAY pour résumer les trois noms par leurs initiales. L'idée est d'examiner les conséquences du modèle de von Neumann de la mesure, et de montrer qu'il contient des difficultés reliées à la conservation de constantes du mouvement additives ; il faut donc recourir à des modèle plus élaborés. Nous commençons par un cas simple, un spin 1/2 mesuré dans un appareil de Stern et Gerlach, et généralisons ensuite la discussion.

#### A-4-a. Mesure de spin dans une expérience de Stern et Gerlach

Considérons une particule de spin 1/2 qui est initialement dans un état orbital $|u_0\rangle$ et dans un état de spin $|+\rangle$ (vecteur propre de valeur propre $\hbar/2$ de la composante $S_z$ du spin le long de l'axe $Oz$). La particule se propage vers un aimant de Stern et Gerlach, qui fait partie d'un appareil de mesure de cette composante. L'état initial du système total est :

$$|\Psi_0\rangle = |+\rangle \otimes |u_0\rangle \otimes |M_0\rangle \tag{IX-18}$$

où $|M_0\rangle$ est l'état initial de l'appareil de mesure, qui est décrit en général par un nombre macroscopique de variables (les positions de toutes les particules qui constituent l'appareil). Il est commode d'introduire le ket $|\Phi\rangle$ décrivant à la fois les variables orbitales de la particule et l'appareil de mesure ; la valeur initiale $|\Phi_0\rangle$ de ce ket est :

$$|\Phi_0\rangle = |u_0\rangle \otimes |M_0\rangle \tag{IX-19}$$

Comme dans (IX-3), l'état initial décrivant le système total est alors :

$$|\Psi_0\rangle = |+\rangle \otimes |\Phi_0\rangle \tag{IX-20}$$

Comme l'état initial est un état propre de la composante du spin mesurée, après interaction avec l'appareil de mesure l'état du système total est, selon le modèle de von Neumann du § A-1 :

$$\left|\Psi'_+\right\rangle = |+\rangle \otimes \left|\Phi'_+\right\rangle \tag{IX-21}$$

Au cours d'un processus de mesure idéal et sans perturbation, le spin n'a pas changé d'état, et l'ensemble des variables orbitales de la particule et de l'appareil de mesure (y compris le "pointeur" indiquant le résultat de mesure) ont atteint l'état $\left|\Phi'_+\right\rangle$. Supposons maintenant que l'état initial du spin soit $|-\rangle$ au lieu de $|+\rangle$ (un spin orienté dans la direction opposée). L'état initial est alors :

$$|\Psi_0\rangle = |-\rangle \otimes |\Phi_0\rangle \tag{IX-22}$$

et l'état final :

$$\left|\Psi'_-\right\rangle = |-\rangle \otimes \left|\Phi'_-\right\rangle \tag{IX-23}$$

où $\left|\Phi'_-\right\rangle$ est un autre état final pour les variables orbitales et l'appareil de mesure. Nous avons vu plus haut que, pour que l'appareil de mesure donne un résultat lisible, $\left|\Phi'_-\right\rangle$ doit être orthogonal à $\left|\Phi'_+\right\rangle$ :

$$\left\langle \Phi'_+ \middle| \Phi'_- \right\rangle = 0 \tag{IX-24}$$

En général, l'état initial du spin est une combinaison linéaire des deux états de spin précédents :

$$|\varphi_S\rangle = c_1 |+\rangle + c_2 |-\rangle \tag{IX-25}$$

La linéarité de l'équation de Schrödinger impose alors que le vecteur d'état $|\Psi\rangle$ après la mesure doit prendre la valeur $|\Psi''\rangle$ qui est la combinaison linéaire :

$$\left|\Psi''\right\rangle = c_1 |+\rangle \otimes \left|\Phi'_+\right\rangle + c_2 |-\rangle \otimes \left|\Phi'_-\right\rangle \tag{IX-26}$$

Le moment cinétique $\mathbf{J}$ du système total est la somme du moment angulaire de spin $\mathbf{S}$ de la particule, de son moment cinétique orbital $\mathbf{L}$, et du moment cinétique $\mathbf{M}$ de l'appareil de mesure :

$$\mathbf{J} = \mathbf{S} + \mathbf{L} + \mathbf{M} = \mathbf{S} + \mathbf{T} \tag{IX-27}$$

où $\mathbf{T} = \mathbf{L} + \mathbf{M}$ est le moment cinétique des variables du ket $|\Phi_0\rangle$. Nous supposons que l'interaction entre la particule et l'appareil de mesure est invariante par rotation, de sorte que le moment cinétique total $\mathbf{J}$ est conservé durant l'évolution. Alors, quand l'état évolue depuis (IX-20) vers (IX-21), comme l'état de spin est inchangé, nous devons avoir :

$$\langle \Phi_0 | \mathbf{T} | \Phi_0 \rangle = \left\langle \Phi'_+ \middle| \mathbf{T} \middle| \Phi'_+ \right\rangle \tag{IX-28}$$

De façon similaire, lorsque le vecteur d'état évolue depuis (IX-22) vers (IX-23), nous devons avoir :

$$\langle \Phi_0 | \mathbf{T} | \Phi_0 \rangle = \left\langle \Phi'_- \middle| \mathbf{T} \middle| \Phi'_- \right\rangle \tag{IX-29}$$

Ainsi, les valeurs moyennes du moment cinétique dans les états $\left|\Phi'_+\right\rangle$ et $\left|\Phi'_-\right\rangle$ sont toutes deux nécessairement égales.

Supposons maintenant que l'état initial du spin soit un état propre de la composante $S_x$ du spin $\mathbf{S}$ le long de la direction transverse $Ox$ :

$$|\varphi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle + |-\rangle\right] \tag{IX-30}$$

et que :

$$|\Psi_0\rangle = |\varphi_S\rangle \otimes |\Phi_0\rangle \tag{IX-31}$$

L'état du système total après la mesure est alors :

$$\left|\Psi''\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|+\rangle \otimes \left|\Phi'_+\right\rangle + |-\rangle \otimes \left|\Phi'_-\right\rangle\right] \tag{IX-32}$$

Dans l'état initial (IX-31), la valeur moyenne de la composante $J_x$ sur $Ox$ du moment cinétique total est :

$$\langle\Psi_0| J_x |\Psi_0\rangle = \langle\Psi_0| S_x |\Psi_0\rangle + \langle\Psi_0| T_x |\Psi_0\rangle = \frac{\hbar}{2} + \langle\Phi_0| T_x |\Phi_0\rangle \tag{IX-33}$$

où $T_x$ est la composante de $\mathbf{T}$ sur $Ox$. Dans l'état final $|\Psi''\rangle$, du fait de la relation d'orthogonalité (IX-24), nous avons :

$$\left\langle\Psi''\right| S_x \left|\Psi''\right\rangle = 0 \tag{IX-34}$$

de sorte que la composante transverse du spin a diminué de $\hbar/2$ au cours de l'interaction avec l'appareil de mesure. Mais, d'autre part, la valeur moyenne de $T_x$ reste inchangée, puisque :

$$\left\langle\Psi''\right| T_x \left|\Psi''\right\rangle = \frac{1}{2}\left[\left\langle\Phi'_+\right| T_x \left|\Phi'_+\right\rangle + \left\langle\Phi'_-\right| T_x \left|\Phi'_-\right\rangle\right] = \langle\Phi_0| T_x |\Phi_0\rangle \tag{IX-35}$$

où nous avons utilisé (IX-28) et (IX-29) pour obtenir la seconde égalité. La conséquence est que :

$$\left\langle\Psi''\right| J_x \left|\Psi''\right\rangle = \langle\Phi_0| T_x |\Phi_0\rangle \tag{IX-36}$$

Ce résultat implique une contradiction avec (IX-33) : le moment cinétique transverse final est plus petit (de $\hbar/2$) que le moment cinétique initial. Cette différence résulte de la disparition de la cohérence de spin introduite par la condition d'orthogonalité (IX-24). Dans le § A-4-c, nous discutons comment cette contradiction peut être résolue.

#### A-4-b. Généralisation

Nous généralisons maintenant les considérations ci-dessus à une mesure quelconque, en utilisant la méthode de la Ref. [453]. Nous appelons $J$ une "quantité conservée additive" :

$$J = S + T \tag{IX-37}$$

Le mot "additive" signifie que $J$ est la somme d'un opérateur $S$ agissant dans $\mathcal{E}_S$ (l'espace des états du système mesuré) et d'un opérateur $T$ agissant dans l'espace des états de l'appareil de mesure. Le mot "conservée" signifie que, pendant l'interaction entre le système et l'appareil de mesure, $J$ est une constante du mouvement : si $U(t)$ désigne l'opérateur d'évolution associé à l'interaction, l'opérateur $J$ satisfait la relation :

$$J = U^{\dagger}(t)\, J\, U(t) \tag{IX-38}$$

Comme ci-dessus, $J$ peut par exemple être une composante du moment cinétique, de l'impulsion totale, mais aussi : la charge électrique du système physique qui est conservée, le nombre baryonique (le tiers de la différence entre le nombre de quarks et d'antiquarks), etc.

Nous appelons $\{|a_n\rangle\}$ (avec $n = 1, 2, ..., N_S$) une base orthonormée de $\mathcal{E}_S$ formée par les vecteurs propres de la mesure. L'état quantique du système total avant la mesure est une combinaison linéaire des kets $|\Psi_n\rangle$ définis par :

$$|\Psi_n\rangle = |a_n\rangle \otimes |\Phi_0\rangle \tag{IX-39}$$

où $|\Phi_0\rangle$ est normalisé. La relation (IX-5) exprime que cet état évolue vers un état $|\Psi'_n\rangle$ après la mesure qui est donné par :

$$\left|\Psi'_n\right\rangle = U(t)\,|\Psi_n\rangle = |a_n\rangle \otimes \left|\Phi'_n\right\rangle \tag{IX-40}$$

où, comme nous l'avons vu au § A-1, les états $|\Phi'_n\rangle$ de l'appareil de mesure sont normalisés (l'évolution est unitaire) et orthogonaux pour des résultats différents :

$$\left\langle \Phi'_n \middle| \Phi'_p \right\rangle = \delta_{n,p} \tag{IX-41}$$

Prenons maintenant l'élément de matrice du membre de gauche de la relation (IX-38) entre le bra $\langle\Psi_n|$ et le ket $|\Psi_p\rangle$ ; nous obtenons :

$$\langle\Psi_n|\ J\ |\Psi_p\rangle = \langle a_n|\, S\, |a_p\rangle + \delta_{n,p}\, \langle\Phi_0|\, T\, |\Phi_0\rangle \tag{IX-42}$$

alors que l'élément de matrice du membre de droite est :

$$\left\langle\Psi'_n\right|\ J\ \left|\Psi'_p\right\rangle = \delta_{n,p}\, \langle a_n|\, S\, |a_p\rangle + \delta_{n,p}\, \left\langle\Phi'_n\right|\, T\, \left|\Phi'_p\right\rangle \tag{IX-43}$$

L'égalité (IX-38) demande que ces deux éléments de matrice soient égaux. Ceci ne peut être réalisé que si :

$$\begin{aligned} \langle a_n|\, S\, |a_p\rangle &\propto \delta_{n,p} \\ \left\langle\Phi'_n\right|\, T\, \left|\Phi'_n\right\rangle &= \langle\Phi_0|\, T\, |\Phi_0\rangle \quad \text{pour tout } n \end{aligned} \tag{IX-44}$$

La seconde relation est l'équivalent des égalités (IX-28) et (IX-29). La première relation indique que les éléments de matrice non diagonaux de $S$ doivent s'annuler dans la base $\{|a_n\rangle\}$ des vecteurs propres de la mesure. En d'autres termes, les deux opérateurs $S$ et $A$ (l'observable mesurée) doivent commuter. Ceci nous conduit au théorème WAY : dans une mesure parfaite de von Neumann, l'observable mesurée doit nécessairement commuter avec toute quantité additive conservée.

#### A-4-c. Discussion

Nous arrivons alors à un paradoxe : comme les trois composantes du moment cinétique sont conservées, le théorème WAY semblerait indiquer que toute quantité mesurée sur le spin doit commuter avec les trois composantes de ce spin. Mais ce n'est le cas d'aucune des composantes du spin, ce qui tendrait à indiquer que toute mesure d'une composante du spin est impossible. Bien sûr, ce n'est pas ce que signifie le théorème WAY ! Il indique seulement qu'une mesure idéale de von Neumann est une idéalisation d'une mesure réelle. Elle suppose à la fois que la mesure est parfaite (l'appareil de mesure fournit un résultat parfaitement précis, et les états $|\Phi'_n\rangle$ après la mesure sont exactement orthogonaux) et sans perturbation (l'état du système mesuré ne change pas du tout lors du processus s'il est initialement un état propre de la mesure). Araki et Yanase [451, 452], ainsi que d'autres auteurs [453, 454], ont étudié les conditions dans lesquelles des mesures imparfaites (avec des appareils constitués d'un très grand nombre de particules) ou avec perturbation peuvent rester compatibles avec les lois de conservation.

Supposons par exemple que (IX-40) soit remplacé par :

$$\left|\Psi'_n\right\rangle = U(t)\,|\Psi_n\rangle = \left|a'_n\right\rangle \otimes \left|\Phi'_n\right\rangle \tag{IX-45}$$

avec :

$$\left|a'_n\right\rangle = |a_n\rangle + \varepsilon\,|u_n\rangle \tag{IX-46}$$

où $\varepsilon$ est un petit nombre. Nous limitons le calcul au premier ordre en $\varepsilon$ ; si le produit scalaire entre $|u_n\rangle$ et $|a_n\rangle$ s'annule, $|a'_n\rangle$ reste normalisé à cet ordre. Alors :

$$\begin{aligned}\left\langle\Psi'_n\right|\ J\ \left|\Psi'_p\right\rangle = {} & \delta_{n,p}\,\langle a_n|\,S\,|a_p\rangle + \delta_{n,p}\left\langle\Phi'_n\right|T\left|\Phi'_p\right\rangle \\ & + \varepsilon\,\langle a_n\,|u_p\rangle\left\langle\Phi'_n\right|T\left|\Phi'_p\right\rangle + \varepsilon\,\langle u_p\,|a_n\rangle\left\langle\Phi'_p\right|T\left|\Phi'_n\right\rangle + \varepsilon^2...\end{aligned} \tag{IX-47}$$

Du fait que les éléments de matrice $\langle\Phi'_n|\,T\left|\Phi'_p\right\rangle$ et $\left\langle\Phi'_p\right|T\,|\Phi'_n\rangle$ concernent un système macroscopique, ils peuvent être beaucoup plus grands que ceux de $S$, de sorte que la correction ajoutée par les termes en $\varepsilon$ peut être importante. Une petite non-orthogonalité des états finals de $S$ peut donc introduire une grande correction au membre de droite de (IX-43), rendant possible la conservation de la valeur moyenne de $J$. Des discussions générales des conséquences du théorème WAY peuvent être trouvées dans les Refs. [455, 456].

## B. Mesures indirectes

Pour introduire les notions de mesures indirectes et de POVM, nous commençons par un cas simple : un système à deux niveaux couplé à un autre système quantique $B$ dont l'espace des états est arbitraire.

### B-1. Un modèle simple : système à deux niveaux

Nous supposons que l'espace des états $\mathcal{E}_S$ de $S$ a deux dimensions et notons $|+\rangle$ et $|-\rangle$ deux états formant une base orthonormée dans $\mathcal{E}_S$. Entre les instants $t = 0$ et $t = \tau$, le système $S$ est couplé à un autre système $B$ appelé "système auxiliaire", dont l'espace des états $\mathcal{E}_B$ est sous-tendu par une base orthonormée $|\Phi_m\rangle$ (avec $q = 0, 1,...,N_B$ ; la dimension $N_B$ peut être bien supérieure à 2). A l'instant $\tau$ on effectue une mesure sur le système auxiliaire, sans aucune interaction directe avec $S$ ; pour simplifier, nous ignorons l'évolution propre de $S$ et $B$ pendant cet intervalle, et ne prenons en compte que leur interaction (sinon nous devrions utiliser la représentation d'interaction par rapport à la somme de leurs hamiltoniens individuels, ce qui compliquerait les calculs).

#### B-1-a. Interaction et intrication

L'hamiltonien d'interaction est :

$$H_{int.} = g\ \sigma_z(S)\ \Xi(B) \tag{IX-48}$$

où $g$ est une constante de couplage, $\sigma_z(S)$ l'opérateur agissant dans l'espace des états de $S$ (défini par la troisième matrice de Pauli dans la base $\{|\pm\rangle\}$), et $\Xi(B)$ un opérateur arbitraire agissant seulement sur $B$. Initialement, l'ensemble $S + A$ se trouve dans l'état :

$$|\Psi_0\rangle = |\varphi_0\rangle \otimes |\Phi_0\rangle \tag{IX-49}$$

où $|\varphi_0\rangle$ est un état quelconque de $\mathcal{E}_S$ :

$$|\varphi_0\rangle = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle \tag{IX-50}$$

Les deux kets $|\varphi_0\rangle$ et $|\Phi_0\rangle$ sont normalisés. Comme les évolutions propres de $S$ et $B$ sont ignorées, l'opérateur d'évolution entre les instants $t = 0$ et $t = \tau$ est :

$$U(0,\tau) = e^{-ig\tau\ \sigma_z(S)\ \Xi(B)/\hbar} \tag{IX-51}$$

Si $S$ est initialement dans l'un des états $|+\rangle$ ou $|-\rangle$, la relation (IX-5) devient :

$$|\Psi_0\rangle = |\pm\rangle \otimes |\Phi_0\rangle \implies \left|\Psi'\right\rangle = |\pm\rangle \otimes \left|\Phi_B^{\pm}\right\rangle \tag{IX-52}$$

avec :

$$\left|\Phi_B^{\pm}\right\rangle = e^{\mp ig\tau\Xi(B)/\hbar}\,|\Phi_0\rangle \tag{IX-53}$$

L'état de $S$ est alors inchangé, et ne sera pas affecté non plus par n'importe quelle mesure effectuée sur $B$, puisque les deux systèmes ne sont pas intriqués. Notons que $\left|\Phi_B^{\pm}\right\rangle$ sont des vecteurs normalisés, car obtenus par action

d'opérateurs unitaires sur $|\Phi_0\rangle$. Toutefois, ils ne sont en général pas orthogonaux : par exemple, si la constante de couplage $g$ tend vers zéro, ils tendent tous les deux vers le même vecteur $|\Phi_0\rangle$ dans l'espace des états de $B$.

Dans le cas plus général où $S$ est initialement dans l'état (IX-50), l'ensemble $S+B$ après interaction est décrit pas l'état intriqué :

$$\left|\Psi'\right\rangle = U(0,\tau)\,|\varphi_0\rangle\,|\Phi_0\rangle = \alpha\,|+\rangle\left|\Phi_B^+\right\rangle + \beta\,|-\rangle\left|\Phi_B^-\right\rangle \tag{IX-54}$$

de sorte que l'effet de la mesure effectuée sur $B$ peut changer l'état de $S$, comme nous le discutons maintenant.

#### B-1-b. Mesure sur le système auxiliaire

A un instant $t \geq \tau$, une mesure est effectuée sur $B$ ; les résultats possibles $b_m$, correspondant aux kets orthonormés $|\Theta_m\rangle$, sont supposés non dégénérés pour simplifier. Un développement sur la base correspondante permet d'écrire $|\Psi'\rangle$ sous la forme :

$$\left|\Psi'\right\rangle = \sum_{m=1}^{N_B}\left[\alpha\left\langle\Theta_m\left|\Phi_B^+\right\rangle|+\right\rangle + \beta\left\langle\Theta_m\left|\Phi_B^-\right\rangle|-\right\rangle\right]\otimes|\Theta_m\rangle \tag{IX-55}$$

où $N_B$ est la dimension de l'espace des états du système $B$. Si le résultat de mesure est $b_q$, le postulat de projection réduit ce ket à l'une de ses composantes dans la sommation sur $m$, de sorte qu'il devient le produit :

$$\left|\Psi'_q\right\rangle = \left[\alpha\left\langle\Theta_q\left|\Phi_B^+\right\rangle|+\right\rangle + \beta\left\langle\Theta_q\left|\Phi_B^-\right\rangle|-\right\rangle\right]\otimes|\Theta_q\rangle \tag{IX-56}$$

Le système $S$ est de nouveau dans un état pur, l'état $\left|\varphi'_q\right\rangle$ donné par :

$$\left|\varphi'_q\right\rangle = \alpha\left\langle\Theta_q\left|\Phi_B^+\right\rangle|+\right\rangle + \beta\left\langle\Theta_q\left|\Phi_B^-\right\rangle|-\right\rangle \tag{IX-57}$$

soit :

$$\left|\varphi'_q\right\rangle = M_q\,|\varphi_0\rangle \tag{IX-58}$$

où $M_q$ est l'opérateur agissant dans $\mathcal{E}_S$ défini par :

$$M_q = \left\langle\Theta_q\left|\Phi_B^+\right\rangle|+\right\rangle\langle+| \;+\; \left\langle\Theta_q\left|\Phi_B^-\right\rangle|-\right\rangle\langle-| \tag{IX-59}$$

L'indice $q$ repère le résultat de la mesure indirecte. Chaque $M_q$ est diagonal dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, mais avec des éléments de matrice (complexes) différents. Dans le cas général, l'état de $S$ est effectivement changé par l'action de la mesure indirecte.

L'opérateur $M_q$ n'est en général pas un projecteur, car son carré n'est pas le même opérateur :

$$[M_q]^2 = \left\langle\Theta_q\left|\Phi_B^+\right\rangle^2|+\right\rangle\langle+| \;+\; \left\langle\Theta_q\left|\Phi_B^-\right\rangle^2|-\right\rangle\langle-| \tag{IX-60}$$

(sauf dans le cas particulier où $|\Theta_q\rangle$ est égal à l'un des $|\Phi_B^{\pm}\rangle$ et orthogonal à l'autre). Pour cette raison, le résultat de la mesure indirecte est souvent appelé une "mesure non projective", par contraste avec les mesures projectives comme celles discutées au § A.

Un calcul du même type donne :

$$M_q^\dagger M_q = M_q M_q^\dagger = \langle\Phi_B^+|\Theta_q\rangle\langle\Theta_q|\Phi_B^+\rangle\,|+\rangle\langle+| + \langle\Phi_B^-|\Theta_q\rangle\langle\Theta_q|\Phi_B^-\rangle\,|-\rangle\langle-| \tag{IX-61}$$

#### B-1-c. Probabilités et règle de somme

La probabilité $\mathcal{P}_q$ d'obtenir le résultat $b_q$ n'est autre que le carré de la norme du ket (IX-56), qui d'après (IX-58) et (IX-59) peut s'écrire simplement comme une valeur moyenne dans l'état initial $|\varphi_0\rangle$ de $S$ :

$$\mathcal{P}_q = \left|\alpha\langle\Theta_q|\Phi_B^+\rangle\right|^2 + \left|\beta\langle\Theta_q|\Phi_B^-\rangle\right|^2 = \langle\varphi_0|M_q^\dagger M_q|\varphi_0\rangle \tag{IX-62}$$

Une sommation sur l'indice $q$ dans (IX-61) introduit alors une relation de fermeture sur la base $\{|\Phi_q\rangle\}$, et l'on obtient :

$$\sum_{q=1}^{N_B} M_q^\dagger\, M_q = \langle\Phi_B^+|\Phi_B^+\rangle\,|+\rangle\langle+| + \langle\Phi_B^-|\Phi_B^-\rangle\,|-\rangle\langle-| = |+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-| \tag{IX-63}$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{q=1}^{N_B} M_q^\dagger\, M_q = 1 \tag{IX-64}$$

qui entraîne que la somme des probabilités vaut 1, comme on s'y attendait pour une série d'opérateurs de Kraus introduits[6] dans le § D-1-a du Chapitre VII.

Ainsi la série des opérateurs :

$$\Pi_q = M_q^\dagger M_q \tag{IX-65}$$

fournit une décomposition de l'opérateur identité dans l'espace des états de $S$. Les $\Pi_q$ ne sont en général pas mutuellement orthogonaux (les traces de leurs produits deux à deux ne s'annulent pas), comme on peut aisément s'en assurer à partir de (IX-61). Avec des projecteurs orthogonaux dans un espace de dimension deux associé à un spin 1/2, on peut seulement obtenir l'identité en sommant 2 projecteurs sur des directions opposées du spin ; il est en fait

[6] Ici, les kets $|\Theta_q\rangle$ sont déterminés par le type de mesure effectuée sur le système $B$ ; leur nombre, et donc celui d'opérateurs de Kraus, correspond au nombre de résultats possibles dans la mesure. Il n'est pas possible de réduire ce nombre en utilisant le changement de base utilisé au § D-1-b du Chapitre VII.

impossible d'écrire plus de deux projecteurs orthogonaux dans $\mathcal{E}_S$. Avec les opérateurs $\Pi_q$ non orthognaux, une décomposition de l'identité est obtenue avec $N_B$ opérateurs ; or la dimension de l'espace des états de $B$ peut être très grande devant 2. Par exemple, on peut obtenir l'identité dans l'espace des états d'un spin 1/2 en sommant des projecteurs sur n'importe quelle série de $K$ directions de spin définies par des vecteurs de l'espace dont la somme est nulle, et en divisant chacun d'entre eux par $K/2$. Comme de plus les $\Pi_q$ ne sont pas nécessairement des projecteurs, on dispose de beaucoup de paramètres pour écrire des séries d'opérateurs dont la somme est 1 comme dans (IX-64).

### B-2. Généralisation : POVM

Nous étudions maintenant le cas général où la dimension de l'espace des états $\mathcal{E}_S$ a une valeur quelconque $N_S$, au lieu de 2. Nous supposons également que les deux systèmes évoluent sous le seul effet de leur interaction, avec un opérateur d'évolution unitaire donné par exemple par (IX-13). Les kets $|u_n\rangle$ sont kets propres de cette évolution, qui change l'état initial du système total selon :

$$|\Psi_0\rangle_n = |u_n\rangle \otimes |\Phi_0\rangle \implies \left|\Psi'\right\rangle_n = |u_n\rangle \otimes |\Phi_B^n\rangle \tag{IX-66}$$

Si l'état initial de $S$ n'est pas $|u_n\rangle$ mais une superposition générale :

$$|\varphi_0\rangle = \sum_{n=1}^{N_S} c_n \ |u_n\rangle \tag{IX-67}$$

la linéarité de l'évolution unitaire impose que l'état $|\Psi'\rangle$ après interaction soit :

$$\left|\Psi'\right\rangle = \sum_{n=1}^{N_S} c_n \ |u_n\rangle \otimes |\Phi_B^n\rangle \tag{IX-68}$$

#### B-2-a. Mesure sur le système auxilliaire

Nous supposons maintenant que la même mesure que ci-dessus est effectuée sur le système $B$ : les résultats (non dégénérés) possibles $b_m$ sont associés aux vecteurs orthonormés $|\Theta_m\rangle$. Le ket $|\Psi'\rangle$ peut être développé selon :

$$\left|\Psi'\right\rangle = \sum_{n=1}^{N_S} \sum_{m=1}^{N_B} c_n \langle\Theta_m \, |\Phi_B^n\rangle \ |u_n\rangle \otimes |\Theta_m\rangle \tag{IX-69}$$

Après une mesure ayant fourni le résultat $b_q$, le postulat de projection transforme ce ket en $\left|\Psi'_q\right\rangle$, obtenu en restreignant la somme sur $m$ à un seul terme $m = q$ :

$$\left|\Psi'_q\right\rangle = \sum_{n=1}^{N_S} c_n \langle\Theta_q \, |\Phi_B^n\rangle \ |u_n\rangle \otimes |\Theta_q\rangle \tag{IX-70}$$

Si alors nous définissons les opérateurs $M_q$ agissant dans $\mathcal{E}_S$ par :

$$M_q \left|u_n\right\rangle = \left\langle \Theta_q \right| \left.\Phi_B^n\right\rangle \left|u_n\right\rangle \tag{IX-71}$$

(ce sont des opérateurs diagonaux mais non nécessairement réels dans la base des $|u_n\rangle$) et insérons (IX-67), nous obtenons :

$$\left|\Psi'_q\right\rangle = M_q \ \left|\varphi_0\right\rangle \otimes \left|\Theta_q\right\rangle \tag{IX-72}$$

#### B-2-b. Règle de somme et opérateurs POVM

La probabilité $\mathcal{P}_q$ d'obtenir le résultat $b_q$ est donnée par le carré de la norme de $\left|\Psi'_q\right\rangle$ dans le développement (IX-69) du vecteur d'état avant la mesure. Selon (IX-72), cette probabilité est :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_q &= \left\langle \varphi_0 \right| M_q^\dagger M_q \left|\varphi_0\right\rangle \left\langle \Theta_q \right| \left.\Theta_q\right\rangle \\ &= \left\langle \varphi_0 \right| M_q^\dagger M_q \left|\varphi_0\right\rangle \end{aligned} \tag{IX-73}$$

Comme la somme des probabilités est égale à l'unité, et comme $|\varphi_0\rangle$ est un ket quelconque dans $\mathcal{E}_S$, la règle de somme (IX-64) est conséquence de cette relation. Les $M_q$ sont des opérateurs de Kraus (§ D-1-a du Chapitre VII).

Définissons alors les opérateurs $\Pi_q$ par :

$$\Pi_q = M_q^\dagger M_q \tag{IX-74}$$

nous voyons que leur somme est égale à l'opérateur identité :

$$\sum_{q=1}^{N_B} \Pi_q = 1 \tag{IX-75}$$

La moyenne de chaque $\Pi_q$ dans tout état de $S$ est toujours un nombre positif (une probabilité). Les mesures associées à un tel ensemble d'opérateurs est appelé un POVM (en anglais : Positive Operator Valued Measure) ; par extension, le même nom désigne souvent les opérateurs eux-mêmes. Comme dans le cas où $S$ est un spin 1/2, le nombre d'opérateurs dans un ensemble n'est pas égal à la dimension de l'espace des états $\mathcal{E}_S$ de $S$, mais à la dimension de l'espace des états $\mathcal{E}_B$ du système auxiliaire. Comme nous l'avons déjà vu lorsque $S$ est un spin 1/2, le nombre d'opérateurs POVM peut être très supérieur à la dimension de $\mathcal{E}_S$. Il peut également être très inférieur dans le cas où $S$ est un grand système alors que le système auxiliaire est un spin 1/2 (cas auquel le nombre d'opérateurs POVM ne peut dépasser 2, quelle que soit la dimension de l'espace des états de $S$).

Un exemple bien connu de POVM à deux opérateurs agissant dans un espace des états de $\mathcal{E}_S$ à deux dimensions, engendré par les deux vecteurs $|\pm\rangle$, est donné par les deux opérateurs de Kraus :

$$M_0 = \left|-\right\rangle \left\langle -\right| \qquad M_1 = \left|-\right\rangle \left\langle +\right| \tag{IX-76}$$

conduisant aux deux opérateurs POVM :

$$\Pi_1 = |-\rangle\langle -| \qquad \Pi_2 = |+\rangle\langle +| \tag{IX-77}$$

avec :

$$\Pi_1 + \Pi_2 = 1 \tag{IX-78}$$

Si $M_0$ est un projecteur, ce n'est pas le cas de $M_1$ (son carré est nul) ; les produits croisés de ces opérateurs sont $M_0 M_1 = M_1$ et $M_1 M_0 = 0$.

## C. Mesures faibles et continues

Les situations où seule une faible intrication est produite au cours de l'interaction entre $S$ et l'appareil de mesure $M$ sont bien adaptées à la réalisation de "mesures faibles" ou de "mesures continues".

### C-1. Valeurs faibles

La notion de mesure de valeur faible a été introduite par Aharonov, Albert et Vaidman [373] (voir également le Chapitre 16 de [372] ainsi que [374]). Comme dans le § A-1-b, considérons l'évolution du système couplé $S + M$, mais dans une situation opposée où l'indication disponible sur le pointeur de l'appareil est peu précise, de sorte qu'elle ne donne qu'une faible information sur l'état de $S$. Un tel cas se produit si, dans l'expression (IX-9) de l'hamiltonien de couplage, la constante de couplage $g$ est petite et peut être traitée au premier ordre seulement. L'état initial du système est :

$$|\Psi_0\rangle = |\varphi_0\rangle\,|\Phi_0(x_0)\rangle \tag{IX-79}$$

où $|\varphi_0\rangle$ a la forme générale (VII-48) en termes des vecteurs propres $|a_n\rangle$ de $A$. Au lieu de supposer que $|\Phi_0\rangle$ est un état propre de l'observable pointeur $X_M$, nous supposons maintenant que c'est un état $|\Phi_0(x_0)\rangle$ ayant des composantes gaussiennes sur les vecteurs propres $|x_M\rangle$ de cet opérateur ; nous choisissons une fonction de Gauss large et centrée autour de $x_M = x_0$ :

$$\langle x_M\,|\Phi_0(x_0)\rangle = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/4}\ e^{-(x_M - x_0)^2/4\sigma^2} \tag{IX-80}$$

où $\sigma$ est l'écart quadratique moyen de la position du pointeur dans l'état initial. Après l'interaction se produisant entre les instants $t = 0$ et $t = \tau$, le vecteur d'état du système total est obtenu par action sur $|\Psi_0\rangle$ de l'opérateur

d'évolution (IX-13), et donné par[7] :

$$\begin{aligned} |\Psi'\rangle &= \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/4} \sum_n c_n \int dx_M \; e^{-(x_M-x_0)^2/4\sigma^2} \; e^{-ig\tau a_n P_M/\hbar} |a_n\rangle \otimes |x_M\rangle \\ &= \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/4} \sum_n c_n \int dx_M \; e^{-(x_M-x_0)^2/4\sigma^2} \; |a_n\rangle \otimes |x_M + g\tau a_n\rangle \end{aligned} \tag{IX-81}$$

Grâce à un changement de variable d'intégration $x_M$ en $x = x_M + g\tau a_n$, nous obtenons :

$$\left|\Psi'\right\rangle = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/4} \sum_n c_n \int dx \; e^{-(x-x_0-g\tau a_n)^2/4\sigma^2} \; |a_n\rangle \otimes |x\rangle \tag{IX-82}$$

ou, au premier ordre en $g\tau$ (nous supposons que $g\tau a_n \ll \sigma$ pour tout $a_n$) :

$$\left|\Psi'\right\rangle = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/4} \sum_n c_n \int dx \; \left[1 + g\tau a_n \frac{d}{dx_0} + ...\right] e^{-(x-x_0)^2/4\sigma^2} \; |a_n\rangle \otimes |x\rangle \tag{IX-83}$$

La sommation sur $n$ du terme en 1 dans le crochet reconstruit le ket $|\varphi_0\rangle$ écrit en (IX-2), tandis que le second terme dans le crochet introduit $A|\varphi_0\rangle$. Nous obtenons donc :

$$\left|\Psi'\right\rangle = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/4} \left[1 + g\tau A \frac{d}{dx_0} + ...\right] \; |\varphi_0\rangle \otimes |\Phi_0(x_0)\rangle \tag{IX-84}$$

Supposons maintenant qu'une mesure soit effectuée sur $S$, projetant ce système dans l'état $|\varphi_f\rangle$ associé à une valeur propre non dégénérée d'un opérateur agissant dans $\mathcal{E}_S$. Après cette mesure, l'état devient :

$$\begin{aligned} |\Psi''\rangle &\sim \left[\langle\varphi_f \,|\varphi_0\rangle + g\tau \,\langle\varphi_f|\, A \,|\varphi_0\rangle \, \frac{d}{dx_0}\right] |\varphi_f\rangle \, |\Phi_0(x_0)\rangle \\ &= \langle\varphi_f \,|\varphi_0\rangle \left[1 + \frac{g\tau \,\langle\varphi_f|\, A \,|\varphi_0\rangle}{\langle\varphi_f \,|\varphi_0\rangle} \frac{d}{dx_0}\right] |\varphi_f\rangle \, |\Phi_0(x_0)\rangle \end{aligned} \tag{IX-85}$$

Si le rapport entre les deux éléments de matrice $\langle\varphi_f|\, A \,|\varphi_0\rangle$ et $\langle\varphi_f \,|\varphi_0\rangle$ est réel, nous obtenons finalement la relation simple :

$$\left|\Psi''\right\rangle \sim |\varphi_f\rangle \, |\Phi_0 \left(x_0 + \Delta x_0\right)\rangle \tag{IX-86}$$

avec :

$$\Delta x_0 = g\tau \frac{\langle\varphi_f|\, A \,|\varphi_0\rangle}{\langle\varphi_f \,|\varphi_0\rangle} \tag{IX-87}$$

[7] Comme dans le § B-1, nous supposons pour simplifier que la seule évolution du système total est due à l'hamiltonien d'interaction entre $S$ et $M$, ignorant donc l'évolution propre des deux systèmes isolés.

$\Delta x_0$ est le décalage moyen de la position du pointeur pour cette série particulière d'événements ; il peut être très grand si $\langle \varphi_f \,|\varphi_0\rangle$ a un module très petit. Si le rapport entre les éléments de matrice est complexe :

$$\frac{\langle \varphi_f|\, A\,|\varphi_0\rangle}{\langle \varphi_f\,|\varphi_0\rangle} = R + iJ \tag{IX-88}$$

on pose $\Delta x_0 = g\tau R$, et on peut montrer que le terme supplémentaire en $J$ ne fait que changer la phase de l'état de $M$ après la mesure. Ceci correspond à la substitution :

$$e^{-(x-x_0-\Delta x_0)^2/4\sigma^2} \Longrightarrow e^{i\xi(x)} e^{-(x-x_0-\Delta x_0)^2/4\sigma^2} \tag{IX-89}$$

où $\xi(x)$ est une variable de phase[8]. Les mesures de la variable de position du pointeur ne sont pas affectées par ce changement (mais une mesure de la variable conjuguée $P_M$ y donnerait accès). Dans ce qui suit, nous nous limitons donc au cas où le rapport entre les éléments de matrice est réel.

La procédure expérimentale est donc la suivante : en premier lieu, on prépare $S$ dans un état $|\varphi_0\rangle$ et $M$ dans un état $|\Phi_0(x_0)\rangle$ correspondant à une distribution large de la variable $x_M$ de position du pointeur ; puis les deux systèmes interagissent pendant un temps court $\tau$ ; on mesure alors $S$ avec une observable qui admet $|\varphi_f\rangle$ comme vecteur propre non dégénéré, et l'on sélectionne uniquement les événements où $S$ est trouvé dans cet état (il s'agit donc d'un processus de post-sélection) ; enfin, on mesure le déplacement moyen $\Delta x_0$ de la variable position du pointeur de l'appareil de mesure $M$. Le résultat intéressant est que, dans le cadre de ce processus combiné de pré- et post-sélection, ce déplacement mesuré peut se révéler bien plus grand que l'un quelconque des déplacements $g\tau a_n$ associés aux valeurs propres de $A$ ; le facteur d'amplification est la partie réelle du rapport entre éléments de matrice écrit en (IX-88). $\Delta x_0$ est appelé la "valeur faible" associée à cette mesure [372, 373] – même si sa valeur peut être étonnamment grande. On peut cependant remarquer que notre calcul au premier ordre suppose que la valeur faible reste toujours plus petite que la largeur $\sigma$ associée à l'état initial de l'appareil de mesure. Pour mesurer ce déplacement avec une précision raisonnable, il est donc nécessaire de réaliser un grand nombre de mesures pour réduire l'incertitude en moyennant les fluctuations des observations individuelles.

Un bon facteur d'amplification est obtenu si $\langle \varphi_f \,|\varphi_0\rangle$ est petit mais $\langle \varphi_f|\, A\,|\varphi_0\rangle$ grand ; les situations où $|\varphi_0\rangle$ et $|\varphi_f\rangle$ sont presque orthogonaux

[8] Au premier ordre, le changement de phase $\xi(x)$ est donné par :

$$\xi(x) = g\tau J\; e^{(x-x_0)^2/\sigma^2}\, \frac{d}{dx_0}\left[e^{-(x-x_0)^2/\sigma^2}\right] = g\tau J\; \frac{x-x_0}{2\sigma^2}$$

sont donc favorables, ce qui implique une post-sélection très sévère ; la plupart des événements sont rejetés, de sorte que l'expérience doit être répétée un très grand nombre de fois afin de donner un résultat significatif. Pour un spin 1/2, on peut par exemple supposer que

$$|\varphi_0\rangle = |+\rangle \quad \text{et} \quad |\varphi_f\rangle = \varepsilon\,|+\rangle + \alpha\,|-\rangle \tag{IX-90}$$

avec $\varepsilon$ réel et très petit et $\alpha$ presque égal à 1. Si l'appareil de mesure $M$ se couple avec l'opérateur de spin de Pauli $A = \sigma_x$, alors :

$$A\,|\varphi_0\rangle = A\,|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|-\rangle \tag{IX-91}$$

Le produit scalaire de ce ket par $|\varphi_f\rangle$ n'est pas infinitésimal lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, mais reste presque égal à $1/\sqrt{2}$. En conséquence, le facteur d'amplification (IX-88) est $\sim 1/\left(\varepsilon\sqrt{2}\right)$, qui peut être arbitrairement grand si $\varepsilon$ est très petit.

Une autre situation intéressante se produit lorsque :

$$|\varphi_0\rangle = |+\rangle \quad \text{et} \quad |\varphi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[|+\rangle + |-\rangle] \tag{IX-92}$$

Les spins partent alors d'un état propre de $\sigma_z$ et atteignent un état propre de $\sigma_x$, également de valeur propre 1. Nous supposons que :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\sigma_x + \sigma_z] \tag{IX-93}$$

ce qui correspond à une mesure du spin le long de la direction du plan $xOz$ à 45° des deux axes $Ox$ et $Oz$. Un calcul élémentaire montre alors que le facteur d'amplification est $\sqrt{2}$. En d'autres termes, les spins interagissent avec $M$ comme si leur composante à 45° n'était pas $\pm 1$, comme pour toute composante de $\overrightarrow{\sigma}$, mais la somme géométrique $1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}$ obtenue en ajoutant la valeur initiale du spin avec sa valeur finale, comme s'il s'agissait de vecteurs classiques perpendiculaires. Une propriété curieuse est que cette valeur dépasse la valeur propre la plus grande +1 de n'importe quelle composante de $\overrightarrow{\sigma}$. Les auteurs de [374] proposent d'interpréter cette situation d'une façon non standard, en considérant que les processus combinés de pré-sélection et de post-sélection trient des spins dont deux composantes orthogonales sont parfaitement déterminées (alors que cela est évidemment totalement impossible dans la formulation habituelle de la mécanique quantique, où deux composantes du spin sur des axes perpendiculaires ne peuvent jamais avoir des valeurs bien déterminées au même instant).

Des idées similaires s'appliquent à l'évolution d'un système quantique $S$ couplé à un système extérieur $B$ par un hamiltonien de la forme $gQ_SQ_B$, où $Q_S$ agit dans l'espace des états de $S$ et $Q_B$ dans celui de $B$. Si l'on pré-sélecte l'état de $B$ dans une superposition d'états propres de $Q_B$ et post-sélecte son

état dans une autre superposition, on peut obtenir des situations où l'évolution de $S$ est équivalente à celle obtenue par la superposition d'hamiltoniens différents, ou d'évolutions pendant des périodes de temps différentes [457].

L'idée générale de la mesure de valeurs faibles n'est pas limitée à la physique quantique, mais s'applique en fait à toute théorie ondulatoire. En optique classique par exemple, pour détecter le faible champ diffusé par un objet, il est bien connu qu'on peut augmenter le contraste en utilisant des polariseurs presque orthogonaux sur les faisceaux d'illumination et de détection. Toute une série d'expériences ont été réalisées pour mesurer des valeurs faibles, soit dans un régime d'optique classique, ou dans un régime purement quantique mettant en jeu l'intrication entre particules [458–466]. La mesure de valeurs faibles a également été utilisée pour tester les inégalités de Leggett-Garg (§ B-2 du Chapitre IV) [467] ou pour obtenir une "mesure directe" d'une fonction d'onde quantique [375].

### C-2. Mesures continues

Considérons maintenant une situation analogue à celle d'une mesure faible mais où, au lieu de supposer que $S$ est post-selecté dans un état donné, nous nous intéressons à l'évolution de son état en supposant que la position de son pointeur $M$ est mesurée, continuant à ignorer l'évolution propre des systèmes isolés $S$ et $M$. Nous partons de l'expression (IX-82) de l'état quantique du système total $S + M$, qui fournit :

$$\big|\Psi'\big\rangle = \big(2\pi\sigma^2\big)^{-1/4} \int dx\ e^{-(x-x_0-g\tau A)^2/4\sigma^2}\ |\varphi_0\rangle \otimes |x\rangle \tag{IX-94}$$

et nous supposons qu'une mesure de la position du pointeur de $M$ a donné un résultat dans l'intervalle :

$$\left[x_r - \frac{dx_r}{2}\ ,\ x_r + \frac{dx_r}{2}\right] \tag{IX-95}$$

où $dx_r \ll \sigma$. Après la mesure, l'état $|\Psi''\rangle$ est obtenu par projection de $|\Psi'\rangle$ sur les états propres de $X_M$ correspondant à cet intervalle :

$$\big|\Psi''\big\rangle = \big(2\pi\sigma^2\big)^{-1/4}\ e^{-(x_r-x_0-g\tau A)^2/4\sigma^2}\ |\varphi_0\rangle \otimes \int_{x_r-dx_r/2}^{x_r+dx_r/2} dx\ |x\rangle \tag{IX-96}$$

Comme ce ket est un produit tensoriel, nous pouvons attribuer au système $S$ un ket $|\varphi''\rangle$ :

$$\big|\varphi''\big\rangle \sim e^{-(x_r-x_0-g\tau A)^2/4\sigma^2}\ |\varphi_0\rangle \tag{IX-97}$$

Dans ce qui suit, nous supposons que le paramètre sans dimension :

$$\varepsilon = \frac{g\tau a}{\sigma} \tag{IX-98}$$

(où $a$ est la plus grande des valeurs propres de $A$ en module) est petit, et effectuons un calcul au deuxième ordre par rapport à ce paramètre ; la raison pour laquelle un calcul au premier ordre n'est pas suffisant apparaîtra à la fin du § C-2-c-$\beta$.

#### C-2-a. Probabilité du résultat

La probabilité $\mathcal{P}(x_r)dx_r$ d'obtenir un résultat dans l'intervalle (IX-95) est donnée par le carré de la norme de $|\Psi''\rangle$, soit :

$$\mathcal{P}(x_r)dx_r = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/2} \langle\varphi_0|\, e^{-(x_r-x_0-g\tau A)^2/2\sigma^2}\ \ |\varphi_0\rangle\ \ dx_r \tag{IX-99}$$

Un développement au second ordre en $\varepsilon$ de l'exponentielle donne :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(x_r) \ &= \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/2}\ \ e^{-(x_r-x_0)^2/2\sigma^2} \\ &\times\left\{1+\frac{g\tau}{\sigma}\frac{x_r-x_0}{\sigma}\left\langle A\right\rangle_0+\left(\frac{g\tau}{\sigma}\right)^2\left\langle A^2\right\rangle_0\left[-\frac{1}{2}+\frac{(x_r-x_0)^2}{2\sigma^2}\right]+...\right\}\end{aligned} \tag{IX-100}$$

où les moyennes de $A$ et de son carré dans l'état $|\varphi_0\rangle$ sont données par :

$$\left\langle A\right\rangle_0 = \langle\varphi_0|\, A\ \ |\varphi_0\rangle \qquad \text{et} \qquad \left\langle A^2\right\rangle_0 = \langle\varphi_0|\, A^2\ \ |\varphi_0\rangle \tag{IX-101}$$

Au deuxième ordre en $\varepsilon$, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(x_r) \ &= \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/2}\times \\ &\times\left\{e^{-(x_r-x_0-\Delta x_0)^2/2\sigma^2}+\left(\frac{g\tau}{\sigma}\right)^2 e^{-(x_r-x_0)^2/2\sigma^2}\ \ F(\ x_r-x_0)+...\right\}\end{aligned} \tag{IX-102}$$

avec :

$$\Delta x_0 = g\tau\left\langle A\right\rangle_0 \tag{IX-103}$$

et où $F$ est une fonction paire[9] de $(x_r-x_0)$. A l'ordre zéro et au premier ordre en $\varepsilon = g\tau a/\sigma$, la distribution est donnée par le premier terme de l'accolade de (IX-102), c'est-à-dire une gaussienne déplacée, centrée autour de :

$$\overline{x}_r = x_0 + \Delta x_0 \tag{IX-104}$$

Le second terme de l'accolade n'introduit pas de correction du second ordre à la moyenne de $(x_r - x_0 - \Delta x_0)$ : le terme en $(x_r - x_0)$ s'annule à cause de la parité de $F$, et le terme en $\Delta x_0$ combiné avec le second terme dans le membre de droite conduit à une correction du troisième ordre au moins.

[9] L'expression de $F$ est :

$$F = -\frac{1}{2}\left\langle A^2\right\rangle_0 + \frac{(x_r-x_0)^2}{2\sigma^2}\left[\left\langle A^2\right\rangle_0 - \left(\left\langle A\right\rangle_0\right)^2\right]$$

Nous en concluons que la valeur moyenne du résultat de mesure n'est pas exactement la position initiale la plus probable $x_0$ du pointeur, mais une valeur déplacée d'une quantité $\Delta x_0$ donnée par (IX-103) ; ce déplacement dépend de l'état initial $|\varphi_0\rangle$ de $S$. Nous introduisons alors la variable aléatoire sans dimension $\xi_r$ définie par :

$$\xi_r = \frac{x_r - x_0 - \Delta x_0}{\sigma} \tag{IX-105}$$

pour caractériser le résultat aléatoire de la mesure ; elle a une valeur moyenne nulle, et un écart quadratique moyen égal à l'unité.

#### C-2-b. Evolution de l'état

Avec cette notation, l'état (IX-97) de $S$ après la mesure devient :

$$\left|\varphi''\right\rangle \sim e^{-\left[\xi_r - \frac{g\tau}{\sigma}\left(A - \langle A\rangle_0\right)\right]^2/4} \ |\varphi_0\rangle \tag{IX-106}$$

ou, en développant l'exponentielle au second ordre :

$$\begin{aligned} |\varphi''\rangle \ &\sim e^{-(\xi_r)^2/4} \times \\ &\times \left\{1 + \frac{g\tau}{2\sigma}\xi_r \left[A - \langle A\rangle_0\right] + \left(\frac{g\tau}{2\sigma}\right)^2 \left[\frac{(\xi_r)^2}{2} - 1\right] \left[A - \langle A\rangle_0\right]^2 + ...\right\} \ |\varphi_0\rangle \end{aligned} \tag{IX-107}$$

Nous ignorons le pré-facteur $e^{-(\xi_r)^2/4}$, et nous normalisons ce ket en calculant le carré de la norme du ket écrit sur la seconde ligne de cette expression (c'est-à-dire le produit de ce ket par le bra associé). Le produit fait apparaître des valeurs moyennes dans l'état initial $|\varphi_0\rangle$, que nous notons $\langle\ \rangle_0$ comme plus haut. Les termes du premier ordre contiennent $(\langle A\rangle_0 - \langle A\rangle_0)$ et s'annule ; les termes d'ordre zéro et deux donnent alors :

$$1 + \left(\frac{g\tau}{2\sigma}\right)^2 \left\langle \left[A - \langle A\rangle_0\right]^2 \right\rangle_0 \left[(\xi_r)^2 + 2\left[\frac{(\xi_r)^2}{2} - 1\right]\right] + ... \tag{IX-108}$$

Pour obtenir un état normalisé, nous devons donc multiplier le ket par :

$$\left\{1 + \left(\frac{g\tau}{2\sigma}\right)^2 \left\langle \left[A - \langle A\rangle_0\right]^2 \right\rangle_0 \left[2\left(\xi_r\right)^2 - 2\right] + ...\right\}^{-1/2} \tag{IX-109}$$

soit :

$$\left\{1 - \left(\frac{g\tau}{2\sigma}\right)^2 \left\langle \left[A - \langle A\rangle_0\right]^2 \right\rangle_0 \left[(\xi_r)^2 - 1\right] + ...\right\} \tag{IX-110}$$

Si nous multiplions l'accolade du membre de droite de (IX-107) par celle-ci, nous obtenons le ket normalisé $|\widehat{\varphi}''\rangle$ après la mesure :

$$|\widehat{\varphi}''\rangle = \left\{1 + \frac{g\tau}{2\sigma}\xi_r \left[A - \langle A\rangle_0\right] - \frac{1}{2}\left(\frac{g\tau}{2\sigma}\right)^2 (\xi_r)^2 \left[A - \langle A\rangle_0\right]^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{g\tau}{2\sigma}\right)^2 \left[(\xi_r)^2 - 1\right]\left[\left[A - \langle A\rangle_0\right]^2 - \left\langle \left[A - \langle A\rangle_0\right]^2 \right\rangle_0\right] + ...\right\} |\varphi_0\rangle \tag{IX-111}$$

#### C-2-c. Processus de Wiener ; équation différentielle stochastique

Supposons maintenant que le système subisse une série continue de mesures, séparées par des intervalles de temps $\delta t$, avec des appareils de mesure qui sont tous identiques et dans le même état initial $|\Phi_0(x_0)\rangle$. Comme nous souhaitons obtenir un processus continu, nous allons supposer que deux paramètres tendent vers 0 : l'intervalle de temps $\delta t$ et le paramètre $\varepsilon = g\tau a/\sigma$ qui caractérise la perturbation introduite par chaque mesure. Avant d'aller plus loin, pour bien prendre une limite continue appropriée, il est utile de rappeler quelques propriétés du mouvement brownien.

##### $\alpha$. *Mouvement brownien*

Considérons une particule se déplaçant sur un axe $Ox$ par sauts aléatoires se produisant constamment, avec un intervalle de temps $\delta t$ entre eux. Chaque saut change la position de la particule d'une quantité $\pm\delta l$, les deux valeurs opposées ayant la même probabilité 1/2. Nous nous intéressons à la limite continue où $\delta l$ et $\delta t$ tendent tous deux vers 0. Soit $dt$ un intervalle de temps que nous divisons en $N$ intervalles plus petits $\delta t = dt/N$, correspondant aux temps $t_0$, $t_1$,...,$t_r$,...,$t_N$ auxquels se produisent des sauts $\delta x_r = \pm\delta l$. Chaque saut est caractérisé par une variable sans dimension $\xi_r = \delta x_r/\delta l = \pm 1$.

• Supposons d'abord que le rapport $\delta l/\delta t$ garde une valeur constante :

$$\frac{\delta l}{\delta t} = c \tag{IX-112}$$

Comme, pendant l'intervalle de temps $dt$, la particule fait des sauts dans les deux directions avec des probabilités égales, la valeur moyenne $\overline{dx}$ de la variation de sa position $x$ s'annule :

$$\overline{dx} = 0 \tag{IX-113}$$

De plus, la valeur moyenne du carré de cette variation est donnée par :

$$\overline{dx^2} = \overline{\left[\xi_0 + \xi_1 + ... + \xi_N\right]^2} (\delta l)^2 = N (\delta l)^2 \tag{IX-114}$$

En effet, dans le carré de la somme, tous les termes croisés contenant des produits de deux $\xi_r$ différents ont une valeur moyenne nulle, de sorte que ne

subsistent que $N$ termes carrés. L'écart quadratique moyen de la distance couverte par la particule en un temps $dt$ est donc :

$$\sqrt{\overline{dx^2}} = \sqrt{N}\delta l = \sqrt{\frac{dt}{\delta t}}\delta l = c\sqrt{dt\ \delta t} \tag{IX-115}$$

qui tend vers 0 à la limite $\delta t \to 0$. Nous voyons alors que, dans la limite continue où $\delta l/\delta t$ reste constant, la particule ne bouge plus ; la distance infinitésimale que permet chaque saut est trop petite.

• Supposons maintenant que le rapport $(\delta l)^2 / \delta t$ garde une valeur constante dans la limite continue :

$$\frac{(\delta l)^2}{\delta t} = D \tag{IX-116}$$

La valeur moyenne de $\overline{dx}$ est toujours égale à 0, comme dans (IX-113), mais nous avons maintenant :

$$\overline{dx^2} = N\,(\delta l)^2 = \frac{dt}{\delta t}\,(\delta l)^2 = D\ dt \tag{IX-117}$$

Pendant l'intervalle de temps $dt$, la particule couvre dans ce cas une distance moyenne $\sqrt{\overline{dx^2}}$ proportionnelle à $\sqrt{dt}$. Ce régime est appelé régime de mouvement brownien.

On peut noter que nous avons supposé, pour simplifier, que les sauts ne peuvent prendre que deux valeurs opposées $\pm\delta l$, de sorte que $\xi_r = \pm 1$. Les mêmes résultats restent cependant valables si les sauts peuvent prendre des valeurs continues dans un certain domaine, en d'autres termes si $\xi_r$ est une variable stochastique quelconque de valeur moyenne nulle et d'écart quadratique moyen unité. Pour une étude plus détaillée de ce mouvement aléatoire et de ses diverses applications en physique, voir par exemple [468].

Le carré du déplacement $dx^2$ est une variable aléatoire avec des fluctuations importantes. Mais si, au lieu de considérer le carré de la somme des $\xi_r$ comme dans (IX-114), nous prenons la somme des carrés des $\xi_r$ :

$$ds = \left[(\xi_0)^2 + (\xi_1)^2 + ... + (\xi_N)^2\right](\delta l)^2 \tag{IX-118}$$

nous obtenons une autre variable de valeur moyenne :

$$\overline{ds} = N\,(\delta l)^2 = \frac{dt}{\delta t}\,(\delta l)^2 = D\ dt \tag{IX-119}$$

Si $\xi_r = \pm 1$, cette variable ne fluctue pas, et n'a plus aucun caractère aléatoire. Si $\xi_r$ prend un continuum de valeurs, les fluctuations de $ds$ sont données par $\sqrt{N}\,(\delta l)^2 = D\sqrt{\delta t\ dt}$, qui tend vers 0 dans la limite $\delta t \to 0$. Bien que définie initialement comme aléatoire, $ds$ est en fait dans la limite continue une fonction déterministe qui varie linéairement dans le temps. La relation (IX-119) nous sera utile dans la suite.

Si l'on considère un ensemble de particules définissant une distribution statistique $\rho(x,t)$ à l'instant $t$, chacune étant sujette au mouvement brownien ci-dessus, on peut montrer que l'évolution de cette distribution obéit à une équation appelée "équation de diffusion" :

$$\frac{d}{dt}\rho(x,t) = D\frac{d^2}{dx^2}\rho(x,t) \tag{IX-120}$$

qui a des applications dans de nombreux domaines de la physique (conduction de la chaleur, théorie du transport, etc.).

*β. Evolution stochastique du vecteur d'état*

Nous appliquons maintenant les considérations précédentes à l'évolution du vecteur d'état. Pour simplifier, nous supposons que le système $S$ évolue seulement sous l'effet de son couplage avec la série d'appareils de mesure identiques. Nous supposons également que le changement de l'état écrit en (IX-111) se produit à tous les intervalles de temps $\delta t$, et que la constante $g\tau/2\sigma$ qui caractérise la taille du saut du vecteur d'état est reliée à $\delta t$ par :

$$\left(\frac{g\tau}{2\sigma}\right)^2 = D\ \delta t \tag{IX-121}$$

Cette relation est similaire à (IX-116), avec $g\tau/2\sigma$ jouant le rôle de $\delta l$ pour le mouvement brownien. A la fin du calcul, nous prenons la limite $\delta t \to 0$ à $D$ constant.

Par analogie avec la position subissant des sauts $\xi_r \delta l$, nous définissons les variations d'une fonction aléatoire $W$ par :

$$\delta W_r = \xi_r \frac{g\tau}{2\sigma} = \xi_r \sqrt{D\ \delta t} \tag{IX-122}$$

Si un intervalle $dt$ est décomposé en $N$ intervalles plus petits $\delta t$, la variation $dW$ de $W$ est donnée par :

$$dW = W(t+dt) - W(t) = \sum_{r=1}^{N} \delta W_r \tag{IX-123}$$

$W$ n'est pas une fonction régulière à la limite où $\delta t$ et la constante de couplage $g$ tendent vers 0 à $D$ constant. C'est en fait une fonction fortement singulière, avec une dérivée qui est toujours infinie. $W$ est un exemple de ce que l'on nomme un "processus de Wiener" ; nous reviendrons brièvement sur les propriétés des processus de Wiener au § C-2-c-$\gamma$.

La somme des carrés des variations $\delta W_r$ possède les mêmes propriétés que la fonction $ds$ introduite en (IX-118), qui n'est pas stochastique mais simplement égale à $Ddt$ :

$$\sum_{r=1}^{N} (\delta W_r)^2 = D\ dt \tag{IX-124}$$

Nous pouvons maintenant utiliser la relation (IX-111) pour obtenir la variation $|\delta\varphi\rangle_r = |\widehat{\varphi}''\rangle - |\varphi\rangle_0$ du vecteur d'état $|\varphi\rangle$ de $S$ pendant un processus de mesure infinitésimal quelconque en termes du processus de Wiener $W$ :

$$\begin{aligned} |\delta\varphi\rangle_r \;&= \Bigg\{ \delta W_r \left[A - \langle A\rangle_0\right] - \frac{1}{2}\left(\delta W_r\right)^2 \left[A - \langle A\rangle_0\right]^2 + \\ &+ \left[\left(\delta W_r\right)^2 - \left(\frac{g\tau}{2\sigma}\right)^2\right] \left[\left[A - \langle A\rangle_0\right]^2 - \left\langle \left[A - \langle A\rangle_0\right]^2 \right\rangle_0\right] + ... \Bigg\} \; |\varphi\rangle \end{aligned} \tag{IX-125}$$

Considérons un intervalle de temps $dt$ suffisamment court pour qu'au cours de cet intervalle l'évolution de $|\varphi\rangle$ soit très petite. Nous effectuons la somme des variations $|\delta\varphi\rangle_r$ au cours des $N$ intervalles plus petits $\delta t$ pour obtenir $|\delta\varphi\rangle$. La somme des termes linéaires en $\delta W_r$ introduit un terme en $dW$, comme dans (IX-123). Le terme quadratique en $\delta W_r$ de la première ligne de (IX-125) donne une contribution en $D\ dt$ d'après (IX-124). Quant au terme quadratique de la seconde ligne, il donne zéro lorsque les relations (IX-124) et (IX-121) sont prises en compte.

Pour finir, nous prenons la limite continue où $\delta t$ et $g\tau/2\sigma$ tendent à la fois vers 0 à $D$ constant dans (IX-121), ce qui donne :

$$|d\varphi\rangle = \left\{ dW \left[A - \langle A\rangle\right] - \frac{1}{2} D\ dt\ \left[A - \langle A\rangle\right]^2 \right\} |\varphi\rangle \tag{IX-126}$$

avec[10] :

$$\langle A\rangle = \langle\varphi|\, A\, |\varphi\rangle \tag{IX-127}$$

Cette équation différentielle stochastique est nettement différente d'une équation différentielle habituelle, l'équation de Schrödinger par exemple : le terme en $dW$ est stochastique et singulier, avec une amplitude proportionnelle à $\sqrt{dt}$, au lieu de $dt$ comme habituellement. Nous comprenons maintenant pourquoi un calcul du second ordre par rapport à $\varepsilon$ était nécessaire : le terme en $D\ dt$ provient du carré des variations $(\delta W_r)^2$, qui est proportionnel à $\varepsilon^2$, et aurait donc été manqué par un calcul limité au premier ordre[11]. Ce terme est appelé "terme d'Itô", et l'intégrale correspondante une "intégrale d'Itô" [469]. Bien que le terme stochastique en $dW$ soit bien plus grand que le terme d'Itô à chaque instant, il est également stochastique et peut avoir des effets opposés à des instants différents sur l'évolution du vecteur d'état qui se moyennent à une valeur plus faible. En revanche, le terme d'Itô est non stochastique et a des effets cumulatifs, qui ne sont pas négligeables à long terme quand on les compare aux termes stochastiques qui sont bien plus grands. On remarque également que l'équation (IX-126) est non linéaire, car $\langle A\rangle$ dépend de l'état

[10] En utilisant (IX-124), on peut vérifier que $(\langle\varphi| + \langle d\varphi|)\,(|\varphi\rangle + |d\varphi\rangle) = \langle\varphi\,|\varphi\rangle + 0(dt^2)$, en d'autres termes que (IX-126) conserve la norme du vecteur d'état.

[11] Le calcul du second ordre est toutefois suffisant, car les contributions du troisième ordre sont en $dt^{3/2}$ et ne jouent aucun rôle dans la limite $dt \to 0$.

$|\varphi\rangle$, de sorte que cette équation peut conduire à des évolutions qui sont très différentes de l'évolution de Schrödinger habituelle. Comme on pouvait s'y attendre, $|d\varphi\rangle$ s'annule si $|\varphi\rangle$ est un vecteur propre quelconque de $A$ de valeur propre $a_n$ (ces vecteurs propres constituent autant de points fixes de l'équation d'évolution) : dans ce cas toutes les mesures successives fournissent le même résultat $x_r = x_0 + g\tau a_n$, et le processus n'est plus stochastique puisqu'aucune évolution ne se produit. Ce type d'équation différentielle non linéaire stochastique a été introduit par Gisin [470, 471] et discuté dans le contexte de la mesure quantique [472]. Pour une introduction concernant l'évolution stochastique du vecteur d'état et les mesures continues, voir par exemple [473, 474].

### $\gamma$. *Propriétés du processus de Wiener*

Comme $\xi_r$ est une variable stochastique de valeur moyenne nulle, la définition (IX-122) entraîne que la moyenne statistique des variations de $W$ s'annule :

$$\overline{\delta W_r} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \overline{dW} = 0 \tag{IX-128}$$

(la barre supérieure symbolise une moyenne d'ensemble sur un grand nombre de réalisations du processus). Comme l'écart quadratique moyen de $\xi$ est 1, nous avons également :

$$\overline{[\delta W_r]^2} = D\delta t \tag{IX-129}$$

De plus, comme les résultats des mesures successives proviennent de processus quantiques différents, qui sont tous indépendants et fondamentalement aléatoires, les variables stochastiques $x_r - x_0$ sont indépendantes pour des valeurs différentes de $r$. Il en est donc de même des $\xi_r$ et des $\delta W_r$. Si nous combinons cette propriété avec (IX-129), nous obtenons :

$$\overline{\delta W_r \; \delta W_{r'}} \;=\; \delta_{r,r'} D\delta t \tag{IX-130}$$

où $\delta_{r,r'}$ est un symbole delta de Kronecker.

Nous pouvons également introduire la dérivée temporelle $W'(t)$ du processus de Wiener, définie comme le processus aléatoire obtenu en divisant la variation de $W$ par l'intervalle de temps :

$$W'_r = \frac{\delta W_r}{\delta t} = \xi_r \sqrt{\frac{D}{\delta t}} \tag{IX-131}$$

A la limite continue, nous avons alors :

$$\overline{W'(t)W'(t')} = D\ \delta(t - t') \tag{IX-132}$$

où $\delta(t - t')$ est une fonction delta de Dirac de la variable $(t - t')$. En effet, on peut vérifier cette égalité en remarquant que, si $t' \neq t$, la moyenne du

produit de deux $W'_r$ s'annule pour des valeurs différentes de l'indice $r$ (elles contiennent des variables aléatoires indépendantes $\xi_r$). De plus, l'intégration de (IX-132) sur $t'$ introduit une intégrale qui est la limite continue de la somme discrète :

$$\sum_{r'} \delta t \left[ \frac{1}{\delta t^2} \overline{\delta W_r \delta W_{r'}} \right] = \sum_{r'} \delta t \frac{1}{\delta t^2} \delta_{r,r'} D \delta t = D \tag{IX-133}$$

Ainsi $\overline{W'(t)W'(t')}$ est entièrement concentré dans un voisinage infinitésimal de $t' = t$ et donne la valeur $D$ par intégration, ce qui caractérise une fonction delta multipliée par $D$. L'équation (IX-132) exprime que les variations temporelles du processus de Wiener n'ont aucune mémoire. Elle constituent ce que l'on appelle souvent un "bruit blanc" en physique, avec des valeurs totalement indépendantes à des instants différents, même si ces temps sont presque égaux.

A ce stade, au lieu d'écrire comme en (IX-126) l'évolution du vecteur d'état en termes d'un processus de Wiener dont les valeurs ne sont pas directement accessibles lors d'une réalisation donnée, il peut sembler plus naturel de l'exprimer en fonction des résultats de mesure, qui sont directement observables. Lors d'une réalisation particulière, ce qui est obtenu est en fait toute une liste de résultats $(x_r - x_0)$ – il est commode ici de prendre $x_0$ comme origine pour exprimer les résultats. Par analogie avec (IX-105), nous définissons la variable stochastique $\zeta_r$ par :

$$\zeta_r = \frac{x_r - x_0}{\sigma} = \xi_r + \frac{\Delta x_0}{\sigma} \tag{IX-134}$$

et, pour obtenir une limite continue adéquate comme en (IX-122), nous définissons la fonction stochastique $R$ par :

$$\delta R_r = \zeta_r \frac{g\tau}{2\sigma} = \delta W_r + \frac{g\tau}{2\sigma} \frac{\Delta x_0}{\sigma} \tag{IX-135}$$

$S$ est appelé "liste des résultats" pour chaque réalisation de la série de mesures. Utilisant l'expression (IX-103) ainsi que (IX-121), nous obtenons alors :

$$\delta W_r = \delta R_r - 2 \left( \frac{g\tau}{2\sigma} \right)^2 \langle A \rangle = \delta R_r - 2 \langle A \rangle D \delta t \tag{IX-136}$$

et, en insérant ce résultat dans (IX-126) puis en prenant la limite continue :

$$|d\varphi\rangle = \left\{ dR \left[ A - \langle A \rangle \right] - \frac{1}{2} D \, dt \, \left[ \left[ A + \langle A \rangle \right]^2 - 4 \langle A \rangle^2 \right] \right\} |\varphi\rangle \tag{IX-137}$$

Cette équation donne l'évolution du vecteur d'état en fonction de la liste des résultats $R$.

*δ. Evolution stochastique de l'opérateur densité*

Pour finir nous étudions l'évolution de l'opérateur densité $\rho = |\varphi\rangle\langle\varphi|$. Sa variation infinitésimale est donnée par :

$$\delta\left(|\varphi\rangle\langle\varphi|\right)_r = \left[|\varphi\rangle + |\delta\varphi\rangle_r\right]\left[\langle\varphi| + \langle d\varphi|_r\right] - |\varphi\rangle\langle\varphi| \tag{IX-138}$$

où $|d\varphi\rangle_r$ est donné par (IX-126) et $\langle d\varphi|_r$ est le bra correspondant. Habituellement, le terme en $|d\varphi\rangle_r \langle d\varphi|_r$ peut être ignoré au premier ordre, car il est en $dt^2$, mais ici la situation est différente puisque $|d\varphi\rangle$ contient un terme en $dW_r$ dont le carré est proportionnel à $\delta t$, comme le montre (IX-124). Ce terme introduit une contribution :

$$D\ dt\ \left[A - \langle A\rangle\right]\rho\left[A - \langle A\rangle\right] \tag{IX-139}$$

En ajoutant à ce terme les termes linéaires en $|d\varphi\rangle_r$, ainsi que ceux du bra associé, on obtient l'évolution de $\rho$ sous la forme :

$$d\rho = \left\{ dW\Big( \left[A,\rho\right]_+ - 2\langle A\rangle\rho\Big) - \frac{1}{2}Ddt\ \Big[A,\left[A,\rho\right]\Big]\right\} \tag{IX-140}$$

qui contient un anticommutateur $[A,\rho]_+$ et un double commutateur $[A,[A,\rho]]$. Cette équation est parfois appelée une équation de Belavkin [475]. Comme plus haut pour le vecteur d'état, on peut remplacer $dW$ par $dR - 2\langle A\rangle Ddt$ pour obtenir la variation de l'opérateur densité en fonction de la liste des résultats, au lieu du processus de Wiener. On peut aisément vérifier que, si $\rho$ est un mélange statistique de projecteurs sur des états propres de $A$, il commute avec $A$ de sorte qu'aucune évolution ne se produit sous l'effet des mesures successives, pour les mêmes raisons physiques que ci-dessus.

Les outils mathématiques que nous avons discutés dans ce chapitre (processus de Wiener, équation différentielle stochastique, etc.) sont utilisés dans certaines interprétations de la mécanique quantique que nous discutons au Chapitre XI, en particulier celles mettant en jeu une dynamique de Schrödinger stochastique.

# Chapitre X

# Expériences : la réduction quantique vue en temps réel

Sur le plan théorique nous devons reconnaître que, depuis 1935 environ, notre compréhension des fondements de la mécanique quantique n'a pas tellement progressé ; les idées vraiment nouvelles sont rares – à part bien sûr la voie majeure ouverte par la contribution de Bell [6]. Il y a là un grand contraste avec l'ensemble de la physique, où l'on a assisté à un nombre impressionnant de découvertes remarquables, et ceci dans de nombreux domaines. Ces découvertes ont toutefois souvent mis en œuvre les outils de la mécanique quantique, ainsi que des progrès expérimentaux spectaculaires qui ont complètement changé la situation. Aux débuts de la mécanique quantique, l'observation de traces de particules uniques dans les chambres de Wilson [476] a joué un rôle essentiel dans l'introduction des postulats quantiques concernant la mesure ; sinon il était totalement impossible d'observer continûment un seul électron, atome, ou ion. Les expériences que les théoriciens proposaient dans les discussions sur les fondements étaient donc le plus souvent des "expériences de pensée" ("Gedanken Experiment"), comme celles inventées lors des fameux congrès Solvay [1, 21]. De nos jours cependant, et après presque un siècle de progrès continus, des expériences qui étaient alors totalement impensables sont devenues réalité.

Un très grand nombre d'expériences de physique contemporaine met en jeu la mécanique quantique en général, de sorte que plusieurs ouvrages ne suffiraient pas à les décrire toutes. Cependant, dans la majorité d'entre elles, les effets directs de la réduction du vecteur d'état ne sont pas directement observables. Ce que l'on observe réellement est une somme sur un nombre très grand de particules de la même observable quantique individuelle microscopique (somme des dipôles atomiques par exemple). Or une telle somme est bien décrite par la seule donnée de la valeur moyenne de cette observable ; il suffit alors d'utiliser l'équation de Schrödinger pour calculer cette

moyenne, qu'on va ensuite traiter comme une variable classique, sans faire aucun usage de la règle de Born ou du postulat de projection – une illustration typique est donnée par les expériences de RMN (résonance magnétique nucléaire) en physique et chimie. Dans les expériences de coïncidence, ce qui est mesuré correspond au produit de deux opérateurs correspondant à des taux de comptage d'appareils, et à nouveau on peut utiliser l'équation de Schrödinger pour calculer la valeur moyenne de ce produit. Bien sûr, ce n'est pas pour autant que le postulat de projection devient nécessairement sans intérêt pour l'expérience ! En optique quantique et physique atomique par exemple, on fait souvent usage d'une détection optique avec des photomultiplicateurs ou des diodes ; le postulat de projection détermine alors la taille et les propriétés du "bruit de grenaille" aléatoire observé. Ce bruit limite la précision de l'expérience en ajoutant une composante fluctuante au signal, qui lui-même varie de façon déterministe et régulière en fonction des paramètres de l'expérience ; comme généralement ce qui est étudié est principalement le signal, le postulat de projection ne joue alors plus qu'un rôle relativement secondaire.

Ici nous nous focaliserons sur une toute petite fraction de ces expériences, celles où les conditions sont telles que les effets de la projection du vecteur d'état sont particulièrement évidents, comme celles où une particule unique est observée et où "les sauts quantiques sont visibles en temps réel". Les observations ont alors un contenu quantique plus riche que ce que prévoit l'équation de Schrödinger continue, et en ce sens vont au-delà de cette équation. Notre but n'est certainement pas de donner une revue complète du sujet, mais plus modestement de présenter un certain nombre d'exemples choisis parce qu'ils sont particulièrement illustratifs.

## A. Ion unique dans un piège

Il est possible d'observer un ion de Barium unique retenu dans un piège radio-fréquence pendant un temps relativement long. On peut pour cela mesurer continûment sa fluorescence sous irradiation laser [477,478] ; la durée de vie du niveau excité de résonance étant environ $10^{-9}$ seconde, même si l'on ne capte qu'un millième de la lumière de fluorescence (une valeur typique dans ces expériences), on peut toujours détecter un flux lumineux d'un million de photons par seconde, directement visible à l'œil nu. Dans ces conditions il est également possible, comme l'écrivent les auteurs de [477], de directement "observer sur un écran d'oscilloscope la réduction de la fonction d'onde par le processus de mesure".

Les niveaux d'énergie entrant en jeu dans l'expérience réalisée par Dehmelt et ses collaborateurs sont représentés dans la Figure X.1 : l'état fondamental est $g$, $e_1$ et $e_2$ sont deux états excités, $m_1$ et $m_2$ deux états métastables. La transition $g - e_1$ depuis le niveau fondamental $g$ vers un premier

niveau excité $e_1$ est fortement excitée par un premier laser intense, tandis que la fluorescence à la longueur d'onde correspondante est mesurée en permanence. Le niveau $e_1$ se désintègre par émission spontanée, non seulement vers le niveau fondamental $g$, mais également vers le niveau métastable $m_1$, qui se désintègre vers l'état fondamental bien plus lentement que l'état $e_1$. L'ion pourrait alors rester longtemps piégé dans cet état $m_1$, sans interagir avec le laser, et la fluorescence cesserait immédiatement. Pour éviter ce piégeage, un autre laser excite la transition entre $m_1$ et $e_1$. Ce second laser crée en quelque sorte un circuit fermé $g - e_1 - m_1$ dont l'ion ne peut pas s'échapper, ce qui est utilisé pour le refroidir. Si aucune autre excitation de l'ion n'était produite, il fluorescerait constamment. Mais une autre source lumineuse, bien plus faible, excite la transition $g - e_2$ vers un second niveau excité $e_2$. Or, parfois, lorsque l'ion a atteint le niveau $e_2$, il ne retombe pas vers le niveau fondamental $g$, mais plutôt vers le niveau métastable $m_2$ où il ne peut plus être excité optiquement ; l'ion cesse alors de fluorescer, et l'on dit qu'il a été "mis de côté" (en anglais, "shelved") dans l'état métastable. Toutefois, comme ce niveau possède une durée de vie finie, l'ion finit par retomber spontanément dans le niveau fondamental $g$, et recommence alors à fluorescer.

Si l'on applique l'équation de Schrödinger à une telle situation, il faut inclure dans le système l'ion ainsi que le champ électromagnétique, dont plusieurs modes sont peuplés, et prendre en compte l'effet de leurs interactions (absorption, émission stimulée, émission spontanée). La solution de l'équation qui est alors obtenue est, au bout d'un certain temps, la superposition de deux composantes : une où l'ion n'est pas "mis de côté" et où une forte émission spontanée de lumière se produit, et une autre où l'ion est mis de côté de sorte qu'aucun rayonnement n'est émis à la fréquence de la transition $e_1 - g$. C'est donc simultanément que l'ion fluoresce et s'abstient de fluorescer, comme le chat de Schrödinger qui est à la fois vivant et mort ; le vecteur d'état permet de calculer une intensité de fluorescence moyenne qui est intermédiaire entre les deux situations. En d'autres termes, dans le cadre de l'équation de Schrödinger, tout reste continu, les "sauts quantiques" ne se produisent jamais, et l'on atteint une sorte de moyenne des deux situations possibles.

Mais, comme l'intensité de fluorescence est constamment mesurée dans l'expérience, les deux composantes du vecteur d'état contiennent également des états macroscopiquement différents des appareils de mesure, de sorte que le postulat de projection s'applique : un processus fondamentalement aléatoire se produit, et le système choisit spontanément une seule des deux composantes. En conséquence, la fluorescence prend, soit sa valeur maximale (correspondant à l'ion en train d'effectuer constamment un circuit entre les trois niveaux $g$, $e_1$ et $m_1$), soit la valeur nulle, mais jamais une valeur intermédiaire.

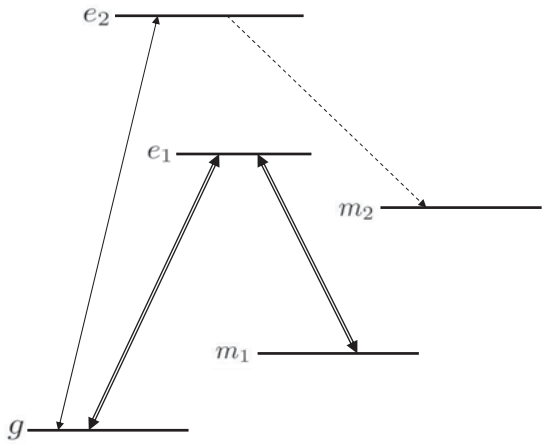


FIGURE *X.1 – Niveaux d'énergie d'un ion Barium mis en jeu dans l'expérience. L'état fondamental de l'ion est $g$, tandis que $e_1$ et $e_2$ sont deux états excités, $m_1$ et $m_2$ deux états métastables. Deux lasers de forte intensité (flèches doubles) excitent les transitions $g - e_1$ et $m_1 - e_1$ afin de produire le refroidissement laser du mouvement de l'ion dans le piège. La fluorescence par émission spontanée depuis le niveau $e_1$ vers $g$ est constamment mesurée ; en présence de deux lasers seulement, elle ne cesse jamais. Cependant on utilise également une lampe de faible intensité pour exciter la transition $g - e_2$ ; lorsque l'ion atteint le niveau $e_2$, il retombe parfois dans le niveau métastable $m_2$ (flèche tiretée), où il ne peut plus fluorescer ; on dit alors qu'il est "mis de côté". Cette situation dure jusqu'à ce que l'émission spontanée fasse retomber l'ion dans le niveau fondamental $g$ et que le cycle recommence.*

Les résultats expérimentaux confirment cette prédiction : comme le montre la Figure X.2, la fluorescence observée subit des "sauts" brusques entre une valeur maximale et zéro. Les instants auxquels se produisent ces sauts ne sont pas contrôlés dans l'expérience, car ils sont conséquence d'un processus de mesure quantique de caractère fondamentalement aléatoire. Si la fluorescence d'un grand nombre d'ions était observée, chacun d'entre eux passerait du régime fluorescent au régime sans fluorescence à des instants différents, et par un effet de moyenne on observerait seulement la valeur moyenne – celle précisément prédite par l'équation de Schrödinger continue. Toutefois, avec

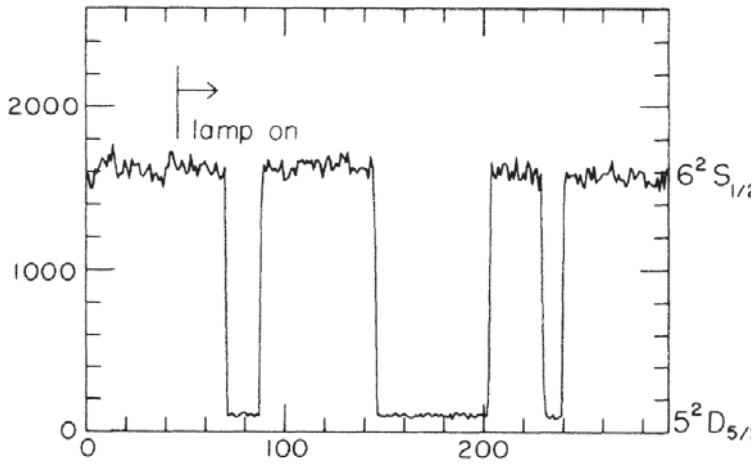


FIGURE *X.2 – Signal de fluorescence d'un ion $Ba^+$ unique à la longueur d'onde de la transition $g - e_1$ en fonction du temps (en secondes) ; l'axe vertical donne le nombre de coups par seconde enregistrés par un photomultiplicateur détectant cette fluorescence. Jusqu'au temps $t = 50$ s, la lampe de faible intensité est occultée ; l'ion effectue alors des cycles fermés entre les niveaux $g$, $e_1$ et $m_1$, de sorte qu'il fluoresce constamment (courbe du haut avec du bruit fluctuant). Ensuite (instant noté "lamp on" en anglais), la lampe de faible intensité entre en action et peut transférer l'ion vers le niveau $m_2$, où il cesse de fluorescer. Lorsque c'est le cas, une période sombre se produit pour un certain temps (ligne du bas), jusqu'à ce que l'émission spontanée le fasse retomber dans le niveau fondamental ; le cycle recommence alors (figure empruntée à la Ref. [477]).*

un seul ion, la quantification du signal est directement visible, et de fait le système peut subir un très grand nombre de sauts entre les deux valeurs.

Des expériences réalisées simultanément par Toschek et son groupe sur le même ion [478] ont permis d'obtenir des résultats très semblables, dans un cas où seulement trois niveaux sont mis en jeu, mais mettant également en évidence des "sauts quantiques" de façon très claire. Des ions différents ont été utilisés dans d'autres laboratoires, en particulier l'ion Mercure [479, 480]. Dans ce cas, trois niveaux interviennent : le niveau fondamental, un niveau excité $^2P_{1/2}$ de courte durée de vie (2 ns) et un niveau métastable

$^2D_{5/2}$ de durée de vie 0.1 s. Lorsque la transition entre les deux premiers niveaux est constamment excitée, la fluorescence de l'ion à la longueur d'onde correspondante reste constante. Cependant, si la transition entre le niveau fondamental et le niveau métastable est également excitée, de temps en temps l'ion passe dans le niveau métastable, de sorte que la fluorescence cesse, jusqu'à ce que l'ion retombe ensuite dans le niveau fondamental par émission spontanée. Les résultats sont montrés sur la Figure X.3. Comme dans la Figure X.2, la fluorescence présente alors des discontinuités marquées entre deux régimes, souvent appelées "sauts quantiques" par référence à la théorie historique de l'atome de Bohr (§ A-1 du Chapitre I).

Bien avant que ces résultats ne soient obtenus, Schrödinger avait analysé une expérience de pensée où la lumière émise par un atome était utilisée pour obtenir des interférences [481] ; il avait mis en avant que les sauts quantiques, s'ils se produisent lorsque les atomes émettent des photons, ne peuvent pas être instantanés, mais qu'ils ont nécessairement une durée non nulle reliée à la largeur radiative des niveaux atomiques. Ici la situation est similaire, puisque le passage du régime "lumineux" (fluorescence) vers le régime "noir" (sans fluorescence) est déclenché par l'émission spontanée du niveau $e_2$ vers $m_2$, alors que la transition du régime noir vers le régime lumineux est déclenchée par la transition entre $m_2$ et le niveau fondamental $g$ – en d'autre termes, deux "sauts" jouent un rôle, au lieu d'un, mais la remarque de Schrödinger s'applique également.

Dans ce cas, comment cela est-il compatible avec les observations de la Figure X.2 ? L'explication est que le signal de la Figure X.2 est représenté moyenné sur le temps, ce qui cache les discontinuités qui apparaissent dès qu'on l'observe de plus près. A une échelle plus petite, le signal fourni par le photo-multiplicateur mesurant la fluorescence est une série de "clics" soudains qui se produisent à des instants aléatoires, et correspondent à la détection de photons individuels ; la Figure X.2 ne montre en fait que la fréquence moyenne de ces clics. Ce qui est réellement observé consiste donc en transitions entre des périodes où les clics sont fréquents et d'autres où ils ne le sont pas ; chaque transition entre ces périodes ne peut être définie plus précisément que le temps entre deux clics consécutifs. Il s'ensuit que le temps auquel se produisent les "sauts" n'est mesurable qu'avec une certaine incertitude, qui est fonction du taux d'émission de photons et donc de la largeur radiative des niveaux comme le prédisait l'argument de Schrödinger – pour une discussion plus précise voir [482]. Une étude théorique plus détaillée du phénomène d'intermittence de fluorescence est donnée dans les Refs. [483, 484].

## B. Electron unique piégé

Un électron unique dans un piège cyclotron peut également donner lieu à des observations faisant clairement apparaître les effets quantiques de la me-

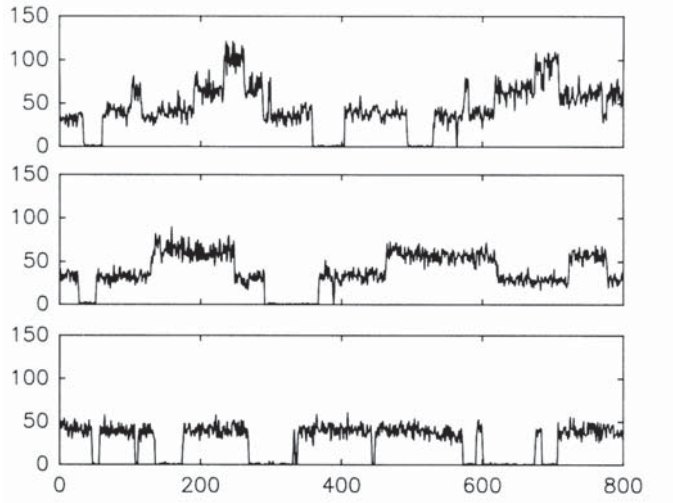


FIGURE *X.3 – Courbe du bas : signal de fluorescence d'un ion $Hg^+$ unique constamment excité sur sa transition de résonance, ainsi que sur une autre transition entre son niveau fondamental et le niveau métastable $^2D_{5/2}$. L'échelle horizontale est en millisecondes, l'échelle verticale donne le nombre de photoélectrons enregistrés par milliseconde. Lorsque l'ion passe dans ce niveau métastable, il cesse de fluorescer, de sorte que des sauts quantiques sont clairement visibles, comme dans la Figure X.2. La courbe du mileu est obtenue quand deux ions sont piégés ; trois cas peuvent alors se produire, selon le nombre d'ions "mis de côté" (0, 1 ou 2), ce qui correspond à trois intensités possibles pour la fluorescence. La courbe du haut montre la fluorescence quand trois ions sont piégés et peuvent donner lieu à quatre niveaux de fluorescence (figure aimablement fournie par D. Wineland et W. Itano).*

sure, comme mis en évidence par Gabrielse et al. [485]. Dans leur expérience, un piège de Penning refroidi est utilisé pour retenir un électron unique. Un tel piège comprend un fort champ magnétique axial ainsi qu'un champ électrique quadrupolaire créé par des électrodes. Dans le champ magnétique, les niveaux quantifiés d'une particule chargée sont des niveaux orbitaux équidistants, les "niveaux de Landau" d'énergies $nh\nu_c$, où $\nu_c$ est la fréquence cyclotron et $n$ un nombre entier (l'énergie combine les effets du couplage avec le champ magnétique des variables orbitales et de spin). La mesure porte sur le nombre

quantique $n$ caractérisant cette énergie.

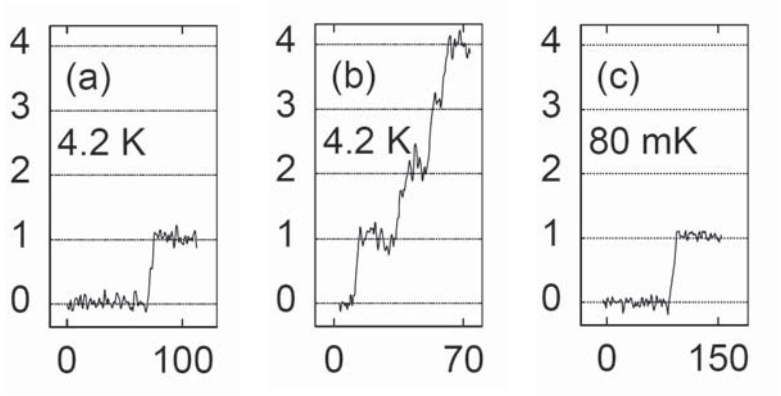


FIGURE *X.4 – Détection en temps réel du nombre quantique orbital d'un électron unique dans un piège de Penning. L'axe horizontal donne le temps en secondes, l'axe vertical le niveau quantique de rotation cyclotron. Dans les figures (a) et (b), l'excitation entre les niveaux de Landau est obtenue sous l'effet du rayonnement thermique (rayonnement du corps noir) présent dans l'expérience à quelques degrés Kelvin. Dans la figure (c), la température est plus basse, et un champ micro-onde est appliqué pour faire sauter l'électron vers des niveaux de Landau excités, ici le premier (figure aimablement fournie par G. Gabrielse).*

Deux sortes de mouvements différents dans le piège jouent en fait un rôle dans cette expérience. Le mouvement principal est le mouvement cyclotron habituel, perpendiculaire au champ magnétique, qui est l'objet d'étude principal de cette expérience. Mais il se produit également un mouvement longitudinal, parallèle au champ, dont la fréquence dépend légèrement de l'énergie du mouvement cyclotron (en pratique, ce couplage est introduit par une légère distorsion de la carte du champ magnétique homogène). On peut donc avoir un accès indirect à l'énergie cyclotron grâce à une mesure extrêmement précise de cette fréquence longitudinale, ce qui permet aussi de déterminer le nombre quantique $n$. Dans l'expérience, un électron unique orbite dans le champ magnétique, et l'on mesure en permanence sa fréquence d'oscillation longitudinale, ce qui constitue en fait une mesure quantique continue de son énergie de précession. La Figure X.4 montre un exemple de la variation dans le temps de cette fréquence, qui présente clairement des marches

se produisant lorsque le système subit les effets de la mesure quantique, et se trouve projeté sur un état propre de l'énergie. Les commentaires généraux du § A s'appliquent également à cette expérience, qui fournit un exemple de "mesure quantique non destructive" (en anglais, "quantum non-demolition measurement", ou QND) observée en temps réel. Plus récemment, une nouvelle version de cette expérience cyclotron a permis d'obtenir une mesure extrêmement précise du moment magnétique de l'électron et de la constante de structure fine [486].

## C. Mesure du nombre de photons dans une cavité

Dans les deux expériences que nous venons de décrire, le système quantique observé était une particule matérielle (une particule de masse au repos non nulle), soit un ion soit un électron. A priori, il peut sembler que les photons soient moins adaptés à une observation individuelle qu'une particule matérielle, du fait qu'ils sont prompts à disparaître, en particulier lors de leur détection qui se fait souvent par absorption. Cependant des expériences récentes ont réussi à obtenir des résultats comparables en observant des photons dans une cavité, illustrant les propriétés de la mesure quantique d'une façon particulièrement spectaculaire. Jusqu'à relativement récemment, la seule méthode pour "voir" un photon était de l'absorber dans un détecteur (un photo-multiplicateur par exemple), de sorte que des mesures ultérieures avec la même particule devenaient impossibles. Mais divers schémas de mesure quantique non destructive sont maintenant accessibles, afin de mesurer la présence et le nombre de photons sans les détruire [438, 487] – voir également § 6.2 de [365]. La combinaison de cette possibilité avec les méthodes de l'électrodynamique en cavité a permis des expériences où il est possible d'avoir accès en temps réel au nombre de photons contenus dans une cavité [488].

Les atomes de Rydberg sont des atomes dans des niveaux d'énergie élevés, très proches du seuil d'ionisation ; ils possèdent un très grand dipôle électrique qui les couple fortement au champ électromagnétique. Parmi les niveaux de Rydberg, ceux correspondant à des atomes "circulaires" (où le nombre quantique $l$ prend sa valeur maximale) interagissent avec les photons de façon particulièrement simple et contrôlée. Ceci permet de les utiliser comme des sondes très sensibles des propriétés de ce champ, même si ce dernier ne contient que quelques photons. De plus, ils peuvent être ionisés et détectés avec une grande efficacité, avec un accès sélectif aux divers niveaux de Rydberg. Les techniques expérimentales actuelles permettent la production de jets atomiques de tels états de Rydberg, qui peuvent être envoyés à travers une cavité électromagnétique résonante afin de mesurer le nombre de photons qu'elle contient.

On pourrait penser à faire usage de l'absorption des photons par les

atomes, en envoyant les atomes un par un à travers la cavité, et en mesurant le niveau d'énergie dans lequel ils se trouvent avant et après le passage dans la cavité – mais évidemment cette méthode absorberait les photons et ne conduirait pas à une mesure non destructive. Une technique bien meilleure est de choisir un cas où la fréquence des photons dans la cavité diffère sensiblement de la fréquence de résonance des atomes (fréquence de Bohr associée à la transition entre les deux niveaux de Rydberg sélectionnés), de sorte que la probabilité d'absorption des photons reste négligeable. Du fait de l'interaction non résonnante entre atomes et photons, les atomes produisent alors des effets d'indice (effets dispersifs) pour les photons et, réciproquement, ces derniers produisent des déplacements des niveaux d'énergie des atomes ; on montre qu'il en résulte une augmentation de la fréquence de transition entre les deux niveaux atomiques qui est proportionnelle au nombre de photons dans la cavité.

L'idée est alors d'envoyer dans la cavité des atomes qui sont dans une superposition linéaire cohérente de deux états de Rydberg, de les laisser interagir avec les photons dans la cavité, et de mesurer à la sortie le changement de phase de la superposition cohérente induit par cette interaction. Comme le changement de phase est proportionnel au nombre de photons dans la cavité, on obtient ainsi une mesure de ce nombre. Cette méthode purement dispersive ne change pas l'énergie du champ électromagnétique (c'est-à-dire le nombre de photons) ; elle est non destuctive, ne change pas non plus l'énergie de l'atome à la sortie de la cavité, de sorte qu'elle fournit une mesure quantique proche d'une mesure idéale. La Figure X.5 schématise l'expérience.

Une difficulté expérimentale majeure est qu'un nombre suffisant d'atomes doit traverser la cavité pour conduire à une mesure raisonnablement précise, avant que le champ électromagnétique n'ait disparu par absorption dans les parois de la cavité. En d'autres termes, il est impératif d'utiliser une cavité de facteur de surtension $Q$ extrêmement élevé. Cette performance a été réalisée grâce à l'utilisation d'une excellente cavité supraconductrice de sorte que, dans l'expérience, des centaines d'atomes peuvent traverser la cavité avant que le nombre de photons ne change. En observant continûment l'état des atomes qui la quittent, on a accès à une mesure continue et non destructive du nombre de photons. Initialement, on injecte dans la cavité un état cohérent du rayonnement, donc un état où le nombre de photons n'est pas bien défini. Cependant, dès que quelques atomes ont traversé la cavité et que leur phase est mesurée à la sortie, le système est projeté sur un état où le nombre de photons est fixé. Ensuite, au fur et à mesure que les photons sont absorbés dans les parois de la cavité, ce nombre diminue progressivement par sauts quantifiés, que l'on observe sur le signal enregistré ; à la fin plus aucun photon ne reste dans la cavité. Deux exemples d'enregistrements obtenus de cette façon sont montrés dans la Figure X.6.

La discussion de la fin du § A peut être répétée dans un cas particulière-

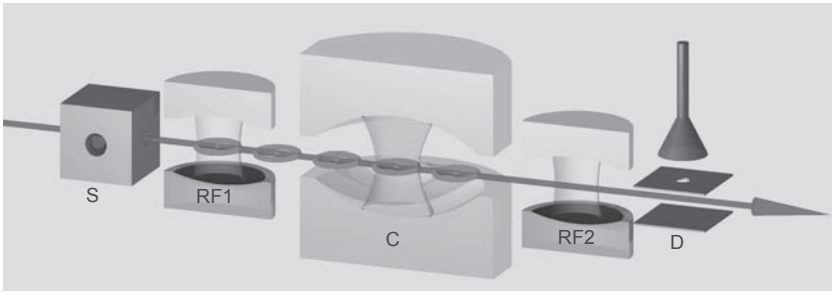


FIGURE *X.5 – Un jet d'atomes dans un niveau très excité (niveau de Rydberg circulaire) est créé par une source S. Chaque atome traverse, d'abord une région où un générateur RF1 excite de façon cohérente la transition entre le niveau de Rydberg initial et un niveau très voisin, puis une cavité C dont la fréquence de résonance est déplacée par rapport à celle de la fréquence de transition atomique, puis une autre région où un appareil RF2 (bloqué en phase avec RF1) excite à nouveau la même transition. Les appareils RF1 et RF2 réalisent ce que l'on appelle "spectroscopie Ramsey" sur chaque atome : la première interaction crée un dipôle oscillant à la différence des fréquences de Bohr des deux niveaux, et le second détecte la phase de ce dipôle, y compris son évolution due au passage dans la cavité C. Comme le dipôle accumule lors du passage dans C un déphasage qui dépend du nombre de photons dans la cavité, les populations finales des deux niveaux de Rydberg concernés dépendent également de ce nombre de photons. Le détecteur D y donne donc directement accès en mesurant cette population. La cavité n'étant pas résonante à la fréquence du dipôle atomique, l'interaction est dispersive et ne modifie pas le nombre de photons qu'elle contient, de sorte qu'on obtient une méthode de mesure non destructive, appelée "QND measurement" en anglais (figure aimablement fournie par J.M. Raimond).*

ment clair, en termes de nombre d'atomes qui sont nécessaires pour estimer avec une bonne probabilité qu'un saut s'est produit [488]. Ce que l'on observe dans une réalisation donnée de l'expérience n'est pas l'évolution continue prédite par l'équation de Schrödinger, qui est la même pour toutes les réalisations ; à chacune d'entre elles, on observe des marches bien visibles, qui tombent à des instants différents à chaque fois. L'équation de Schrödinger ne donne que la moyenne des observations sur un grand nombre d'expériences ; les marches ne peuvent pas être expliquées par cette équation, et demandent donc qu'un autre ingrédient y soit ajouté. C'est un autre cas particulièrement spectaculaire où l'on peut voir "la réduction du paquet d'ondes se produisant directement sous ses yeux".

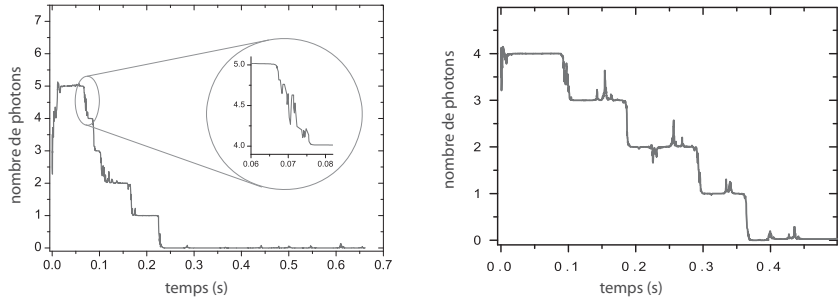


FIGURE *X.6 – Observation continue du nombre de photons contenus dans une cavité électromagnétique. On mesure le changement de phase accumulé par des atomes de Rydberg traversant la cavité ; l'échelle horizontale est en secondes, l'échelle verticale donne le nombre de photons dans la cavité. Initialement, la cavité est excitée par un champ cohérent d'amplitude très faible dont le nombre de photons n'est pas bien défini ; sous l'effet du processus de mesure quantique, il saute vers un état de nombre bien défini de photons, 5 pour la partie gauche de la figure, 4 pour la partie droite. Ensuite les photons sont progressivement absorbés par les parois de la cavité et disparaissent l'un après l'autre. Dans l'expérience, ce processus est constamment observé en temps réel (figure aimablement fournie par J.M. Raimond).*

## D. Phase spontanée de condensats de Bose-Einstein

Une notion importante en mécanique quantique est celle de "particules identiques", qui conduit à introduire un "postulat de symétrisation" spécifiant les formes possibles du vecteur d'état d'un système de particules identiques. Ceci conduit à distinguer deux grandes classes de particules, les bosons et les fermions. Ces derniers sont soumis au principe d'exclusion de Pauli : deux fermions ne peuvent occuper le même état quantique. En revanche, les bosons peuvent parfaitement être très nombreux à occuper un même état individuel, comme le font par exemple les photons d'un faisceau laser monomode. Un autre exemple est donné par les condensats de Bose-Einstein ; dans un gaz suffisamment dilué à très basse température, ces condensats peuvent effectivement être représentés avec une très bonne approximation, par un état où tous les $N$ bosons sont dans le même état individuel $|\varphi\rangle$ :

$$|\Psi\rangle = |1 : \varphi\rangle\, |2 : \varphi\rangle \ldots |N : \varphi\rangle \tag{X-1}$$

Dans ce cas, et contrairement à ce qui se produit pour une seule particule (§ A-2 du Chapitre VIII), la détermination de l'état $|\varphi\rangle$ – ou de sa fonction d'onde $\varphi(\mathbf{r})$ – devient possible, et l'on dit parfois que cette fonction d'onde devient alors l'analogue d'un champ classique. Or, classiquement, deux paquets d'onde d'un même champ peuvent donner lieu à des effets d'interférence. Par

analogie, la question se pose : si l'on prépare indépendamment deux condensats de Bose-Einstein faits d'atomes identiques, peut-on observer des effets d'interférence entre eux ? La réponse à la question fait intervenir les effets quantiques de la mesure, et a été clarifiée par Javanainen et Yoo [489] ainsi que par d'autres auteurs (voir par exemple les références de [128]).

### D-1. Interférences dans une région de l'espace

Supposons que $N$ bosons identiques occupent l'état $|\varphi\rangle$ et $P$ autres (identiques aux premiers) l'état $|\chi\rangle$ ; lorsque les fonctions d'onde $\varphi(\mathbf{r})$ et $\chi(\mathbf{r})$ se recouvrent, la première idée qui pourrait venir à l'esprit serait de supposer que les fonctions d'onde interfèrent exactement comme des champs classiques, de sorte que la probabilité de trouver une particule au point $\mathbf{r}$ est proportionnelle à :

$$|\varphi(\mathbf{r}) + \chi(\mathbf{r})|^2 \tag{X-2}$$

De même que, par exemple en optique classique, l'intensité au point $\mathbf{r}$ contient un terme d'interférence entre les champs électriques de deux faisceaux lumineux qui se croisent, cette expression contient des termes croisés d'interférence en $\varphi^*(\mathbf{r})\chi(\mathbf{r})$ et $\varphi(\mathbf{r})\chi^*(\mathbf{r})$. Mais, en mécanique quantique, la phase de chacune des fonctions d'onde est arbitraire : on ne change rien aux propriétés physiques associées aux fonctions d'onde si on les remplace par $e^{i\alpha}\varphi(\mathbf{r})$ et $e^{i\beta}\chi(\mathbf{r})$, alors que cela change bien évidemment les termes croisés de (X-2). Il n'est donc pas possible que la probabilité quantique de trouver une particule en un point $\mathbf{r}$ soit donnée par cette formule classique. C'est d'ailleurs ce que confirme un calcul quantique explicite : lorsqu'on détecte la première particule, sa probabilité de présence est simplement la somme :

$$|\varphi(\mathbf{r})|^2 + |\chi(\mathbf{r})|^2 \tag{X-3}$$

Il faut donc directement ajouter les probabilités correspondant, soit au cas où la particule détectée était initialement dans l'état $|\varphi\rangle$, soit à celui où elle était dans l'état $|\chi\rangle$, sans aucun terme d'interférence. Pour la détection de la première particule, la phase relative des deux condensats est donc inobservable, tout simplement parce qu'elle n'existe pas : rien dans la définition de l'état initial ne permet de la fixer. On peut d'ailleurs interpréter ce résultat en termes d'une relation d'incertitude entre phase et nombre de particules, semblable à la relation d'incertitude temps-énergie : si le nombre de particules est parfaitement défini, comme c'est le cas ici, la phase est totalement indéterminée.

Mais, comme l'ont montré les auteurs de [489], la situation devient plus intéressante si l'on suppose que les positions de plusieurs particules sont mesurées et si, pour une réalisation donnée de l'expérience, on étudie des corrélations entre ces positions. Le calcul montre alors que, au fur et à mesure

que les positions sont mesurées, la phase relative devient de mieux en mieux définie. Déjà, la toute première mesure de position crée une certaine information sur cette phase[1], qui joue un rôle pour la seconde mesure ; on montre que sa distribution, au lieu d'être totalement indépendante de la phase, est alors donnée par une sinusoïde dont les maxima et minima dépendent de la position mesurée. Puis, au fur et à mesure que les mesures s'accumulent, la distribution de la phase est donnée par le produit d'un nombre de plus en plus élevé de sinusoïdes, qui présente un pic de plus en plus étroit, rendant ainsi la phase de mieux en mieux déterminée ; on se rapproche ainsi d'une situation parfaitement classique où la phase est fixée. C'est donc un processus quantique intéressant où, initialement, la phase relative n'existait pas, mais où les projections successives dues à la mesure quantique la font émerger progressivement et lui attribuent une valeur de mieux en mieux déterminée. Tout semble se passer comme si la phase avait existé depuis le début pour chaque réalisation de l'expérience, sans que sa valeur soit connue. Toutefois, d'une réalisation à l'autre, la nouvelle valeur qui émerge est totalement différente, sans aucune corrélation avec la précédente.

Des expériences effectuées dans le groupe de Ketterle à MIT avec des condensats d'atomes de Sodium ont permis de vérifier ces prédictions [490]. Deux condensats de Bose-Einstein étaient préparés dans des pièges séparés, puis relâchés afin de leur permettre de se recouvrir spatialement ; on mesurait ensuite par absorption optique la position des atomes dans la région de recouvrement. La Figure X.7 montre le résultat obtenu pour une réalisation donnée de l'expérience : on observe effectivement des franges avec une phase bien définie, alors qu'elle n'existait pas avant la mesure ; ceci constitue donc un cas où la réduction du paquet d'ondes apparaît de façon bien visible à l'œil nu. Cette phase est aléatoire et, d'une expérience à l'autre, totalement incorrélée ; en d'autre termes, si l'on fait la somme des mesures obtenues dans plusieurs réalisations, les franges disparaissent, comme le prédit la théorie. Une particularité de l'expérience est que la grandeur physique qui apparaît (la phase) fixe la valeur d'une grandeur physique macroscopique (la densité du gaz en chaque point de la région d'interférence), ce qui permet d'observer directement les effets de la projection du vecteur d'état.

### D-2. Une variable supplémentaire ?

La question qui se pose alors tout naturellement est la même que pour toute mesure quantique : faut-il réellement penser, comme nous y invite la mécanique quantique standard, que c'est la mesure qui crée la valeur de la grandeur physique mesurée, ici la phase ? Ou au contraire que la mesure

[1] Par exemple, la mesure indique qu'elle ne peut pas prendre une valeur qui donnerait lieu à interférence totalement destructive à la position mesurée (en supposant pour simplifier que les deux intensités sont égales).

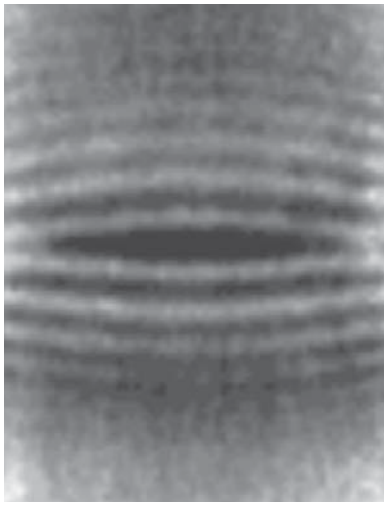

FIGURE *X.7 – Observation de franges d'interférence lorsque deux condensats de Sodium sont préparés dans des pièges séparés, puis libérés afin de pouvoir se recouvrir spatialement. Les franges ont, pour chaque réalisation, une phase bien définie, mais leur phase est aléatoire et totalement incorrélée d'une réalisation de l'expérience à la suivante (figure aimablement fournie par W. Ketterle).*

ne fait que révéler une phase qui existait déjà auparavant ? Lorsqu'une variable est macroscopique, comme ce peut effectivement être le cas pour la phase d'une figure d'interférence, il semble relativement peu naturel d'admettre qu'elle puisse véritablement être créée par la mesure, par exemple à la suite d'un effet de perturbation incontrôlée de l'appareillage. C'est donc la question des variables supplémentaires qui se pose à nouveau, mais cette fois dans un cadre macroscopique, rappelant la façon dont la discussion du chat de Schrödinger transpose au monde macroscopique une indétermination quantique.

Leggett et Sols [491] ont donné une discussion d'une situation semblable, celle où un courant Josephson apparaît entre deux supraconducteurs, la valeur de ce courant étant fixée par la différence des deux phases quantiques supraconductrices. Ces auteurs posent la question de savoir si une telle phase, avec ses conséquences sur un courant macroscopique, peut véritablement apparaître sous l'effet d'une mesure qui, elle, peut être faite grâce à un appareil très petit : "Est-ce que l'acte de 'regarder pour voir' si un courant Josephson s'écoule peut en lui-même forcer le système à occuper un état propre du courant, et donc à acquérir une phase relative ?... Se peut-il vraiment que, lorsque l'on place par exemple une minuscule aiguille de boussole près du

système[2], avec un faisceau lumineux très faible pour lire sa position, on force le système à 'réaliser' une valeur macroscopique définie d'un courant ? Le bon sens se révolte contre cette idée, et nous pensons que dans ce cas le bon sens a raison".

### D-3. Non-localité de la phase

On peut ajouter une composante supplémentaire à l'argument en supposant que l'interférence se produit, non pas en une région de l'espace, mais en deux régions très éloignées où opèrent Alice et Bob. On rejoint alors une situation analogue à celle de la discussion des mesures sur deux spins éloignés (§ A-1 du Chapitre IV) ; ce sont alors les phases des figures d'interférence qui sont corrélées au lieu des directions des spins. Pour pousser plus loin l'analogie, il est donc commode de raisonner dans le cas des condensats à spin[3], dont la phase relative se traduit par l'apparition d'une valeur moyenne de la composante transverse du spin dans toutes les régions de recouvrement. La situation correspondante est schématisée sur la Figure X.8 : deux condensats, l'un de spin + et l'autre de spin −, s'étendent dans l'espace et se recouvrent dans deux régions éloignées, où Alice et Bob effectuent des mesures des composantes transverses des spins. Les prédictions de la mécanique quantique dans un tel cas sont une généralisation directe de ce qui a été décrit au § D-1 : lorsqu'Alice effectue la première mesure, le résultat obtenu est totalement aléatoire ; mais, au fur et à mesure que les mesures s'accumulent, les résultats font émerger une phase relative de mieux en mieux définie – ce qui correspond à une direction transverse du spin qui est elle aussi de mieux en mieux fixée ; au bout d'un certain temps, les mesures selon cette direction donnent des résultats pratiquement certains, et l'on peut dire qu'une composante transversale du spin (ou du moment cinétique) a émergé sous l'effet des mesures. Si la région d'interférence où opère Alice contient un nombre macroscopique de particules, cette orientation est macroscopique.

Toujours selon la mécanique quantique standard, l'effet des mesures effectuées par Alice est de faire apparaître également une orientation des spins dans la région de Bob, de mêmes caractéristiques, et ceci sans aucun temps de propagation d'une influence entre les deux régions. Mais est-il vraiment

[2]Le but de cette aiguille est de mesurer, par sa déviation, le champ magnétique créé par le courant Josephson macroscopique.

[3]Les "spins" que nous introduisons ne sont pas nécessairement de véritables spins. En mécanique quantique, tout système à deux niveaux est équivalent à un spin 1/2 ; parler en termes de spins est une façon commode de décrire les états et les observables associées aux deux états. Ici, les deux états peuvent par exemple être deux sous-niveaux quelconques de l'état fondamental d'un atome. Des mesures de spin longitudinal sont alors associées à la mesure d'observables représentées par des matrices 2x2 qui sont diagonales dans la base des états individuels peuplés par les condensats ; des mesures de spin transversales correspondent à des matrices non diagonales dans cette même base.

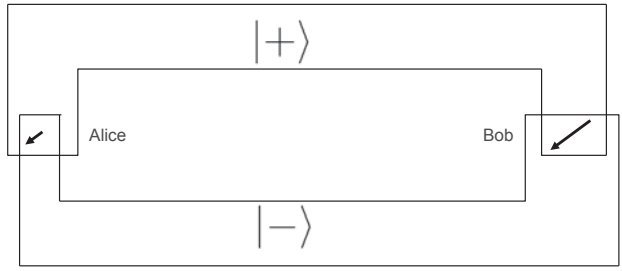


FIGURE *X.8 – La figure schématise les fonctions d'onde de deux condensats, l'un correspondant à des particules dont le spin est dans l'état* $|+\rangle$*, l'autre à des particules dont le spin est dans l'état* $|-\rangle$*, qui se recouvrent dans deux régions de l'espace A et B. Dans ces deux régions, deux opérateurs Alice et Bob mesurent une composante transverse (dans le plan perpendiculaire à l'axe de quantification initial) du spin des particules. Initialement, la phase relative des deux condensats est totalement indéterminée : lorsqu'Alice effectue la mesure sur le premier spin, le résultat qu'elle trouve est totalement aléatoire. Mais, au fur et à mesure qu'elle accumule des mesures, ces dernières agissent sur le système quantique et la phase relative devient de mieux en mieux déterminée ; au bout d'un certain temps, elle est pratiquement fixée, et l'on peut dire que le système possède une orientation transversale bien déterminée dans les deux régions de recouvrement.*
*Ce qui est surprenant est que, sous l'effet des mesures effectuées par Alice, une orientation parallèle apparaît également dans la région de Bob, et ceci sans aucune interaction, et de plus sans délai quelle que soit la distance entre Alice et Bob. On retrouve alors la situation de l'argument EPR, à ceci près qu'il porte maintenant sur des orientations de spin transversales qui peuvent être macroscopiques si le nombre de particules est très grand.*

possible qu'une mesure effectuée par Alice sur un petit nombre de spins, une centaine par exemple, détermine instantanément l'apparition d'une orientation macroscopique dans le laboratoire de Bob, surtout si ce dernier est très éloigné ? On rejoint ainsi la logique de l'argument EPR, mais dans un cas où les "éléments de réalité" concernent des grandeurs macroscopiques [128], ce qui rend l'argument encore plus frappant. Peut-on vraiment admettre qu'une orientation macroscopique soit créée dans le laboratoire de Bob sans qu'intervienne la moindre interaction locale, et apparaisse en quelque sorte à partir

de rien ? Ou faut-il rejoindre EPR et dire que cette orientation existait nécessairement depuis le début de l'expérience, de sorte que les mesures ne font que traduire l'existence d'une phase initiale tirée au sort ? Cette phase serait alors la variable qu'il convient d'ajouter à la mécanique quantique pour la compléter. Comme il s'agit maintenant de grandeurs physiques macroscopiques, donc a priori directement accessibles à l'expérience humaine, il semble plus délicat de leur refuser le qualificatif d'élément de réalité physique indépendamment des appareils de mesure ; il est difficile de deviner ce que Bohr aurait répondu à cette version de l'argument EPR.

Dans un tel cas, la conservation du moment cinétique pose des questions particulières. Comment le moment cinétique dans la région de Bob peut-il varier instantanément sous l'effet de mesures effectuées par Alice en un point arbitrairement éloigné[4] ? Si l'on considère uniquement la région où Alice effectue ses mesures, aucune difficulté particulière ne se présente. L'appareil de mesure qu'elle utilise, pour pouvoir mesurer le moment cinétique des spins, doit interagir avec eux par un hamiltonien de couplage qui contient leur moment cinétique, ainsi que le sien propre, ce qui autorise un transfert entre l'un et l'autre. On peut alors supposer que la quantité de moment transférée dépende du résultat de la mesure de façon que le moment cinétique total soit parfaitement conservé ; tout paradoxe est alors levé par un effet de recul de l'appareil de mesure. En revanche, l'hamiltonien de couplage en question commute certainement avec tous les opérateurs associés à des grandeurs localisées dans la région de Bob ; il lui est donc impossible de changer le moment cinétique dans cette région. On comprend alors mal comment l'appareil de mesure d'Alice peut faire apparaître à distance un tel moment cinétique. De plus, si Alice effectue sa mesure sur un petit nombre de spins il semble paradoxal de considérer, afin de conserver le moment cinétique total, que son appareil de mesure acquière par effet de recul le moment cinétique associé au très grand nombre de spins dans la région de Bob. Si l'on pense plutôt que l'appareil de mesure d'Alice ne peut acquérir de moment cinétique supérieur à la valeur maximale qu'autorise la mécanique quantique pour les spins avec lesquels il interagit, on est conduit à l'abandon de la conservation du moment cinétique. Ici aussi, on est donc tenté de suivre EPR et de lever toute difficulté en considérant que le moment cinétique macroscopique contenu dans la région de Bob existait avant toute mesure, ce qui revient à compléter la mécanique quantique en lui ajoutant une variable supplémentaire de phase.

Même si l'on modifie la mécanique quantique pour lui adjoindre cette phase, ce n'est pas pour autant qu'elle se comporte toujours comme une grandeur classique permettant de restaurer une notion stricte de localité. En fait, la situation reste relativement semblable au cas habituel de deux spins,

[4] Nous considérons ici une réalisation unique de l'expérience. Pour un grand nombre de mesures, le moment cinétique peut prendre toutes les directions transverses, et se moyenne donc à zéro dans les deux régions de l'espace ; aucun paradoxe n'apparaît alors.

où le théorème de Bell contraint les éléments de réalité EPR à évoluer de façon non locale si l'on veut reproduire toutes les prédictions de la mécanique quantique. Ici, lorsque la phase relative est mesurée en deux régions différentes de l'espace, un modèle où la phase existerait depuis le début de l'expérience (tout en étant inconnue) ne peut reproduire toutes les prédictions de la mécanique quantique [130]. Cette impossibilité apparaît lorsque les composantes des spins selon des directions différentes sont mesurées, et prend la forme d'inégalités BCHSH qui sont violées par la mécanique quantique ; de surcroît, et contrairement à ce qu'on aurait pu attendre, ces violations ne tendent pas vers zéro pour les systèmes d'un très grand nombre de particules[5], mais restent constantes.

Pour finir, les états de Fock (condensats de Bose-Einstein) permettent effectivement de transposer au monde macroscopique l'argument EPR ainsi que le théorème de Bell, leur donnant un éclairage nouveau.

[5]Les angles entre les directions des composantes à mesurer, eux, tendent vers zéro quand le nombre de particules tend vers l'infini, mais pas le taux de violation des inégalités.

# Chapitre XI

# Diverses interprétations et reconstructions de la mécanique quantique

Depuis longtemps, et presque simultanément avec l'apparition de l'interprétation "orthodoxe" de Copenhague, d'autres interprétations de la mécanique quantique ont été proposées. Une discussion exhaustive de toutes les versions qui sont apparues au cours du temps serait probablement une tâche impossible. En effet, si l'on peut distinguer de grandes familles parmi les interprétations, il est également possible de les combiner de nombreuses façons, avec un nombre presque infini de nuances. L'interprétation standard elle-même, nous l'avons vu, n'est pas une construction monolithique, mais peut être l'objet de variations diverses. C'est pourquoi nous nous limiterons dans ce chapitre à une description générale, et donc nécessairement superficielle, des principales familles d'interprétations.

Nous commencerons par une brève description de quelques attitudes fréquentes que l'on remarque dans les laboratoires parmi les chercheurs, qui ne portent pas nécessairement une attention soutenue aux fondements de la mécanique quantique, même lorsqu'ils font des expériences de physique quantique. En pratique, ils utilisent des règles pragmatiques qui sont parfaitement suffisantes pour interpréter leurs expériences tout en évitant les questions délicates, concernant par exemple la nature profonde du processus de mesure. Une possibilité est d'utiliser l'interprétation "des corrélations", qu'on peut certes trouver minimale, mais qui s'avère suffisante dans toutes les situations pratiques ; elle est donc acceptée comme règle commune par une très large majorité de physiciens, y compris ceux qui préfèrent y ajouter d'autres éléments pour arriver à une interprétation plus précise de la théorie. Nous continuerons ensuite en discutant diverses familles d'interprétations qui sont moins répandues, comme celle des variables supplémentaires/cachées, la

dynamique de Schrödinger modifiée, les histoires cohérentes, l'interprétation d'Everett, etc. Toutes tendent à changer le statut du postulat de réduction du vecteur d'état ; certaines l'incorporent dans l'évolution de Schrödinger normale, d'autres le considèrent comme la conséquence d'un autre processus physique qui est postulé comme plus fondamental, d'autres encore utilisent un formalisme où la réduction est dissimulée, voire même n'existe pas. Mais l'objectif général reste toujours le même : résoudre les problèmes et les questions qui sont conséquences du processus de mesure quantique, la coexistence de deux postulats pour l'évolution du vecteur d'état, et l'émergence de l'unicité macroscopique.

## A. Pragmatisme dans les laboratoires

Jusqu'à aujourd'hui les difficultés fondamentales de la mécanique quantique ont eu peu d'impact sur son utilisation pratique dans les laboratoires. Bien heureusement en un sens, les physiciens savent comment éviter ces difficultés en appliquant suffisamment de bon sens et d'intuition physique, même si à un niveau fondamental la logique qui sous-tend cette méthode peut rester relativement vague. Cette attitude a permis de nombreuses découvertes importantes, alors qu'elles n'auraient pas nécessairement été possibles si leurs auteurs étaient restés bloqués au niveau des fondements de la théorie ; il était plus productif de la mettre en œuvre de la façon la plus efficace possible dans des cas concrets. De plus, comme noté dans l'introduction du Chapitre X, bien souvent on n'a pas réellement besoin d'appliquer les postulats concernant la mesure (règle de Born et réduction du vecteur d'état), l'équation de Schrödinger étant suffisante pour calculer des moyennes. On comprend donc que les préoccupations relatives aux difficultés conceptuelles de la mécanique quantique ne soient pas considérées comme de première priorité.

Cela dit, conceptuellement, même un physicien très pragmatique n'est pas mécontent d'avoir une explication à proposer pour l'unicité des observations macroscopiques ; la cohérence logique demande de trouver une méthode pour arriver à l'incorporer dans la mécanique quantique. Dans un premier temps, nous nous limiterons à la description de trois stratégies courantes, et d'ailleurs pas nécessairement exclusives. La première (§ A-1) est de casser "à la main" la chaîne de von Neumann dès qu'elle va "évidemment" trop loin ; l'unicité macroscopique est ainsi en quelque sorte plaquée par dessus le formalisme de la théorie. Une autre stratégie fréquente (§ A-2) est de faire usage de l'interprétation "des corrélations", point de vue où les événements macroscopiques sont considérés comme uniques par définition (ou par simple bon sens), le rôle de la théorie étant alors simplement de relier par des probabilités les événements de préparation aux événements de mesure et d'observation. Enfin d'autres scientifiques préfèrent donner un rôle central dans une théorie telle que la mécanique quantique à la notion d'information (§ A-3).

### A-1. Interrompre "à la main" la chaîne de von Neumann

C'est souvent de façon relativement implicite, basée sur l'intuition physique, que les physiciens mettent une limite à la chaîne infinie de von Neumann ; nous tentons ici de rendre cette approche plus explicite en discutant deux exemples : décohérence macroscopique modifiée, effet de la prise de conscience par un observateur.

#### A-1-a. Décohérence macroscopique

Une règle empirique qu'on peut utiliser est de considérer que, dès qu'une décohérence "significative" s'est produite, la chaîne de von Neumann s'arrête automatiquement : toutes ses branches, sauf une, disparaissent spontanément, la Nature choisissant cette branche unique par un processus physique inconnu. En d'autres termes, on associe systématiquement émergence à intrication et décohérence (l'émergence de l'unicité est associée à l'intrication avec un environnement macroscopique et la décohérence qui en résulte). Par exemple, dès qu'un appareil de mesure fait partie de l'expérience et qu'il permet d'enregistrer des résultats, on considère qu'il n'enregistre qu'un seul résultat, indépendamment du fait qu'un être humain observe ce résultat ou non. Nous l'avons vu plus haut (Chapitre VII), de toute façon il est absolument sans espoir de jamais voir les effets physiques des superpositions cohérentes une fois qu'elles se sont propagées trop loin dans l'environnement ; on ne prend donc aucun risque de contradiction avec les expériences si l'on suppose qu'elles disparaissent tout simplement. La difficulté dans ce point de vue est, bien sûr, de définir exactement le mot "significative" pour qualifier la décohérence.

Briser ainsi "à la main" la chaîne de von Neumann n'est après tout pas très différent d'une application du postulat de réduction du vecteur d'état légèrement modifié : au lieu de l'acte de prise de connaissance consciente de la mesure, on postule que c'est la décohérence à une certaine échelle qui déclenche la réduction par un mécanisme inconnu. En d'autres termes, on croit à l'équation de Schrödinger, mais pas au-delà d'une certaine limite : jusqu'au point où elle commence à contenir des corrélations avec l'environnement qui deviennent macroscopiques. La décohérence fixe quelque part la frontière entre le monde de Schrödinger et celui de Born (introduction du Chapitre II). Ce "postulat de décohérence macroscopique" n'est pas très différent non plus du point de vue de Bohr, puisqu'on y invoque également un monde macroscopique qui est accessible à notre expérience humaine et qui est unique. La non-localité est contenue de façon inhérente dans la notion d'environnement du vecteur d'état, ce qui permet de rendre compte d'expériences de type Bell : lorsque deux spins dans un état singulet sont soumis à des mesures éloignées, la corrélation avec le monde macroscopique et la décohérence supplémentaire que l'on postule font intervenir à la fois les deux

régions de l'espace, d'une façon non locale.

Certes, on peut voir cette position plus comme une phénoménologie que comme une interprétation complètement élaborée de la théorie ; des questions comme "précisément à quel degré d'intrication la chaîne de von Neumann se résout-elle en une seule branche ?" sont laissées au simple bon sens et au jugement personnel. On peut remarquer que les théories mettant en jeu une dynamique de Schrödinger modifiée (§ K) sont précisément construites pour rationaliser cette approche, en y introduisant un mécanisme physique précis pour stopper la chaîne de von Neumann. Elles fournissent des réponses précises à ces questions, mais le mécanisme qu'elles mettent en jeu pour permettre l'émergence d'une branche unique est intrinsèque au système (il peut mettre en jeu les masses des particules), sans être nécessairement relié à l'environnement.

#### A-1-b. Effet de la prise de conscience

Nous avons déjà mentionné au § C du Chapitre II, l'interprétation quelquefois nommée "interprétation de Wigner" de la mécanique quantique [65], où la brisure de la chaîne de von Neumann intervient lorsqu'un observateur prend conscience du résultat. Ce n'est pas très différent que de stopper la chaîne de von Neumann lorsqu'elle atteint un appareil de mesure, mais ici la chaîne est brisée plus tard, seulement au moment où la superposition met en jeu une conscience. Un point de vue similaire a été introduit en 1939 par London et Bauer [57], qui mettent l'accent sur le fait que la réduction du vecteur d'état reconstruit un état pur à partir d'un mélange statistique du sous-système mesuré (voir § C-3 du Chapitre VII), et "le rôle essentiel joué par la conscience de l'observateur dans cette transition entre un mélange statistique et un état pur" ; ils attribuent ce rôle spécial de la conscience à la faculté d'introspection d'observateurs doués de conscience. D'autres préfèrent invoquer des "propriétés spéciales" des courants électriques dans un cerveau humain qui correspondent à la prise de conscience.

Quoi qu'il en soit, le bon sens fournit de toute façon une limite supérieure, une frontière au-delà de laquelle la chaîne de von Neumann ne se propage certainement pas ; que la propagation cesse exactement à cette frontière ou un peu avant, est une autre question. D'ailleurs il est possible que Wigner lui-même ait vu son introduction du rôle de la conscience comme un cas d'école extrême à ne pas dépasser (un peu comme le chat de Schrödinger a été introduit par Schrödinger), le but étant juste d'illustrer la nécessité d'un processus non linéaire qui permette de prédire l'unicité du résultat final ; nous reviendrons sur la dynamique de Schrödinger modifiée dans le § K. En tous cas, le mérite de l'idée est de montrer comment la logique de la notion de mesure dans l'interprétation standard peut être poussée dans ses retranchements : effectivement, comment pourrait-on attribuer des propriétés

aussi spéciales à l'opération de mesure sans supposer que l'esprit humain lui aussi possède des propriétés très spéciales ?

### A-2. Interprétation des corrélations

L'interprétation des corrélations est plus ou moins une composante commune à toutes les autres interprétations. Certains la considèrent comme "minimaliste", car ils pensent qu'elle ne fournit pas vraiment une interprétation totalement développée. Mais, justement, le fait qu'elle soit une composante commune en fait tout l'intérêt : après tout, chacun est libre de lui ajouter des éléments supplémentaires, par exemple plus de réalisme, s'il la trouve trop pauvre. Nous utiliserons les mots "interprétation des corrélations" pour la décrire, puisqu'elle met l'accent sur les corrélations entre les résultats d'expériences successives.

L'interprétation des corrélations part du postulat que les événements macroscopiques (par exemple les mesures) possèdent deux propriétés : l'unicité (pas de chat de Schrödinger), qu'on ne remet pas en cause mais que l'on postule, et leur caractère stochastique. Le but de la théorie est alors de fournir les probabilités correspondant à toutes les situations possibles de préparation, d'évolution, et de mesures successives sur le système.

#### A-2-a. Calcul de la probabilité associée à une séquence de mesures

Commençons par évaluer la probabilité associée avec une séquence générale de mesures effectuées à des instants différents. Nous supposons que la mesure[1] d'une quantité physique associée à un opérateur $M$ est réalisée à l'instant $t_1$, donnant des résultats possibles $m_i$, $m_j$, ... ; cette mesure est suivie d'autres, d'abord de l'observable $N$ à l'instant $t_2$ avec les résultats possibles $n_k$, $n_l$, ..., puis de l'observable $O$ à l'instant $t_3$, etc. Initialement, le système est décrit par un état pur normalisé $|\Psi(t_0)\rangle$. Entre les instants $t_0$ et $t_1$ cet état évolue de $|\Psi(t_0)\rangle$ vers $|\Psi(t_1)\rangle$ selon l'équation de Schrödinger :

$$|\Psi(t_1)\rangle \ = U(t_1, t_0)\,|\Psi(t_0)\rangle \tag{XI-1}$$

où $U(t', t)$ est l'opérateur unitaire d'évolution entre les instants $t$ et $t'$ ; nous pouvons développer ce nouvel état sur ses composantes correspondant aux divers résultats possibles de la mesure effectuée à l'instant $t_1$ :

$$|\Psi(t_1)\rangle = \sum_m |\Psi_m(t_1)\rangle \tag{XI-2}$$

où $|\Psi_m(t_1)\rangle$ est obtenu en appliquant au ket $|\Psi(t_1)\rangle$ le projecteur $P_M(m)$ sur le sous-espace correspondant au résultat $m$ obtenu en mesurant $M$ (*cf.*

[1] Nous supposons ici que toutes les mesures sont idéales ; si des mesures non idéales étaient prises en compte, un traitement plus élaboré serait nécessaire.

§ B-2-a du Chapitre I) :

$$|\Psi_m(t_1)\rangle = P_M(m)\,|\Psi(t_1)\rangle \tag{XI-3}$$

Les termes dans la somme sur $m$ de (XI-2) sont tous orthogonaux entre eux ; ils ne donneront jamais lieu à des effets d'interférence dans le futur, puisqu'ils correspondent à des résultats de mesure différents. En fait, chacun de ces termes se corrèle à un état orthogonal de l'environnement (l'aiguille du cadran de mesure de l'appareil par exemple) de sorte que la décohérence se charge de détruire tout effet d'interférence éventuel (*cf.* § C-3 du Chapitre VII). Au lieu de faire un calcul complet incluant l'état de l'environnement, nous prenons donc ici le point de vue plus simple où cet environnement est ignoré et où les diverses composantes orthogonales $|\Psi_m(t_1)\rangle$ de $|\Psi(t_1)\rangle$ sont considérées comme indépendantes les unes des autres.

Entre les instants $t_1$ et $t_2$, l'état $|\Psi_m(t_1)\rangle$ évolue sous l'effet de l'équation de Schrödinger et devient un état $|\Psi_m(t_2)\rangle$ donné par :

$$|\Psi_m(t_2)\rangle \;= U(t_2,t_1)\,|\Psi_m(t_1)\rangle \tag{XI-4}$$

Pour la seconde mesure, le processus se répète ; nous développons ce nouvel état selon :

$$|\Psi_m(t_2)\rangle = \sum_n |\Psi_{m,n}(t_2)\rangle \tag{XI-5}$$

où $|\Psi_{m,n}(t_2)\rangle$ est obtenu par l'action du projecteur $P_N(n)$ sur le sous-espace correspondant au résultat $n$ obtenu par mesure de $N$ :

$$|\Psi_{m,n}(t_2)\rangle = P_N(n)\,|\Psi_m(t_2)\rangle \tag{XI-6}$$

A nouveau, nous considérons les évolutions de chaque composante $|\Psi_{m,n}(t_2)\rangle$ comme indépendantes et, si une troisième mesure est effectuée à un instant ultérieur $t_3$, elle engendre une décomposition de plus, et ainsi de suite. On peut alors s'assurer (Appendice G) que la probabilité d'une séquence quelconque de mesures $m$, $n$, $p$, etc., est tout simplement la norme du vecteur d'état final :

$$\mathcal{P}(m,t_1;n,t_2;p,t_3;...;q,t_r) = |\,\langle\Psi_{m,n,p,...,q}(t_r)\,|\Psi_{m,n,p,...,q}(t_r)\rangle\,|^2 \tag{XI-7}$$

La probabilité est donc le carré de la norme de la "branche" du vecteur d'état ayant subi toutes les projections successives, aux instants correspondant à toute la séquence de mesures.

Cette formule peut également être écrite en termes de l'opérateur densité initial $\rho(t_0)$ :

$$\rho(t_0) = |\Psi(t_0)\rangle\,\langle\Psi(t_0)| \tag{XI-8}$$

Dans le point de vue de Heisenberg (pour plus de détails sur ce calcul, voir Appendice G), les projecteurs $P_M(m)$ et $P_N(n)$ deviennent des opérateurs

dépendant du temps $\widehat{P}_M(m,t)$ et $\widehat{P}_N(n,t)$. Dans le cas où deux mesures sont effectuées, la probabilité d'obtenir le résultat $m$, suivi du résultat $n$, peut alors s'écrire[2] :

$$\mathcal{P}(m,t_1;n,t_2) = Tr\left\{\widehat{P}_N(n,t_2)\widehat{P}_M(m,t_1)\rho(t_0)\widehat{P}_M(m,t_1)\widehat{P}_N(n,t_2)\right\} \quad \text{(XI-9)}$$

L'équation (XI-9) est parfois appelée formule de Wigner [3]. Elle peut aisément être généralisée à plus de deux mesures par l'addition de projecteurs supplémentaires des deux côtés dans l'ordre des temps inverses, et à des situations où $\rho(t_0)$ décrit un mélange statistique au lieu d'un état pur.

#### A-2-b. La réduction du vecteur d'état devient inutile

Nous avons présenté les équations (XI-7) et (XI-9) comme des conséquences du postulat de réduction du vecteur d'état de la mécanique quantique. Inversement, on peut prendre ces équations comme point de départ, comme un postulat en soi qui permet de calculer la probabilité d'une séquence quelconque de résultats de mesure. Le postulat de réduction du vecteur d'état devient alors superflu, puisque la règle de Born généralisée (à des temps multiples) est suffisante pour obtenir ces probabilités – certes, on peut faire valoir que la réduction du vecteur d'état est implicitement contenue dans l'opération de trace de (XI-9), mais il reste vrai que nulle référence explicite à la réduction n'est nécessaire. Dans cette optique, la projection du vecteur d'état associée à la mesure n'est donc plus un postulat, mais seulement une règle de calcul commode qui peut être déduite d'un autre postulat. Quant à l'évolution de Schrödinger, elle est contenue dans l'évolution de Heisenberg des opérateurs de projection, de sorte que l'évolution de $\mid \Psi >$ lui-même n'est plus directement visible.

Dans ce point de vue, il reste toujours nécessaire de postuler que les résultats de mesure ne peuvent donner que les valeurs propres de l'opérateur correspondant, et que le résultat est fondamentalement aléatoire – c'est le contenu de la règle de Born. L'avantage d'utiliser directement la formule (XI-9), tout en laissant de côté la réduction du vecteur d'état, est que les problèmes associés à la difficile coexistence entre deux postulats d'évolution s'éliminent ; aucun saut discontinu d'une quelconque quantité mathématique n'apparaît dans le formalisme. Dans ces conditions, pourquoi ne pas tout simplement laisser tomber les autres postulats et n'utiliser que cette formule unique pour obtenir des prédictions sur tous les résultats possibles ?

Pour certains physiciens, c'est effectivement la meilleure solution ; si l'on admet que le but de la physique est uniquement d'établir des corrélations entre la préparation d'un système physique, mathématiquement contenue

[2] Une permutation circulaire sous la trace permet en fait de supprimer l'un des projecteurs extrêmes $\widehat{P}_N(n_2;t_2)$ dans la formule (XI-9), mais pas les autres.

[3] On la trouve en effet dans l'équation (12) de [64, 492].

dans $\rho(t_0)$, avec toutes les séquences possibles de mesures (en fournissant leurs probabilités), il est vrai que la formule (XI-9) est parfaitement suffisante. Pourquoi alors s'inquiéter de savoir quelle série particulière de résultats se produit dans une réalisation donnée de l'expérience ? Il est suffisant de supposer que tous les systèmes physiques ont un comportement fondamentalement aléatoire ; nul n'est alors besoin en physique de faire plus que de donner des règles permettant le calcul des probabilités associées aux diverses procédures de préparation et de mesure (voir par exemple la citation de Dirac au § E du Chapitre II) ; inutile de chercher à décrire le système physique lui-même à chaque réalisation de l'expérience.

L'interprétation des corrélations est parfaitement cohérente ; elle s'inscrit bien dans l'idée que le vecteur d'état exprime une procédure de préparation (voir § B-3 du Chapitre I), plus qu'une propriété physique quelconque du système mesuré. D'un autre côté, ce raisonnement est totalement opposé à celui de EPR, puisqu'il considère comme sans intérêt toute question reliée à la réalité physique indépendante en tant que telle. Des questions comme "comment décrire le système dans l'intervalle de temps où la première mesure a été effectuée, mais où la seconde est toujours à venir" sont repoussées comme des questions superflues ou sans signification réelle[4]. Inutile de dire que la notion elle-même d'éléments de réalité EPR devient totalement non pertinente dans cette vue de la physique, ce qui résout automatiquement tous les problèmes potentiels associés à des raisonnements de type Bell, GHZ ou Hardy. Il en va de même pour l'émergence d'un résultat unique dans une expérience isolée ; d'une certaine façon, le paradoxe du chat de Schrödinger est évacué en le rejetant hors du domaine de la physique, puisque le paradoxe n'est pas exprimé en termes de corrélations. Une caractéristique intéressante de ce point de vue est que la frontière entre le système mesuré et les appareils de mesure est flexible ; un avantage qui en découle est que la méthode est bien adaptée à des approximations successives dans le traitement des processus de mesure, par exemple les traces laissées par une particule dans une chambre à bulles comme discuté par Bell [55].

#### A-2-c. Discussion

En pratique, on constate souvent que la plupart des physiciens qui adoptent l'interprétation des corrélations n'éprouvent pas le besoin de la rendre

[4]Supposons par exemple que la polarisation d'un photon soit mesurée (de façon non destructive) quelque part en Europe, et que ce photon se propage dans une longue fibre préservant la polarisation pour atteindre l'Amérique, où une autre mesure de polarisation est effectuée. En pratique, la plupart des physiciens pensent intuitivement que "quelque chose avec des propriétés physiques" s'est propagé d'un site de mesure à l'autre, et que la physique est capable de faire des affirmations concernant ces propriétés. Dans l'interprétaton pure des corrélations, cette intuition est considérée comme fausse : rien de réel que la physique pourrait décrire ne s'est propagé le long de la fibre.

très explicite. Certains le font cependant ; voir par exemple l'article de Mermin [493], qui d'emblée part de la prise de position claire : "tout au long de cet essai, je considérerai les corrélations et les probabilités comme des concepts de base". Dans un contexte un peu semblable, voir également un texte de la rubrique "opinions" de *Physics Today* par Fuchs et Peres [110] qui mettent l'accent sur "la cohérence interne de la théorie sans interprétation". D'un autre côté, nous l'avons déjà noté, l'interprétation des corrélations est vue par certains physiciens comme quelque peu minimaliste, car elle considère comme non pertinentes un certain nombre de questions qu'ils trouvent importantes ; le manque le plus important est probablement une notion de réalité physique qui soit indépendante des opérations de mesure faites par des êtres humains. Comme nous l'avons également mentionné, cette interprétation peut aisément être complétée par d'autres éléments pour la rendre plus riche. L'expérience semble montrer que, lors d'une discussion où on les pousse vigoureusement pour qu'ils donnent plus de détails sur leur position, les partisans du point de vue des corrélations s'expriment alors souvent en des termes qui se rapprochent beaucoup de l'interprétation d'Everett (§ M) ; en fait, ils se révèlent parfois comme des partisans de cette interprétation sans qu'ils le réalisent eux-mêmes !

D'autre part, la formule (XI-9) peut être le point de départ de nombreuses discussions intéressantes, qu'elle soit juste considérée comme une formule commode ou une composante de base de l'interprétation. Supposons par exemple que la première mesure soit associée avec une valeur propre dégénérée d'un opérateur, en d'autres termes que $\widehat{P}_M(m;t_1)$ soit un projecteur sur un sous-espace de plus d'une dimension :

$$\widehat{P}_M(m;t_1) = \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i\rangle \langle\varphi_i| \qquad \text{(XI-10)}$$

(pour simplifier, nous supposons que $t_1 = t_0$, de sorte qu'aucune dépendance en temps n'apparaît dans cette égalité). Si nous insérons cette égalité dans (XI-9), il apparaît immédiatement des termes d'interférence (ou termes croisés) $i \neq j$ entre les contributions des divers $|\varphi_i\rangle$. Supposons maintenant que plus d'information a été obtenu lors de la première mesure, de sorte que la valeur de $i$ a en fait été déterminée, mais que cette information a été perdue ou oubliée ; l'expérimentateur ignore lequel parmi deux (ou plus) des résultats possibles a été obtenu. Alors, ce qu'il faut calculer est la somme des probabilités associées à chaque résultat possible, c'est-à-dire une somme unique sur $i$ dont tous les termes croisés $i \neq j$ ont disparu. Dans le premier cas, les termes d'interférence sont présents parce qu'il faut ajouter des amplitudes de probabilité ; dans le second, ce sont les probabilités elles-mêmes qu'il faut ajouter (événements exclusifs). La différence entre les deux cas peut s'expliquer en termes de décohérence : dans le premier cas, plusieurs états du

système se corrèlent avec le même état de l'appareil de mesure, qui ici joue le rôle de l'environnement ; ce n'est plus vrai dans le second cas, de sorte que par trace partielle sur l'environnement, tous les termes d'interférence s'annulent. Cette remarque est utile dans la discussion de la relation étroite entre ce qu'on appelle le "paradoxe de Zénon" en mécanique quantique [494] et la décohérence ; elle est également fondamentale dans la définition des conditions de cohérence dans l'interprétation des histoires, sur laquelle nous reviendrons plus bas (§ G).

### A-3. Mettre l'accent sur l'information

Il est également relativement fréquent d'entendre mettre l'accent sur le rôle de l'information [388,495–501] ; avec l'essor récent de tout le domaine de recherche sur l'information quantique, un tel point de vue est naturel. L'information peut concerner l'ensemble du dispositif expérimental ; on arrive alors à un point de vue proche de celui de Bohr lorsqu'il insiste sur l'importance de prendre en compte l'ensemble du dispositif expérimental (§ C-2 du Chapitre III). Mais l'information peut aussi inclure celle acquise lors de la prise de connaissance de résultats expérimentaux, qui en produit alors une soudaine augmentation ; on peut invoquer ce fait comme une explication du postulat de réduction du vecteur d'état de von Neumann, vu comme un "processus purement mental" (Appendice A).

Un point intéressant à souligner est que tout processus de mesure (ou, plus généralement, d'intrication quantique) donne lieu à un courant d'information qui s'éloigne du lieu où la mesure est effectuée. En effet, l'interaction entre le système mesuré et l'appareil de mesure, puis l'environnement, initie une chaîne de von Neumann au cours de laquelle l'intrication progresse de plus en plus loin dans cet environnement [500]. Considérons alors un volume fixé contenant tout l'appareil de mesure ; tant que la chaîne reste à l'intérieur de ce volume, comme toute évolution hamiltonienne conserve les états purs ainsi que l'entropie, la quantité d'entropie contenue dans le volume reste constante ; mais, dès que l'intrication se propage au-delà du volume considéré, les propriétés du système physique contenu à l'intérieur doivent être calculées par une trace partielle sur celles du système extérieur, de sorte que l'entropie à l'intérieur augmente (§ B-3 du Chapitre VII). L'effet de cette fuite d'intrication vers le monde extérieur apparaît donc à l'observateur local comme une source de production d'entropie – à titre d'illustration, voir par exemple la citation de Peres dans le § C-2 et sa discussion du flux d'information dans une expérience EPR, ou la Ref. [502].

Ce point de vue informationnel peut être appliqué de manière plus ou moins stricte. On peut, soit focaliser l'intérêt sur le contenu en information du vecteur d'état[5], soit aller plus loin et considérer que la nature du vecteur

[5] Voici par exemple comment Fuchs [498] voit le programme de la mise au point d'une

d'état lui-même est avant tout informationnelle, soit même prendre le point de vue extrême où il ne représente que de l'information (§ C-2). Le théorème PBR (§ E-2 du Chapitre VI) fournit un cadre qui limite les possibles relations entre le contenu informationnel du vecteur d'état et l'existence éventuelle d'une réalité physique sous-jacente.

Dans tous les cas, il existe évidemment un certain lien avec l'interprétation des corrélations, et on peut même voir les deux points de vue comme d'utiles compléments mutuels. Les discontinuités introduites par la réduction du vecteur d'état semblent être expliquées de façon relativement naturelle, sans toutefois que les difficultés déjà discutées aux §§ B-3-a du Chapitre I et A-2 de ce chapitre ne soient réellement levées (par exemple les questions concernant la division du monde entre les systèmes qui fournissent de l'information et ceux sur lesquels l'information est acquise, ou celles concernant la description de la réalité pendant l'expérience). Le paradoxe de l'ami de Wigner n'est évidemment pas un problème particulier puisque, tant que l'ami à l'extérieur du laboratoire dispose de moins d'information que celui qui est à l'intérieur, il continue à utiliser un vecteur d'état non réduit, contrairement à son ami à l'intérieur.

## B. Interprétations statistiques (ensemblistes)

Les interprétations statistiques peuvent aussi bien être désignées par le néologisme "ensembliste", ou par la dénomination plus lourde "interprétations basées sur des ensembles". Ces classes d'interprétations ne rejettent pas l'idée de fournir une description des systèmes physiques, mais précisent que la description donnée par le vecteur d'état ne s'applique qu'à un ensemble statistique de systèmes préparés dans des conditions identiques, et pas à un système physique unique (ou une seule réalisation d'une expérience). Einstein était un partisan de cette interprétation ; par exemple, dans une lettre à Schrödinger en 1932 [61], il écrit : "la fonction $\Psi$ ne décrit pas l'état d'un système unique mais (statistiquement) un ensemble de systèmes". La fonction $\Psi$ contiendrait alors une information qui serait comparable à celle donnée par la distribution dans l'espace des phases décrivant un système en physique statistique classique, qui n'est pas la description la plus précise possible dans un tel cadre. Nous avons vu plus haut (Chapitre III) que l'argument EPR

version informationnelle de la mécanique quantique : "Le système quantique représente quelque chose de réel et d'indépendant de nous ; l'état quantique représente une collection de degrés subjectifs de connaissances sur *quelque chose* à faire avec le système... La structure appelée mécanique quantique s'intéresse aux relations entre ces deux objets – le subjectif et l'objectif. Notre rôle est alors de séparer le bon grain de l'ivraie. Si l'état quantique représente une information subjective, dans ce cas quelle proportion de son expression mathématique pourrait-elle être dans le même cas ? Une certaine partie, peut-être la plus grande partie, mais certainement pas la totalité".

mène à l'interprétation statistique. En 1970, Ballentine [503] a passé en revue cette interprétation et écrit : "Plusieurs arguments sont avancés en faveur du point de vue qui considère que la description par un état quantique ne s'applique qu'à un ensemble de systèmes préparés de façon similaire, plutôt que de supposer, comme on le fait souvent, qu'un tel état représente un système individuel de façon exhaustive. La plupart des problèmes associés à la théorie quantique de la mesure sont des artefacts conséquences de tentatives de maintenir la seconde interprétation". Cet auteur fait la distinction entre deux classes d'interprétations :

(i) "L'interprétation statistique... selon laquelle un état quantique pur... n'a aucune raison de fournir une description complète d'un système physique individuel ;

(ii) Les interprétations qui affirment qu'un état pur fournit une description complète et exhaustive d'un système unique. L'interprétation de Copenhague fait partie de cette classe".

Il ajoute ensuite que "l'hypothèse (ii) est superflue en théorie quantique, et de plus conduit à de sérieuses difficultés". D'autres auteurs ont exprimé des points de vue similaires ; voir par exemple la Ref. [122] qui propose une alternative à l'interprétation orthodoxe de la mécanique quantique contenant beaucoup d'éléments semblables. Pour un exemple de désaccord net et explicite avec l'interprétation statistique, voir par exemple [45].

Une fois l'interprétation statistique acceptée, deux attitudes logiques sont possibles :

(i) ou bien l'on considère que le fait même que la description fournie par un état pur n'est valable que pour des ensembles, et pas pour un système unique, est le signe que la description en question ne peut être complète ; il faut donc plus de variables pour arriver à décrire un seul système au sein de l'ensemble. Ceci conduit à introduire de nouveaux éléments de description qui s'ajoutent au vecteur d'état[6], ce qui mène aux théories à variables supplémentaires (ou cachées).

(ii) ou l'on considère comme satisfaisante une théorie qui ne décrit que des ensembles de systèmes. Si une seule expérience est réalisée, on postule qu'un processus fondamentalement aléatoire prend place, ce qui permet à un seul résultat d'expérience d'émerger ; aucune tentative n'est faite pour décrire ce processus. C'est, en un sens, la version moderne des "sauts quantiques". Cette attitude, poussée à ses limites, conduit à ce que Leggett [504] appelle "l'interprétation statistique extrême, selon laquelle aucun mécanisme physique ne doit être relié au formalisme de la mécanique quantique, ni à un niveau microscopique, ni macroscopique".

[6]Dans son article, Ballentine remarque que "l'introduction de variables cachées est parfaitement compatible avec les prévisions statistiques de la théorie quantique" et discute les propriétés de telles variables à la fin de son article.

Tous les physiciens qui se disent partisans de l'interprétation statistique ne font pas nécessairement un choix très explicite entre ces diverses possibilités. Toutefois, avec ou sans référence aux variables supplémentaires, on trouve un nombre relativement conséquent d'auteurs qui soutiennent l'idée que le vecteur d'état ne doit être utilisé que pour la description d'ensembles statistiques. Cette discussion générale est bien sûr reliée à celle de la discussion du statut du vecteur d'état (Chapitre I, § B-3) que l'on peut voir, soit comme fournissant une description du système quantique lui-même, soit seulement de notre connaissance de ce système quantique. Une discussion intéressante de ce sujet est donnée par Aharonov et al. dans la Ref. [300], sous le titre "Signification de la fonction d'onde ?". Après avoir remarqué que "depuis la découverte de la théorie quantique une question fondamentale a obsédé les physiciens : quelle est la signification physique de la fonction d'onde ?", les auteurs expliquent que l'on peut déterminer l'évolution du vecteur d'état par des mesures concrètes. Ceci est réalisé en considérant une série de mesures qui durent pendant un temps long, des "mesures protectrices", durant laquelle la fonction d'onde ne peut beaucoup changer à cause d'une autre interaction qu'elle subit au même instant. Il subsiste que, pour obtenir une détermination complète du vecteur d'état, la méthode impose de réaliser des mesures dans des conditions expérimentales variées, ce qui implique la nécessité de disposer d'un grand nombre de systèmes quantiques préparés de la même façon.

Plus récemment, Allahverdyan et al. [505] ont développé une théorie des mesures idéales faisant intervenir des sous-ensembles : au sein de l'ensemble des réalisations d'une expérience de mesure quantique ils considèrent que, à partir du moment où le système $S$ et le pointeur de l'appareil de mesure $M$ se sont fortement corrélés selon le modèle de von Neumann, l'on peut distinguenr des sous-ensembles de réalisations. Les plus petits sous-ensembles sont bien sûr les réalisations individuelles. Ils supposent que ces sous-ensembles peuvent être décrits par le même formalisme et équations dynamiques que l'ensemble total. A partir d'une étude détaillée de la relaxation introduite par l'interaction entre $S$ et $M$, et grâce à un ensemble de principes interprétatifs adéquats, les auteurs de la Ref. [505] proposent une introduction progressive du postulat de projection de von Neumann ; il est alors exprimé de façon plus fine en termes de sous-ensembles de réalisations de l'expérience, et relié de façon plus précise à des propriétés de la dynamique d'interaction entre $S$ et $M$. Aucune variable supplémentaire n'est introduite, mais des opérateurs densité supplémentaires obéissant à l'équation dynamique standard ; mais ils ont en fait le même objectif : permettre une description d'une expérience unique qui soit plus précise que celle de l'opérateur densité standard unique.

## C. Interprétation relationnelle, vecteur d'état relatif

D'autres interprétations mettent l'accent sur le caractère relatif du vecteur d'état lorsque plusieurs observateurs (utilisant tous le même référentiel galiléen) peuvent décrire la même séquence d'événements par des vecteurs d'état différents.

### C-1. Interprétation relationnelle

Le point de vue relationnel sur la mécanique quantique a été introduit par Rovelli en 1996 [506] [507] ; il est inspiré de la relativité, où il est bien connu que des observateurs différents peuvent utiliser des temps différents s'ils utilisent des référentiels galiléens différents. Dans l'interprétation relationnelle, on rejette la notion d'état absolu d'un système physique : des observateurs différents peuvent rendre compte de la même suite d'événements en utilisant des vecteurs d'état différents. Ici la différence ne provient pas de l'usage de référentiels galiléens distincts, mais d'informations différentes dont disposent les observateurs, ou plus concrètement du fait qu'ils utilisent des appareils de mesure différents pour faire leurs observations. Les propriétés physiques des systèmes ne sont donc pas vues comme absolues, mais comme dépendant de l'appareil utilisé pour y avoir accès. La mécanique quantique est considérée comme une "théorie concernant l'information". Selon les termes de Rovelli (§ 2.3 de [506]) : "Une description quantique de l'état d'un système S ne peut exister que si un autre système O, considéré comme un observateur[7], est effectivement en train de 'décrire' S ou, plus précisément, a interagi avec S. L'état quantique d'un système est toujours un état de ce système par rapport à d'autres systèmes".

L'accent est clairement mis sur les relations entre objets physiques, et non sur les objets eux-mêmes. Dans une expérience EPR par exemple, si le spin d'une seule particule est mesuré, cette mesure n'a absolument aucun effet sur l'état de l'autre spin, qui n'est en relation avec aucun appareil de mesure ; rien de semblable à la réduction non locale du vecteur d'état ne se produit. Dans une seconde expérience, si maintenant les spins des deux particules sont mesurés le long de directions parallèles, on peut alors observer une propriété de la paire, à savoir que les résultats sont toujours opposés ; mais cette observation n'a aucune relation avec les propriétés du système dans la première expérience, puisque ses propriétés par rapport à un appareil de mesure différent n'ont a priori plus rien à voir avec les précédentes. Si pour finir les propriétés des deux spins sont mesurées le long de directions non

[7] Le système O peut être compris comme un appareil de mesure. Cette phrase signifie alors que (dans un référentiel galiléen donné) une particule peut avoir une position définie, ou une vitesse définie, ou une direction de son spin, etc., seulement en relation avec un appareil de mesure spécifique mesurant cette propriété, jamais de façon absolue.

parallèles, on observe alors encore de nouvelles propriétés de la paire, sans relations particulières avec celles relatives aux deux premières expériences.

Dans cette interprétation, la réduction du vecteur d'état devient différente de ce qu'elle est dans le point de vue standard. Par exemple, certains observateurs peuvent considérer que la réduction du vecteur d'état s'est déjà produite en ce qui concerne un système quantique donné, alors que pour d'autres la réduction n'a pas encore eu lieu – pour eux, le système est toujours dans une superposition cohérente. Reprenons l'expérience EPR [508] : lorsqu'Alice effectue sa mesure, une réduction se produit pour son vecteur d'état qui décrit son spin en relation avec son appareil de mesure, et bien sûr elle-même qui ne prend conscience que d'un résultat unique. Cependant Bob, qui se trouve à une grande distance, et qui sait qu'elle a réalisé une expérience mais pas son résultat, décrit le même ensemble comme une superposition cohérente comprenant tous les résultats possibles. En d'autres termes, pour Bob, Alice est devenue un chat de Schrödinger. De même, si Bob réalise lui aussi une expérience en choisissant une autre direction d'analyse, son propre vecteur d'état est réduit, mais Alice ne connaît pas le résultat et considère qu'il s'est mis dans une superposition cohérente vis-à-vis d'elle et de ses appareils de mesure. Chacun des expérimentateurs considère alors l'autre comme un chat de Schrödinger. Ceci reste vrai jusqu'au moment où ils se communiquent mutuellement leurs résultats ; les chats disparaissent alors et, à nouveau, les deux opérateurs utilisent le même vecteur d'état. Cet exemple illustre que, dans cette interprétation, le vecteur d'état ne décrit pas directement la réalité, mais plutôt l'information qui est disponible sur cette réalité (pas nécessairement pour un observateur conscient, mais aussi relativement à un appareil de mesure par exemple).

Dans le point de vue de Bohr, le rôle de l'appareillage expérimental est également souligné, mais il est essentiel de le considérer comme un tout. Ici, rien n'interdit de distinguer des parties séparées dans cet appareillage, parties qui peuvent même correspondre à des vecteurs d'état différents. De plus, dans l'interprétation de Copenhague, les appareils de mesure et les observateurs jouent un rôle central, ainsi que les différences entre le monde microscopique et celui qui est directement accessible à l'expérience humaine. Dans l'interprétation relationnelle, tout ceci n'est plus nécessaire. Tous les systèmes physiques sont considérés sur le même plan, sans mention du caractère nécessairement macroscopique des appareils de mesure : le processus de mesure est un simple processus d'interaction ordinaire, donc sans aucun rôle particulier dans la théorie. Ce processus peut se produire en l'absence de tout observateur, puisque le vecteur d'état et sa réduction peuvent être définis en relation avec l'appareil de mesure seulement.

En guise de résumé, on peut citer la phrase de Rovelli dans [506], "La mécanique quantique est une théorie qui concerne la description des systèmes physiques en rapport avec d'autres systèmes physiques, et ceci fournit une

description complète du monde". Comme l'interprétation relationnelle considère que les vecteurs d'état fournissent une description complète de la réalité physique, elle est en complète opposition avec l'argument EPR, les variables supplémentaires, etc.

### C-2. Point de vue informationnel pur

Nous avons vu plus haut (§ A-3) que, par pragmatisme, certains physiciens mettent en avant le lien entre le vecteur d'état et l'information. On peut aller encore plus loin, et prendre un point de vue informationnel extrême qui dissocie totalement $|\Psi\rangle$ de la réalité physique ; ce qui est pris en compte est uniquement le contenu informationnel du vecteur d'état $|\Psi\rangle$, qui décrit l'information que possède un observateur sur un système physique donné (§ A-3), mais ne dit rien du système lui-même. Le vecteur d'état devient ainsi "purement mental" (Appendice A). Rien n'empêche alors le vecteur d'état $|\Psi\rangle$ de prendre des valeurs totalement différentes pour le même système, en fonction des connaissances que l'on peut définir pour un observateur arbitraire. L'analogie est alors évidente avec une distribution classique de probabilités, qui exprime également une relation entre une certaine quantité de connaissance et une réalité physique indépendante ; par exemple, une telle distribution peut parfois décrire le système avec une parfaite précision, mais elle peut également ne contenir aucune information (si l'observateur ne sait rien sur le système).

#### C-2-a. Discussion

Considérons une expérience que l'on décrirait en langage courant, par : "Un appareil au point A produit une particule, qui se propage dans l'espace jusqu'à un point éloigné B, où son interaction avec une cible est observée et enregistrée" – par exemple il peut s'agir d'un proton qui est injecté dans un accélérateur du CERN et qui entre en collision avec une cible dans un laboratoire à des kilomètres de distance. Au cours de l'expérience, un paquet d'ondes associé au vecteur d'état se propage donc de A à B. Dans un point de vue strictement informationnel, on considère que rien de réel ne se propage au sein de ce paquet d'ondes : il s'agit juste d'un transfert d'information abstraite. Le monde réel se limite alors aux appareils de préparation et de mesure, ainsi qu'aux observations ; ce qui se propage entre les appareils n'est qu'une information concernant des potentialités d'observations futures.

Dans la Ref. [118], les mots de Peres illustrent bien ce point de vue, dans le cadre d'une discussion de l'expérience EPR : "Quand Alice mesure son spin, l'information quelle obtient est localisée à sa position, et restera ainsi localisée jusqu'à ce qu'elle décide de la communiquer au loin. Absolument rien ne se produit à l'endroit où se trouve Bob... Ce n'est que si, et au moment où, Alice informe Bob de son résultat... que Bob prend conscience du fait que

sa particule est dans un état pur bien défini. Jusqu'alors, les deux observateurs peuvent en toute légitimité attribuer des états quantiques différents au même système... Les états quantiques ne sont pas des objets physiques : ils n'existent que dans notre imagination... La réponse à la question posée par EPR 'peut-on considérer que la description quantique de la réalité physique est complète ?' est oui. Cependant, il est possible que la réalité soit différente pour des observateurs différents".

La plupart des physiciens sont parfaitement prêts à accepter que des opérateurs densité dépendent de l'observateur : si différents observateurs possèdent des quantités différentes d'information sur le même système physique, il semble naturel qu'ils décrivent ce système par des opérateurs densité $\rho$ différents. Lorsque $\rho$ décrit un mélange statistique, l'analogie avec une distribution de probabilités classiques est directe, parce que $\rho$ ne correspond pas à la description la plus précise possible d'un système en mécanique quantique ; cet opérateur attribue en fait des probabilités (classiques) à plusieurs descriptions de ce type (avec des vecteurs d'état, donc des états purs). Mais une dépendance des vecteurs d'état $|\Psi\rangle$ eux-mêmes, alors qu'ils ne laissent aucune place à une description quantique plus précise, semble plus délicate à accepter. De surcroît, beaucoup acceptent l'idée que, au moins quelquefois, la fonction d'onde contient des éléments de réalité. Par exemple, un système physique décrit par la fonction d'onde de l'état fondamental est réellement dans cet état et en possède les propriétés, pas seulement dans l'esprit des humains. Les électrons d'un supraconducteur à très basse température sont réellement dans un état fondamental BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer) ; la fonction d'onde BCS n'est pas un processus mental, mais donne une description du système lui-même. Les chimistes pensent de même : les orbitales moléculaires décrivent des propriétés intrinsèques des molécules, leur forme, leur réactivité, etc., et non pas juste notre connaissance de leurs propriétés. Ainsi, le point de vue standard est plutôt que l'évolution de Schrödinger contient à la fois l'évolution des propriétés physiques que la mécanique quantique attribue au système (observables qui admettent $|\Psi\rangle$ comme vecteur propre) et celle des probabilités (pour toutes les autres observables) qui représentent notre connaissance du système et peuvent donc être vues comme mentales.

Nous avons déjà discuté les difficultés associées avec ce point de vue purement informationnel dans les §§ B-3-a du Chapitre I et A-3 de ce chapitre. Si $|\Psi\rangle$ n'est que pure information, à quoi exactement s'applique cette information ? Comment distinguer les systèmes qui produisent de l'information (appareils de mesure) de ceux sur lesquels l'information est acquise ? Si l'on admet l'existence d'une réalité indépendante, comment alors devrions-nous parler du système lui-même et le décrire ? Est-ce que cela signifie qu'il faut repousser cette idée, et que la physique renonce définitivement à l'espoir de pouvoir jamais dire quelque chose à propos d'une réalité indépendante ? Dans

certains de ses écrits initiaux, Heisenberg semblait n'être pas loin de ce point de vue purement informationnel, mais plus tard il a nuancé sa position. En ce qui concerne Bohr, ce n'était pas un positiviste mais un réaliste à sa façon pourrait-on dire (voir § E du Chapitre II, par exemple la citation de Von Weizsäcker à la fin) ; le point de vue purement informationnel est généralement considéré comme au-delà de l'interprétation standard (§ A-3 du Chapitre I).

#### C-2-b. QuBisme

Une version récente de cette classe d'interprétations est le QuBisme, abbréviation pour "Quantum Bayesianism" [509–511], qui est basé sur l'utilisation des probabilités bayésiennes. La définition la plus courante des probabilités est la définition fréquentielle, ou d'ensemble : on suppose l'existence d'un ensemble de systèmes préparés de la même façon, ce qui fournit un grand nombre de réalisations de la même situation initiale. La probabilité d'un événement donné est alors définie comme la proportion des réalisations, parmi toutes celles possibles dans l'ensemble, où cet événement particulier se produit ; en d'autres termes, c'est la fréquence relative d'apparition de cet événement. En revanche, dans la définition bayésienne subjective, un "agent" attribue une probabilité en fonction de son estimation raisonnable du fait que l'événement se produira ; cette définition est plus naturelle pour des événements qui ne peuvent se produire plus d'une fois (par exemple la probabilité qu'il pleuve demain). Dans le cadre du QuBisme, le vecteur d'état associé à un système physique caractérise les probabilités qu'un agent attribue aux résultats d'une expérience future. Le vecteur d'état n'est donc pas associé au seul système physique, ou à sa préparation, mais à un couple agent + système physique ; deux agents différents peuvent parfaitement utiliser des vecteurs d'états distincts pour décrire le même système. L'état quantique est donc subjectif et résume les connaissances des agents ainsi que leurs estimations concernant le contenu de leurs expériences futures. Selon les mots de Fuchs [510] : "Dans le QuBisme, la théorie quantique n'est pas externe à la théorie des probabilités... elle en est plutôt un élément additionnel".

Dans ces conditions, des sauts discontinus du vecteur d'état sont parfaitement naturels, aussi naturels que les sauts soudains des probabilité classiques lorsqu'une nouvelle information est prise en compte. Les observateurs (appelés "agents" dans ce contexte) jouent un rôle absolument central, puisque tout le formalisme quantique ne concerne que leurs connaissances et estimations, et n'a donc pas grand chose à voir avec le monde réel. Il existe toujours une frontière (coupure) entre des situations de natures différentes : évolution ordinaire de Schrödinger et situations où de l'information est collectée par des observateurs. Fuchs [510] note que "lorsqu'on étudie une mesure quantique, on introduit une coupure conceptuelle dans le monde : une partie est traitée

comme un agent actif, une autre comme un réactif ou un catalyseur". Cette frontière n'est donc plus objective ; comme l'écrit Mermin : "Les coupures se trouvent, non pas dans le monde objectif, mais aux frontières entre ce monde et les expériences de ce monde des agents qui utilisent la mécanique quantique". La réduction du vecteur d'état ne peut se produire que lorsqu'un agent possède "l'aptitude mentale à utiliser la mécanique quantique pour mettre à jour le vecteur d'état qu'il attribue au système en fonction de son expérience ultérieure". On retrouve ainsi une certaine analogie avec le point de vue de Wigner qui propose de prendre en compte le rôle de la prise de conscience par l'observateur (§ A-1-b). Comme Bohr, le QuBisme considère que "le concept premier d'*expérience humaine* est fondamental dans la compréhension de ce qu'est la science" ; toutefois, "A la différence de Copenhague, le QuBisme choisit la conception 'subjective', ou 'de jugement', ou encore 'personnaliste' des probabilités" [512].

## D. Approches logiques, algébriques et déductives

Nous présentons maintenant une famille de théories quantiques où le vecteur d'état $|\Psi\rangle$ n'est plus considéré comme le point de départ de la description physique d'un système quantique, mais plutôt comme un outil mathématique qui peut être déduit de considérations plus fondamentales concernant les propositions qu'on peut faire sur un système pour caractériser ses propriétés. Nous passerons rapidement en revue deux versions de ces théories : la logique quantique qui, dans ses formes diverses, met en jeu à la fois l'application aux phénomènes quantiques d'une branche de la philosophie, la logique, ainsi que des développements mathématiques ; les théories algébriques utilisant les $C^*$ algèbres et les théories formelles axiomatiques qui, elles aussi, empruntent aux deux disciplines. Dans la dernière partie de cette section, nous introduisons un théorème général, le théorème de Gleason, qui du fait de sa généralité a des applications intéressantes, non seulement dans ces théories, mais en mécanique quantique en général.

L'objectif de ces approches est de construire la mécanique quantique ab initio à partir de principes de base, très généraux, et purement quantiques, sans par exemple partir de la mécanique classsique pour ensuite lui appliquer une procédure de quantification. L'intérêt d'une telle approche logique est évidemment qu'elle clarifie la structure profonde de la mécanique quantique. Elle reste toutefois quelque peu abstraite et axiomatique ; de fait, elle conduit plus à une autre introduction de la mécanique quantique qu'à une meilleure compréhension de son contenu physique. C'est pourquoi nous nous limiterons à une description relativement brève, qui reste superficielle mais fournit au passage de nombreuses références pour le lecteur qui désirerait en savoir plus sur le sujet.

### D-1. Logique quantique

Une présentation historique générale de la logique quantique est proposée dans le Chapitre 8 du livre de Jammer *The philosophy of quantum mechanics* [58], qui contient également de nombreuses références. Von Neumann, dans son fameux traité de 1932 [4], a remarqué que "les relations entre un système physique d'une part, et les projections de l'autre, rendent possible une sorte de calcul logique. Néanmoins, contrairement aux concepts de la logique ordinaire, ce système logique est augmenté par le concept de 'décidabilité simultanée', qui est caractéristique de la mécanique quantique". En 1933, l'astrophysicien Fritz Zwicky a suggéré qu'une logique non classique devrait être mise en œuvre en microphysique [513] ; il a proposé un "principe de flexibilité de la vérité scientifique", qui "doit être multivaluée". En 1936, Birkhoff et von Neumann ont tenté de réconcilier la contradiction apparente entre la logique classique booléenne et les règles concernant la mesure d'observables incompatibles en mécanique quantique [514] ; ils ont mis en lumière la différence caractéristique entre les structures logiques des mécaniques classique et quantique, qui est que des identités distributives sont valables dans le premier cas, mais pas dans le second [8]. Jordan a également publié quelques articles sur ce sujet vers 1950 [517].

Pour comprendre simplement pourquoi, nous pouvons étudier le rôle des projecteurs dans le formalisme quantique. Considérons par exemple une observable $A$ (un opérateur hermitique agisssant dans l'espace des états) et l'une de ses valeurs propres $a_i$. Nous appelons $P_i$ le projecteur sur le sous-espace propre $\mathcal{E}_i$ associé à cette valeur propre (si elle est dégénérée, ce sous-espace a une dimension plus gande que 1). Ce projecteur est hermitique et satisfait la relation $(P_i)^2 = P_i$ ; ses valeurs propres sont 1 et 0. Si l'état quantique du système est un état propre de $P_i$ de valeur propre 1, une mesure de $A$ fournit le résultat $a_i$ avec certitude ; on peut alors considérer que la proposition "la valeur de l'observable $A$ est $a_i$" est une proposition vraie. Mais, si le système quantique est dans un état propre de $P_i$ de valeur propre 0, une mesure de $A$ ne fournira jamais le résultat $a_i$ ; on peut alors considérer que la proposition précédente est fausse[9].

Nous pouvons donc associer à tout projecteur $P_i$ un test effectué sur le système physique afin de déterminer si une proposition concernant ce système est vraie ou fausse. Ceci établit une correspondance entre des projecteurs $P_i$

[8] Peu après la publication de l'article de Birkhoff et von Neumann, Strauss a élevé des critiques dans sa thèse de PhD (1938) ; il a alors introduit une autre forme de logique, la "logique de la complémentarité" [515]. Plus tard, en 1968, Popper a également critiqué l'article de Birkhoff et von Neumann, mais cette fois en le considérant comme logiquement incohérent [516] ; un débat s'est alors développé, en particulier avec Ramsay et Pool, mais nous n'en parlerons pas ici.

[9] Nous reviendrons sur la relation entre mesures quantiques et projecteurs lors de la discussion du théorème de Gleason (§ D-3).

et des propositions logiques $\pi_i$. On voit facilement que le projecteur $1-P_i$ sur le sous-espace supplémentaire de $\mathcal{E}_i$ est associé à la proposition opposée "non $\pi_i$" ; de cette façon, nous introduisons la négation logique d'une proposition.

Si maintenant nous considérons deux projecteurs qui commutent $P_i$ et $P_j$, on peut également voir que le projecteur sur l'intersection des sous-espaces correspondants correspond à la propositon "$\pi_i$ et $\pi_j$" ; le projecteur sur la somme directe des sous-espaces correspond à la proposition "$\pi_i$ ou $\pi_j$". Avec trois projecteurs qui commutent, on obtient la relation standard de distributivité des propositions logiques :

$$\pi_i \text{ et } (\pi_j \text{ ou } \pi_k) = (\pi_i \text{ et } \pi_j) \text{ ou } (\pi_i \text{ et } \pi_k) \qquad \text{(XI-11)}$$

En revanche, si les projecteurs ne commutent pas, cette loi de distributivité n'est en général pas satisfaite, ce qui change complètement la façon dont les propositions peuvent être utilisées. La logique quantique est donc l'étude de la structure formelle du raisonnement déductif et des propositions qui obéissent aux mêmes règles que des projecteurs, afin d'obtenir une série de règles qui soient compatibles avec les principes de la mécanique quantique. On arrive ainsi à l'étude du "réseau des propositions" et de l'orthomodularité. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à l'introduction à la fois claire et concise du sujet au Chapitre 4 d'un livre récent *The formalisms of quantum mechanics : an introduction* de David [518]. Pour une introduction simple à la logique quantique, voir par exemple [519]. Des livres plus spécialisés sont par exemple *Quantum logic* de Mittelstaedt [520] ou *The logic of quantum mechanics* par Beltrametti et Casinelli [521] ; on pourra également trouver de nombreuses références utiles dans [522]. Pour une revue générale et récente de la logique quantique et de ses relations avec l'interprétation modale (§ J), voir [523]. Dans [524], Bell passe brièvement en revue les origines de la logique quantique, et discute ensuite le problème fondamental de sa signification ; il propose d'introduire des "proximity spaces", ce qui permet de définir des "attributs" dans de tels espaces.

La logique multivaluée correspond à une version de la logique quantique qui a été proposée par Reichenbach en 1941 [525]. Dans sa "théorie probabiliste du sens" il considère que "une proposition a du sens s'il est possible de déterminer son poids, c'est-à-dire son degré de probabilité, pour la proposition" ainsi que des règles similaires pour des groupes de propositions. Plus tard, von Weizsäcker [526] a proposé une version différente de la logique de la complémentarité, où "chaque proposition élémentaire peut avoir, en plus de 1 et 0, un nombre complexe comme valeur de vérité". Le module au carré de cette valeur donne, comme habituellement, la probabilité pour qu'un test expérimental vérifie cette proposition ; la phase est reliée à l'alternative logique complémentaire. Cette construction logique est l'analogue d'une logique à un nombre infini de valeurs.

### D-2. Théories algébriques, formelles, et axiomatiques

Comme nous l'avons vu, le but de la logique quantique est de montrer comment la structure des observables (opérateurs hermitiques agissant dans l'espace des états) peut émerger à partir d'hypothèses de base concernant les opérations de mesure réalisées sur des systèmes physiques quantiques. Une fois que cette structure des observables est obtenue, on peut aller à l'étape suivante et construire l'espace des états lui-même, introduire la notion d'état quantique, etc. Dans l'approche algébrique de la mécanique quantique, on part directement de la structure d'algèbres des observables, qui est postulée, et on étudie ensuite la structure de l'espace des états où elles agissent ainsi que les états physiques qu'il contient. Un livre de référence standard sur l'approche algébrique de la théorie quantique est *Local quantum physics : Fields, particles, algebras* de R. Haag [527] ; le Chapitre 3 du livre de David [518] propose une introduction concise, mais aussi plus physique, du sujet. Comme plus haut, nous nous contenterons ici aussi d'un bref résumé, surtout historique.

L'approche axiomatique de la "théorie des C* algèbres" est un point de vue mathématique sur la mécanique quantique qui met en jeu des théorèmes élaborés concernant les algèbres d'opérateurs et leurs représentations. Au départ, l'objectif principal était de développer une théorie quantique permettant de traiter rigoureusement les systèmes physiques ayant un nombre infini de degrés de liberté, tout spécialement en théorie quantique des champs mais aussi en mécanique statistique. Von Neumann a également initié ce champ de recherches en considérant des algèbres d'opérateurs [4], et a poursuivi ensuite dans une collaboration avec Jordan et Wigner [528]. En plus des "algèbres de von Neumann", Gelfand et Naimark [529] ont introduit une autre classe d'algèbres, maintenant nommées les "C* algèbres", qui ont également été utilisées dans les contributions de Segal [530] ainsi que, plus tard, dans celles de Haag et Kastler [531]. Murray et von Neumann ont donné une classification des divers types d'algèbres [532], de type I, II, etc. Le type I ne convient dans le cadre de la mécanique quantique que pour un système dont la dimension de l'espace des états est finie. Von Neumann a utilisé le type II, mais il se trouve que le type III est nécessaire en théorie quantique des champs (pour une revue succincte, voir par exemple les §§ 9.2 et 8.3 de [522] et le § 3.7.2 de [518]). Une très importante clarification de ce domaine a été apportée par Alain Connes, qui a introduit une classification générale des algèbres de type III [533] et de plus proposé l'utilisation de la géométrie non commutative [534].

Dans la ligne initiée par von Neumann, Hilbert et Jordan, Mackey [535] a introduit un formalisme qui relie observables, filtres de préparation du système et états, ainsi qu'une axiomatisation de la mécanique quantique basée sur deux notions fondamentales, les observables et les états. Ceci a fourni le premier système complet d'axiomes pour une théorie formelle. Ce travail a

ensuite été développé plus avant par Piron [536] qui, avec Jauch [537], a montré qu'on peut reconstruire un véritable treillis de Hilbert (et pas seulement un treillis orthomodulaire) en introduisant une "covering property" adéquate. Pour une revue plus détaillée du rôle de l'école de Genève dans ce domaine, voir le § 8.5 de [58]. Une contribution plus récente et importante est celle du théorème de Solèr [538] qui montre, à partir d'hypothèses algébriques, que l'espace de Hilbert doit être construit, soit à partir des nombres réels, soit encore des nombres complexes (comme en théorie standard), soit des quaternions. Une introduction à la théorie des champs axiomatique est proposée dans le § 3.8 de [518].

Les approches précédentes ne sont pas exemptes de difficultés, parfois illustrées par des contre-exemples. L'une d'entre elles est que, alors que la structure d'un espace de Hilbert permet de traiter de façon naturelle la composition de plusieurs systèmes physiques grâce à la notion de produit tensoriel (§ B du Chapitre XII), on ne peut pas simplement multiplier entre eux des treillis de Hilbert. Ainsi la combinaison de plusieurs systèmes physiques peut conduire à de nouvelles structures mathématiques. Ce problème peut être traité par l'introduction d'ensembles convexes et du langage des catégories [539–541] ; pour une revue, voir [542].

### D-3. Théorème de Gleason

Un théorème dû à Gleason [543] s'avère souvent utile dans le cadre de ces familles de présentations de la mécanique quantique. Considérons un espace des états $\mathcal{E}$ et l'ensemble des projecteurs orthogonaux $P_j$ sur tous ses sous-espaces[10]. Toute base orthonormée $\{|u_i\rangle\}$ de $\mathcal{E}$ fournit immédiatement de tels projecteurs, par exemple ceux qui sont des projecteurs sur un seul état :

$$P_j = |u_j\rangle \langle u_j| \tag{XI-12}$$

Une somme quelconque de ces projecteurs, combinés de n'importe quelle façon (mais sans répétition), donne également un autre $P_j$ possible (puisque les $|u_i\rangle$ sont orthogonaux entre eux) :

$$P_j = |u_i\rangle \langle u_i| + |u_k\rangle \langle u_k| + ... |u_k\rangle \langle u_k| \tag{XI-13}$$

Comme de plus l'on peut choisir n'importe quelle base $\{|u_i\rangle\}$, il est clair que l'ensemble des $P_i$ est très grand, ni limité à des projecteurs sur des états uniques, ni à des projecteurs qui sont mutuellement orthogonaux.

[10] Pour définir $P_j$, on choisit un sous-espace $\mathcal{E}_S^j$. Tout ket $|\Psi\rangle$ de $\mathcal{E}$ peut être décomposé comme la somme d'un vecteur $|\Psi\rangle_j$ appartenant à $\mathcal{E}_S^j$ et d'un vecteur $|\Psi\rangle_j^\perp$ orthogonal à $\mathcal{E}_S^j$. La définition de $P_j$ est alors $P_j |\Psi\rangle = |\Psi\rangle_j$.

Les projecteurs orthogonaux sont hermitiques. Si le produit $P_j P_k$ de deux opérateurs s'annule, l'hermitique conjugué $P_k P_j$ s'annule également, de sorte que $P_j$ et $P_k$ commutent. Les projecteurs orthogonaux sont des cas particuliers de l'ensemble des projecteurs agissant dans un espace vectoriel (projecteurs obliques), satisfaisant la relation $P^2 = P$.

Comme nous l'avons rappelé dans les § D-1, chaque $P_j$ est un opérateur hermitique qui possède deux valeurs propres, 0 et 1. Physiquement, on peut lui associer une mesure pouvant donner ces deux résultats. Si l'état $|\Psi\rangle$ du système est invariant sous l'action de $P_j$, le résultat obtenu est 1 avec certitude ; si $|\Psi\rangle$ est annulé sous l'action de $P_j$, le résultat est 0 avec certitude. Dans toutes les autres situations, donc quand l'état est changé mais pas annulé par l'action de $P_j$, le résultat est aléatoirement soit 1 soit 0 ; la probabilité $\mathcal{P}_j(1)$ d'obtenir 1 est donnée par la moyenne de $P_j$ dans $|\Psi\rangle$ :

$$\mathcal{P}_j(1) = \langle\Psi| P_j |\Psi\rangle \tag{XI-14}$$

Un opérateur $P_j$ particulier est l'opérateur identité $I(\mathcal{E})$ agissant dans $\mathcal{E}$, opérateur qui ne modifie aucun de ses vecteurs, et qui correspond à une mesure donnant toujours le résultat 1, quel que soit l'état du système.

De façon générale, la somme d'opérateurs $P_j$ n'est pas nécessairement un autre opérateur $P_n$. Elle est cependant un projecteur si les espaces associés aux $P_j$ sont tous orthogonaux, ou de façon équivalente si tous les produits d'opérateurs deux à deux $P_iP_j$ s'annulent[11]. Nous les appelons alors "projecteurs mutuellement exclusifs" ou simplement "projecteurs exclusifs". Mathématiquement, ils sont exclusifs parce qu'il est impossible de trouver un ket $|\Psi\rangle$ qui ne s'annule pas sous l'action successive des deux projecteurs orthogonaux. Physiquement, les projecteurs correspondent à des observables compatibles qui peuvent être simultanément mesurées ; lorsque les observables sont exclusives, il est impossible de trouver un état pour lequel les deux résultats sont 1 avec certitude.

Si l'on ajoute un nombre suffisant de $P$ orthogonaux, on peut arriver à un point où leur somme projette sur tout l'espace $\mathcal{E}$, ce qui permet d'obtenir l'opérateur identité :

$$P_{j_1} + P_{j_2} + ... + P_{j_p} = I(\mathcal{E}) \tag{XI-15}$$

On dit alors que cette série d'opérateurs fournit une "résolution de l'unité". Un exemple simple est donné par la série des projecteurs sur tous les états $|u_i\rangle$

[11] Si deux opérateurs $P_i$ et $P_j$ projettent sur des sous-espaces orthogonaux, on peut choisir une base orthonormée dans chacun de ces sous-espaces, puis compléter une base orthonormée dans l'espace $\mathcal{E}$ en ajoutant un nombre suffisant de vecteurs normés, tous orthogonaux entre eux et aux deux sous-espaces. Tous ces vecteurs sont des vecteurs propres communs à $P_i$ et $P_j$ avec les valeurs propres 1 ou 0. Comme par construction aucun d'entre eux ne peut avoir la valeur propre 1 pour les deux opérateurs $P_i$ et $P_j$, le produit $P_iP_j$ s'annulle.

Réciproquement, si ce produit s'annule, le projecteurs commutent nécessairement (note 10), et à nouveau on peut construire une base commune de vecteurs propres dans $\mathcal{E}$. Le produit $P_iP_j$ s'annule alors seulement si aucun de ces vecteur propres n'a deux fois la valeur propre 1, ce qui signifie que $P_i$ et $P_j$ projettent sur des sous-espaces orthogonaux.

Dans les deux cas, on voit facilement que la somme $P_i + P_j$ est alors le projecteur orthogonal sur le sous-espace somme directe des sous-espaces de projection initiaux. La généralisation à plus de deux projecteurs orthogonaux est obtenue par récurrence.

d'une base orthonormée quelconque de $\mathcal{E}$, mais l'on peut également grouper ces projecteurs de nombreuses façons pour obtenir d'autres décompositions de l'unité.

Supposons maintenant qu'une fonction réelle $f$ soit définie sur tous les $P_j$ : un nombre réel est alors attribué à chacun de ces projecteurs. De plus, nous supposons que $f$ possède les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{l} 0 \leq f(P_j) \leq 1 \qquad \text{pour } P_j \text{ quelconque} \\ f\left[I(\mathcal{E})\right] = 1 \\ f(P_{j_1} + P_{j_2} + ... + P_{j_m}) \\ \qquad = f(P_{j_1}) + f(P_{j_2}) + ... + f(P_{j_m}) \quad \text{pour des } P \text{ exclusifs} \end{array} \tag{XI-16}$$

(la seconde et la troisième conditions entraînent immédiatement que la probabilité associée à une résolution quelconque de l'unité est 1). Ces conditions mathématiques ont une interprétation physique simple : elles signifient que $f(P_j)$ peut être considéré comme la probabilité d'obtenir le résultat 1 lors d'une mesure associée à un $P_j$ quelconque. La troisième relation exprime la règle selon laquelle la probabilité de la réunion d'événements exclusifs est égale à la somme de leurs probabilités.

Le théorème de Gleason dit que, si la dimension de $\mathcal{E}$ est supérieure à 2, il existe un opérateur hermitique non négatif et de trace unité $\rho$ agissant dans $\mathcal{E}$ tel que :

$$f(P_j) = Tr\left\{\rho P_j\right\} \qquad \text{pour tout } P_j \tag{XI-17}$$

En d'autres termes, toutes les valeurs de $f$ peuvent être obtenues à partir d'un seul opérateur $\rho$ au moyen d'une opération simple de produit et de trace [12]. Nous renvoyons le lecteur à l'article original [543] pour la démonstration de ce théorème, qui n'est pas triviale. Un résumé détaillé de la démontration est donné dans le § 4.4.3 de la Ref. [518].

Si $f$ est interprété comme donnant les probabilités associées aux mesures caractérisées par les projecteurs, ce théorème démontre que ces probabilités peuvent toutes être obtenues à partir d'un seul opérateur $\rho$, que l'on peut alors considérer comme l'opérateur densité du système quantique. C'est un résultat important car il montre mathématiquement que le formalisme quantique de l'opérateur densité et de la trace découle de considérations générales satisfaites par les probabilités.

Le théorème de Gleason requiert une limite inférieure de 3 pour la dimension de l'espace des états, de sorte qu'il ne s'applique pas au spin 1/2. Toutefois Bush a démontré [544] que, si l'on étend les conditions (XI-16)

[12] Il existe une correspondance biunivoque entre les projecteurs et les sous-espaces sur lesquels ils projettent, de sorte qu'il est équivalent de considérer que la fonction $f$ est définie sur les projecteurs ou les sous-espaces de $\mathcal{E}$. En mathématiques, on définit souvent $f$ comme une "mesure sur tous les sous-espaces possibles de $\mathcal{E}$".

aux opérateurs POVM (en anglais : positive operator valued measures, voir § B-2 du Chapitre IX), cette limitation du théorème disparaît. Les POVM correspondent à une classe plus grande d'opérateurs et conduisent à un plus grand nombre possible de décompositions de l'unité que celles données par des projecteurs orthogonaux. Ainsi, le théorème de Bush demande de faire des hypothèses plus fortes que celui de Gleason : c'est le prix à payer pour obtenir un résultat plus général (valable également pour deux dimensions), ainsi qu'une démonstration mathématique plus simple.

## E. Le réel voilé

L'interprétation du "réel voilé" a été introduite par d'Espagnat [24, 25]. Sur le plan du formalisme mathématique, elle ne diffère en rien de l'interprétation standard, mais elle propose un cadre conceptuel et philosophique qui lui est propre. Ce cadre est réaliste, comme celui de Bohr, mais il en diffère en ce que la définition de la réalité n'y fait pas intervenir la perception humaine via les appareils de mesure, qui en sont le prolongement. L'existence du réel est considérée comme fondamentale, sans aucun besoin d'être rapportée à l'Homme, et donc indépendante de toute propriété de notre structure sensitive. Partant de la théorie de la mesure quantique, des arguments EPR et de Bell, d'une étude du lien entre contrafactualité et réalisme, ainsi que des conséquences de la notion d'accord inter-subjectif, d'Espagnat arrive à la conclusion que la mécanique quantique ne peut pas donner lieu à des interprétations descriptives d'objets quantiques individuels. Il distingue entre réel indépendant dont on n'atteint, au mieux, que certaines structures générales, et réalité empirique (ensemble des phénomènes que la science analyse). Ceci le conduit à conclure que le réel ultime est un "réel voilé", n'offrant une prise que marginale à la connaissance discursive.

D'autres interprétations de la mécanique quantique distinguent aussi deux niveaux de réalité. C'est par exemple le cas de la théorie de De Broglie-Bohm (§ H-1) où apparaissent deux niveaux différents : celui d'un champ physique (la fonction d'onde) qui est manipulable mais pas directement observable, et celui des positions des particules qui sont observables, mais pas manipulables (*cf.* Appendice H). Mais c'est une approche différente de celle du réel voilé, en particulier parce que les deux niveaux de réalité sont présents dans le formalisme mathématique lui-même.

## F. Réel contextuel quantique

Les auteurs de la Ref. [545] proposent une tout autre définition du réel, qui s'exprime en termes d'association entre un objet quantique et l'environnement de l'ensemble de ses appareils de mesure. Ils partent de trois postulats :

(i) Pour un système physique donné, ils définissent une "modalité" comme l'ensemble des valeurs d'un ensemble complet de quantités physiques qui peuvent être prédites avec certitude et répétabilité pour ce système. Cet ensemble complet[13] de propriétés physiques est appelé un contexte, et correspond à un dispositif expérimental ; la modalité est attribuée de façon conjointe au système et au contexte.

(ii) Pour un contexte donné, il existe $N$ modalités différentes, mais elles sont mutuellement exclusives : si une série de prédictions est vraie, les autres sont fausses. La valeur de $N$ est la même dans tous les contextes pertinents ; c'est une propriété caractérisique d'un système quantique donné, appelée la dimension.

(iii) Pour un système quantique donné, les divers contextes sont reliés par des transformations $g$ qui ont la structure d'un groupe $G$.

Le postulat (i) met l'accent sur les contextes, systèmes et modalités (d'où l'acronyme CSM donné à cette approche), le postulat (ii) sur la quantification, et le postulat (iii) sur les relations entre contextes différents. Les auteurs de la Ref. [545] montrent alors que toute théorie compatible avec ces postulats est nécessairement probabiliste ; l'introduction des probabilités n'est alors plus un postulat en soi, mais une conséquence des postulats. De plus, par une suite de raisonnements appropriés, ils parviennent à établir l'ensemble du formalisme quantique. La structure de la mécanique quantique apparaît alors comme une conséquence commune, d'une part d'un nombre quantifié de modalités accessibles à un système quantique, d'autre part d'un continuum de contextes nécessaire à la définition de ces probabilités.

Cette approche rappelle le théorème de Gleason (§ D-3), mais en est indépendante. Elle est également proche du point de vue de Bohr, où la réalité physique ne peut être définie qu'en termes de l'ensemble du dispositif expérimental (*cf.* § E (i) du Chapitre II, et la citation de Jammer à la fin de cette section). Une différence importante, toutefois, est le rôle central de la quantification, exprimé par le postulat (ii) ci-dessus.

## G. Histoires cohérentes

L'interprétation des "histoires cohérentes"[14] est parfois également appelée "interprétation des histoires décohérentes", ou simplement "interprétation des histoires" – dans cette partie nous nous contenterons de cette dernière appellation. Comme nous le verrons, cette interprétation permet la discussion dans l'absolu de l'évolution d'un système quantique fermé, sans faire aucune référence aux opérations de mesure. L'idée générale a été introduite

[13] Le mot "complet" désigne le plus grand ensemble possible qui reste compatible avec la certitude et la répétabilité.

[14] La notion de cohérence joue un rôle essentiel pour des familles d'histoires, plus que pour une histoire individuelle.

et développée par Griffiths [17], et ensuite par Omnès, Gell-Mann et Hartle [546–548] qui y ont contribué et parfois l'ont adaptée. Ici aussi, nous resterons dans les limites d'une introduction non spécialisée au sujet ; le lecteur intéressé par plus de détails pourra se reporter aux références fournies – ou pour une présentation générale à un article dans *Physics Today* [549], ainsi que les références qu'il contient, ou encore à l'introduction et mise en perspective de Hohenberg [550].

### G-1. Histoires, familles d'histoires

Considérons un projecteur orthogonal quelconque $P$ sur un sous-espace $\mathcal{F}$ de l'espace des états ; il possède deux valeurs propres, $+1$ qui correspond à tous les états appartenant à $\mathcal{F}$, et 0 qui correspond à tous les états orthogonaux à $\mathcal{F}$ (ils appartiennent au sous-espace supplémentaire, associé au projecteur $Q = 1-P$). On peut associer un processus de mesure à $P$ : si l'état du système appartient à $\mathcal{F}$, le résultat de la mesure est 1 ; s'il est orthogonal à $\mathcal{F}$, il est zéro[15]. Supposons maintenant que cette mesure soit effectuée à l'instant $t_1$ sur un système qui initialement (à l'instant $t_0$) était décrit par un opérateur densité $\rho(t_0)$ ; la probabilité de trouver l'état du système dans $\mathcal{F}$ à l'instant $t_1$ (résultat 1) est alors donnée par la formule (XI-9), qui ici se simplifie en :

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}, t_1) = \mathrm{Tr}\left\{\widehat{P}(t_1)\rho(t_0)\widehat{P}(t_1)\right\} \qquad \text{(XI-18)}$$

où $\widehat{P}(t)$ est le projecteur $P$ dans le point de vue de Heisenberg à l'instant $t$. Ce résultat peut évidemment être généralisé à plusieurs sous-espaces $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, etc. et à plusieurs mesures effectuées aux instants $t_1$, $t_2$, $t_3$, etc. (nous supposons que $t_1 < t_2 < t_3 < ...$). La probabilité de trouver l'état du système dans $\mathcal{F}_1$ au temps $t_1$, puis à $\mathcal{F}_2$ au temps $t_2$, puis à $\mathcal{F}_3$ au temps $t_3$, etc. s'écrit selon la formule de Wigner (§ A-2-a) :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mathcal{F}_1, t_1; &\mathcal{F}_2, t_2; \mathcal{F}_3, t_3 ...) \\ &= \mathrm{Tr}\left\{...\widehat{P}_3(t_3)\widehat{P}_2(t_2)\widehat{P}_1(t_1)\rho(t_0)\widehat{P}_1(t_1)\widehat{P}_2(t_2)\widehat{P}_3(t_3)...\right\} \qquad \text{(XI-19)}\end{aligned}$$

où, comme ci-dessus, les $\widehat{P}_i(t_i)$ sont les projecteurs sur les sous-espaces $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ dans le point de vue de Heisenberg.

Nous pouvons maintenant utiliser cette équation pour associer une "histoire" du système à la probabilité calculée : une histoire $\mathcal{H}$ est définie par une série de temps arbitraires $t_i$, chacun d'entre eux étant associé à un projecteur orthogonal $P_i$ sur un sous-espace donné ; sa probabilité est donnée

[15] Une autre possibilité est de considérer la mesure d'une observable $M$ quelconque dont une valeur propre $m$ engendre le sous-espace propre $\mathcal{F}$. Ce que nous désignons de façon concise par "probabilité de trouver l'état du système dans $\mathcal{F}$" n'est autre que la probabilité que le résultat obtenu soit $m$, de sorte que l'état du système est projeté par la mesure sur $\mathcal{F}$.

par (XI-19) que, pour simplifier, nous écrirons $\mathcal{P}(\mathcal{H})$. En d'autres termes, une histoire correspond à la sélection d'un chemin particulier, ou branche, du vecteur d'état dans une chaîne de von Neumann ; cette dernière est définie mathématiquement par une série de projecteurs associés à des temps donnés. Aucune référence particulière n'est plus faite à une mesure dans ce point de vue : une histoire décrit des propriétés intrinsèques du système physique, indépendamment de toute interaction éventuelle avec des systèmes externes. Inutile de préciser qu'il existe un très grand nombre d'histoires différentes, qui peuvent avoir toutes sortes de propriétés ; certaines d'entre elles sont précises car elles contiennent beaucoup de temps qui sont associés avec des projecteurs sur de petits sous-espaces $\mathcal{F}$ ; d'autres restent très vagues parce qu'elles ne contiennent que peu de temps et des projecteurs sur de grands sous-espaces $\mathcal{F}$ (on peut même choisir pour $\mathcal{F}$ l'ensemble de l'espace des états, de sorte que l'histoire correspondante ne contient aucune information au temps correspondant).

Il existe en fait tellement d'histoires qu'il est commode de les regrouper en familles. Une famille est définie à nouveau par une série de temps $t_1$, $t_2$, $t_3$,..., mais maintenant nous associons à chacun de ces temps $t_i$ un ensemble de projecteurs mutuellement orthogonaux $P_{i,j}$ dont la somme sur $j$ donne le projecteur sur l'ensemble de l'espace des états initial. Pour chaque temps nous avons alors une série de projecteurs orthogonaux qui donnent une décomposition de l'opérateur unité :

$$\sum_j P_{i,j} = 1 \tag{XI-20}$$

Ainsi le système a en quelque sorte le choix à chaque instant $t_i$ parmi tous les projecteurs, ce qui correspond à un choix parmi plusieurs histoires de la même famille. Il est en fait facile de voir à partir de (XI-20) et (XI-19) que la somme des probabilités d'une famille donnée est égale à l'unité :

$$\sum_{\text{histoires d'une famille}} \mathcal{P}(\mathcal{H}) = 1 \tag{XI-21}$$

ce qui s'interprète en disant que le système suivra toujours une, et une seule, des histoires de la famille considérée.

Le cas le plus simple se produit lorsqu'une famille est construite à partir d'une seule histoire : une façon triviale d'incorporer une histoire dans une famille est d'associer, à chaque temps $t_i$ ($i = 1, 2, ..., N$), en plus du projecteur $P_i$, le projecteur supplémentaire $Q_i = 1 - P_i$ ; la famille contient alors $2^N$ histoires individuelles. Inutile de dire qu'il existe bien d'autres façons de compléter une histoire avec d'autres histoires qui sont plus "précises" que celles contenant les $Q$ ; on peut décomposer chaque $Q$ en beaucoup d'autres projecteurs individuels, la seule limite étant la dimension totale de l'espace des états considéré.

### G-2. Familles cohérentes

Les définitions ci-dessus ne sont en général pas suffisantes pour garantir la cohérence logique des raisonnements. Une fois qu'on a choisi une famille donnée, il est en effet naturel d'incorporer également dans la famille toutes celles qui peuvent être construites en remplaçant par leur somme n'importe quelle paire de projecteurs, ou plus généralement n'importe quel groupe de projecteurs. La somme de deux projecteurs orthogonaux est effectivement encore un projecteur sur un sous-espace qui est la somme directe des espaces initiaux. La différence introduite par cette opération est que, maintenant, pour chaque instant les événements ne sont plus nécessairement exclusifs[16] ; les histoires incorporent alors une hiérarchie dans la précision de leurs descriptions, y compris même des situations où le projecteur à un instant donné est simplement le projecteur sur l'ensemble de l'espace des états (aucune information n'est donnée sur le système à cet instant).

Prenons le cas le plus simple où deux projecteurs seulement, correspondant à l'instant $t_i$, ont été regroupés en un seul pour construire une nouvelle histoire. Les deux histoires "parentes" correspondent alors à deux possibilités exclusives (elles contiennent des projecteurs orthogonaux), de sorte que leurs probabilités s'ajoutent indépendamment dans la somme (XI-21). Qu'en est-il de l'histoire "fille" ? Elle n'est exclusive d'aucun de ses parents et, en termes de propriétés physiques du système, elle contient moins d'information à l'instant $t_i$ : le système peut avoir les deux propriétés associées aux parents. Mais un théorème général de la théorie des probabilités dit que la probabilité d'un événement qui peut se réaliser par l'un quelconque de deux événements exclusifs est la somme des probabilités individuelles. On s'attend alors à ce que la probabilité de l'histoire fille soit la somme des probabilités des histoires parentes. Mais, d'autre part, en mécanique quantique la relation (XI-19) indique que cela n'est pas nécessairement vrai ; comme chaque projecteur, par exemple $\widehat{P}_2(t_2)$, apparaît deux fois dans la formule, le remplacer par une somme introduit quatre termes : deux termes "carrés" qui donnent la somme des probabilités, comme attendu, mais aussi deux termes croisés[17] (ou "termes d'interférence") entre les histoires parentes. Ainsi la probabilité de l'histoire fille est en général différente de la somme des probabilités des parents. Cette difficulté était prévisible : nous savons que la mécanique quantique est une théorie linéaire pour les amplitudes de probabilité, mais quadratique pour les probabilités elles-mêmes ; des interférences se produisent car le vecteur d'état à l'instant $t_i$, dans l'histoire fille, peut appartenir à l'un

[16] Pour ces familles non exclusives, la relation (XI-21) n'est plus valable, car elle ferait du double comptage de certaines possibilités.

[17] Ces termes croisés sont en fait très semblables au membre de droite de (XI-19), mais la trace contient toujours à un instant donné $t_i$ le projecteur $\widehat{P}_{i,j}(t_i)$ à gauche de $\rho(t_0)$ et le projecteur orthogonal $\widehat{P}_{i,k}(t_i)$ à droite.

des sous-espaces associés aux histoires parentes, mais peut également être une combinaison linéaire de tels états. C'est pourquoi une règle de somme concernant les probabilités n'est pas évidente.

Une façon de rétablir l'additivité des probabilités est de ne considérer que des familles pour lesquelles les termes croisés s'annulent, ce qui conduit à imposer les conditions :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left\{ ...\widehat{P}_{3,j_3}(t_3)\widehat{P}_{2,j_2}(t_2)\widehat{P}_{1,j_1}(t_1)\rho(t_0)\widehat{P}_{1,j'_1}(t_1)\widehat{P}_{2,j'_2}(t_2)\widehat{P}_{3,j'_3}(t_3)... \right\} \\ \propto \quad \delta_{j_1,j'_1} \times \delta_{j_2,j'_2} \times \delta_{j_3,j'_3} \times ... \end{aligned} \tag{XI-22}$$

Du fait de la présence du produit de deltas de Kronecker dans le membre de droite, le membre de gauche de (XI-22) s'annule dès qu'un couple d'indices $(j_1, j'_1)$, $(j_2, j'_2)$, $(j_3, j'_3)$, etc., contient des valeurs différentes ; si elles sont égales, la trace donne simplement la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ associée à l'histoire particulière de la famille. De cette façon nous introduisons la notion de "famille cohérente" : si la condition (XI-22) est remplie pour tous les projecteurs d'une famille donnée d'histoires, nous dirons que cette famille est logiquement cohérente, ou tout simplement cohérente par abréviation. La condition (XI-22) est fondamentale dans l'interprétation des histoires de la mécanique quantique ; on la trouve parfois exprimée sous une forme moins contraignante, comme l'annulation de la partie réelle seulement ; ce point, ainsi que d'autres reliés à la condition de cohérence, est brièvement discuté dans l'Appendice K. Venons-en maintenant à la façon dont les familles cohérentes peuvent être utilisées pour une interprétation de la mécanique quantique.

### G-3. Evolution quantique d'un système isolé

Considérons un système isolé et supposons qu'une famille cohérente d'histoires ait été choisie pour le décrire ; n'importe quelle famille cohérente peut être choisie mais, aussitôt que ce choix est fait, il ne doit pas être changé ensuite (nous discutons plus bas ce qui se produit si l'on essaye de décrire le même système avec plus d'une famille cohérente). Ce choix unique nous fournit un cadre logique bien défini, ainsi qu'une série d'histoires possibles qui sont accessibles au système et donnent des informations à tous les temps intermédiaires $t_1$, $t_2$,... On ne peut prédire à l'avance quelle histoire sera suivie par le système lors d'une réalisation unique d'une expérience : nous postulons donc l'existence d'un processus fondamentalement aléatoire dans la Nature qui sélectionne une histoire unique parmi toutes celles de la famille. La probabilité correspondante $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ est donnée par le membre de droite de (XI-19) ; comme cette formule est contenue dans la mécanique quantique standard, ce postulat garantit que les prédictions standard de la théorie sont obtenues sans changement dans le nouveau point de vue. Pour chaque réalisation, le système possède donc à chacun des temps $t_i$ toutes les propriétés physiques

associées aux projecteurs particuliers $P_{i,j}$ qui sont concernés par l'histoire choisie.

Cette méthode fournit une description de l'évolution de ses propriétés physiques qui peut être plus précise que celle du vecteur d'état ; en fait, plus les sous-espaces associés aux projecteurs $P_{i,j}$ sont petits, plus l'on gagne en précision[18]. Par exemple, si le système est une particule et si le projecteur est le projecteur sur une région de l'espace, nous pourrons dire que pour une histoire donnée la particule est dans cette région à l'instant correspondant, même si l'ensemble de la fonction d'onde de Schrödinger s'étend sur une région bien plus grande. Ou alors, si un photon pénètre dans un interféromètre de Mach-Zehnder, certaines histoires du système peuvent contenir de l'information sur la trajectoire choisie par le photon dans l'interféromètre[19], alors que la mécanique quantique standard considère que la particule prend toutes les trajectoires à la fois. Comme les histoires comprennent plusieurs temps différents, on peut même tenter de reconstruire une trajectoire approchée pour la particule, chose qui est totalement exclue en mécanique quantique standard (par exemple pour une fonction d'onde qui est une onde sphérique) ; mais, bien sûr, il faut toujours s'assurer que les projecteurs introduits dans ce but restent compatibles avec la condition de cohérence pour une famille.

L'information contenue dans les histoires ne concerne pas nécessairement que la position : un projecteur peut également projeter sur un ensemble de vecteurs propres de l'impulsion, ou inclure une information mélangée entre position et impulsion (en tenant compte, bien sûr, des relations de Heisenberg, comme toujours en mécanique quantique), une information sur le spin, etc. Il existe en fait une immense flexibilité concernant le choix des opérateurs ; pour chaque choix, les propriétés physiques qui peuvent être attribuées au système sont toutes celles qui appartiennent en commun à tous les états invariants sous l'action du projecteur, mais pas les états qui s'annulent sous son action. Un choix fréquent est de supposer que, à un instant particulier $t_i$, tous les $P_{i,j}$ sont les projecteurs sur les états propres d'un opérateur her-

[18] Inversement, il est bien évident qu'aucune information n'est gagnée si tous les projecteurs $P_{i,j}$ sont des projecteurs sur tout l'espace des états ; cela correspond à un cas trivial de peu d'intérêt.

[19] Supposons effectivement que, avec un interféromètre de Mach-Zhender, la famille fournisse de l'information sur le chemin pris par le photon à l'intérieur de l'interféromètre. Dans ce cas, la cohérence demande que l'histoire ne donne aucune information sur la voie de sortie de la particule (après la seconde lame séparatrice), et donc quel détecteur est activé par la particule. La raison en est que, dans les probabilités de présence de la particule dans chacune des voies de sortie, il existe des termes d'interférence entre les chemins intermédiaires, alors que ces termes disparaissent si l'on somme les probabilités sur les deux voies de sortie.

On peut également construire des familles d'histoires cohérentes où le canal de sortie est spécifié (quel détecteur est activé), mais alors la cohérence exige qu'aucune information ne soit donnée sur le trajet du photon dans l'interféromètre. C'est une illustration de la façon dont la complémentarité apparaît dans le cadre de l'interprétation des histoires cohérentes.

mitique $H$ : le premier opérateur $P_{i,j=1}$ est le projecteur sur tous les états propres de $H$ correspondant à la valeur propre $h_1$, le second $P_{i,j=2}$ le projecteur correspondant pour la valeur propre $h_2$, etc. Dans un tel cas, toutes les histoires de la famille incluent une information exacte sur la valeur à l'instant $t_i$ de la grandeur physique associée à $H$ (l'énergie par exemple, si $H$ est l'hamiltonien). Mais, comme déjà signalé, il n'est pas possible de choisir n'importe quel opérateur $H_i$ à tout instant $t_i$ : si l'on choisit arbitrairement des quantités physiques de cette façon, en général il n'y a aucune raison pour que la condition de cohérence soit satisfaite pour une famille.

Avec les histoires, nous obtenons une description des propriétés du système en lui-même, sans faire référence particulière à des mesures, des observateurs, etc. Ceci n'implique pas que les mesures sont exclues ; elles peuvent en fait simplement être considérées comme des cas particuliers, à condition d'inclure les appareils physiques correspondants dans le système étudié. De plus, on attribue des propriétés au système à des temps différents, ce qui s'oppose à l'interprétation orthodoxe, où l'opération de mesure ne révèle aucune propriété pré-existante du système, et de surcroît le projette sur un nouvel état qui peut être complètement indépendant de l'état initial. Il est facile de montrer que le formalisme des histoires cohérentes est invariant par renversement du temps, en d'autres termes qu'il ne fait aucune distinction entre le passé et le futur (au lieu de l'opérateur densité initial $\rho(t_0)$, on peut se donner l'opérateur densité final $\rho(t_N)$ et continuer à utiliser le même formalisme quantique [551]) – pour plus de détails, et même une définition intrinsèque de la cohérence qui ne met en jeu aucun opérateur densité, voir le § III de la Ref. [552]. De plus, il est possible d'étudier une relation entre les familles cohérentes et les descriptions semi-classiques d'un système physique ; voir la Ref. [547] pour une discussion de la façon dont les équations classiques peuvent être obtenues pour un système quantique pourvu qu'un moyennage à gros grains suffisant soit effectué (afin de garantir, non seulement la décohérence nécessaire entre les diverses histoires de la famille, mais également ce que les auteurs de cette référence appellent l'inertie pour retrouver la prédictabilité classique). Voir aussi le Chapitre 16 de [548] pour une discussion de la façon dont le déterminisme classique est rétabli, dans une forme faible qui garantit des corrélations parfaites entre les valeurs d'observables quasi-classiques à des temps différents (il va sans dire qu'il n'est pas question de déterminisme fondamental dans ce contexte). Le point de vue des histoires quantiques a sans nul doute bien des aspects séduisants, et paraît particulièrement clair et simple à mettre en œuvre, du moins tant qu'on se limite à une seule famille d'histoires cohérentes.

### G-4. Incompatibilité des familles différentes

Comment alors traite-t-on dans cette interprétation les problèmes soulevés par l'existence de nombreuses familles cohérentes ? A priori, elles sont toutes sur le même plan et toutes aussi valables, mais il est évident qu'elles conduisent à des descriptions totalement différentes de l'évolution du même système physique ; c'est là l'aspect le plus délicat de cette interprétation (nous y reviendrons plus bas). L'interprétation des histoires spécifie que des familles différentes d'histoires cohérentes doivent impérativement être considérées comme mutuellement exclusives (sauf, évidemment, dans le cas très particulier où les deux familles peuvent être incorporées dans une plus grande famille cohérente unique) ; n'importe quelle famille peut être utilisée pour un raisonnement logique, mais il est interdit de la combiner avec d'autres. Certes, dans une seconde étape indépendante, on peut faire le choix d'utiliser une autre famille et de développer d'autres considérations logiques dans un autre cadre ; mais il n'y aurait aucun sens (on tomberait dans des incohérences logiques) à combiner les considérations provenant des deux cadres de raisonnement. C'est une règle fondamentale importante, qui rappelle la complémentarité, et qui doit constamment être gardée à l'esprit. Nous renvoyons le lecteur à la Ref. [552] pour une discussion détaillée et systématique de la façon de procéder de façon cohérente en présence de familles disparates, et à la Ref. [553] pour un certain nombre d'exemples simples de familles incompatibles (un photon traversant une lame semi-réfléchissante, § II) et une discussion de l'incompatibilité quantique (§ V) ; diverses analogies classiques sont discutées à propos de cette incompatibilité, y compris une représentation à deux dimensions d'un objet à trois dimensions par un dessinateur, qui est libre de choisir de très nombreux points de vue pour faire son dessin, mais qui ne peut en aucun cas en prendre plusieurs simultanément – sinon la projection deviendrait incohérente.

### G-5. Comparaison avec d'autres interprétations

Dans l'interprétation des histoires, nul n'est besoin d'invoquer des observateurs, des appareils de mesure, etc. Le système possède des propriétés en lui-même, comme dans la théorie de Bohm (§ H-1) ou celles de dynamique de Schrödinger modifiée (§ K). Lorsqu'on la compare aux autres interprétations, la caractéristique de l'interprétation des histoires qui saute le plus aux yeux est probablement l'immense flexibilité qui existe pour la sélection des points de vue possibles pour décrire le système. On peut même se demander si l'interprétation en question est suffisamment spécifique, et si ce nombre immense d'histoires n'est pas un sérieux problème.

Quelle est la relation exacte entre l'interprétation des histoires et l'interprétation orthodoxe ? Elles sont assurément proches, mais plusieurs concepts sont exprimés de façon plus précise dans le point de vue des histoires. Par

exemple, la complémentarité apparaît dans l'interprétation de Copenhague comme un principe général, presque philosophique. Dans l'interprétation des histoires, elle est étroitement reliée à des conditions mathématiques précises, des conditions de cohérence et d'orthogonalité de projecteurs. Revenir à la physique classique qui permet une définition simultanée de toutes les observables est impossible : chaque projecteur ne peut être plus précis que le projecteur sur un état quantique unique $|\varphi\rangle$, qui lui-même est évidemment sujet aux relations d'incertitude du fait de la structure même de l'espace des états. Bien sûr, les considérations inspirées de Bohr concernant les appareils de mesures incompatibles restent toujours valables, ainsi que la distinction entre les mondes microscopique et macroscopique, mais avec les histoires elles perdent une partie de leur caractère fondamental. L'interprétation des histoires permet l'existence d'une théorie de l'Univers entier (voir par exemple la citation (x) du § E du Chapitre II) ; nous n'avons plus à nous préoccuper de diviser le monde physique entre système observé et observateur.

La plus grande différence entre la théorie standard et l'interprétation des histoires est probablement dans la façon dont elles décrivent l'évolution temporelle d'un système physique. Dans l'interprétation habituelle, nous avons deux postulats différents pour l'évolution d'un seul objet, le vecteur d'état ; dans l'interprétation des histoires, l'évolution de Schrödinger continue et l'évolution aléatoire du système entre histoires sont placées à des niveaux totalement différents, de sorte que le conflit est bien moins direct. En fait, dans l'interprétation des histoires, l'évolution de Schrödinger joue un rôle au niveau de la définition initiale des familles cohérentes (via les opérateurs d'évolution contenus dans les projecteurs en point de vue de Heisenberg) et dans le calcul de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ ; l'évolution en temps réel se produisant entre les temps $t_i$ et $t_{i+1}$ est purement stochastique. Une évolution totalement non déterministe est devenue la source majeure d'évolution ! On peut voir ceci comme une sorte d'inversion des priorités par rapport au point de vue orthodoxe, où la source principale d'évolution est plutôt déterministe et conséquence de l'équation de Schrödinger. Toutefois, en dépit de ces différences, il reste vrai que l'interprétation des histoires découle d'un esprit très proche de celui de l'interprétation orthodoxe ; elle a d'ailleurs été décrite comme une "extension de l'interprétation de Copenhague", ou "une façon de mettre en lumière la cohérence interne de la notion de complémentarité". Cependant Gell-Mann et Hartle préfèrent un point de vue plus général sur l'interprétation des histoires [554] où l'interprétation de Copenhague devient "juste un cas particulier d'une interprétation en termes d'histoires décohérentes de l'Univers. L'interprétation de Copenhague est trop spéciale pour être fondamentale".

Qu'en est-il de l'interprétation "des corrélations" ? Elle aussi semble très proche, puisque les deux points de vue attribuent un rôle central à la formule de Wigner. En un sens, cette interprétation minimale est contenue à la fois

dans l'interprétation de Copenhague et dans l'interprétation des histoires. Certains physiciens partisans de l'interprétation des corrélations feraient probablement valoir qu'ajouter une discussion physique en termes d'histoires cohérentes à leur calcul mathématique des probabilités n'ajoute pas grand chose à leur point de vue : ils sont satisfaits par un calcul des corrélations et n'éprouvent aucun besoin de parler des propriétés de l'évolution du système lui-même. De plus, ils pourraient ajouter qu'ils préfèrent pouvoir insérer dans (XI-9) n'importe quel projecteur associé à une série de mesures, sans avoir à se préoccuper de conditions de cohérence des histoires : dans le cadre de l'interprétation des histoires, une séquence arbitraire de mesures correspond à des histoires non cohérentes pour le système isolé (il est indispensable d'ajouter les appareils de mesure pour restaurer la cohérence). Nous avons déjà remarqué dans le § A-2 que l'interprétation des corrélations permet une très grande souplesse en ce qui concerne la frontière entre le système mesuré et son environnement. Ainsi, pour ces physiciens, l'interprétation des histoires est probablement plus une possibilité intéressante qu'une nécessité, mais n'introduit pas pour autant des contradictions.

Existe-t-il également des similarités avec les théories à variables supplémentaires ? Oui dans une certaine mesure. Au sein d'une famille donnée, il existe un grand nombre d'histoires correspondant à la même évolution de Schrödinger ; pour chaque histoire, nous avons vu que la quantité d'information concernant l'évolution des propriétés physiques du système est plus grande que celle donnée par le vecteur d'état seul. Dans ces conditions, le vecteur d'état peut apparaître comme une description non complète de la réalité, et l'on peut même soutenir que les histoires elles-mêmes sont des variables supplémentaires[20]. En un sens, les histoires proposent une sorte de point de vue intermédiaire entre une trajectoire de Bohm (§ H-1-c) infiniment précise pour la position et une fonction d'onde très délocalisée. En théorie de Bohm, la fonction d'onde pilote la position des particules ; dans l'interprétation des histoires cohérentes, la propagation de la fonction d'onde définit plutôt les histoires par une condition de cohérence, fournit également un calcul des probabilités de ces histoires, mais pas l'évolution entre les temps $t_i$ et $t_{i+1}$, qui est supposée fondamentalement aléatoire.

Deux théories, l'une déterministe, l'autre complètement indéterministe, sont nécessairement différentes sur le plan conceptuel. Toutefois, il n'est pas impossible de transposer certaines des idées de Bohm à l'interprétation des histoires, afin de la rendre déterministe. Considérons une famille cohérente donnée pour laquelle, à l'instant $t_1$, le nombre de projecteurs $P_{j1}$ différents est $Q_1$ ; à l'instant $t_2$ le nombre de projecteurs différents est $Q_2$, etc. On pourrait alors introduire par exemple une variable supplémentaire $x(t_i)$ qui,

[20] Ces variables dépendraient alors de la famille considérée, et ne seraient donc pas des éléments de réalité au sens de EPR, comme nous le verrons plus bas.

par définition, appartient toujours à l'intervalle $[0,1]$, et postuler que cette variable donne un critère pour fixer, parmi tous les projecteurs $P_{ji}$ à chaque instant $t_i$, lequel est "réalisé" (quel projecteur définit des propriétés physiques qui sont effectivement associées à cette histoire à cet instant). Mathématiquement, ceci peut être obtenu en divisant l'intervalle $[0,1]$ en $Q_i$ intervalles plus petits $I_{ij}$ (avec $j = 1, 2, ..., Q_i$) et en associant les valeurs de $x(t_i)$ comprises dans l'intervalle $I_{ij}$ à la réalisation du projecteur $P_{ji}$. De cette façon, une "trajectoire", définie par les valeurs de $x(t)$ à tous les instants discrets $t_1$, $t_2$, ...,$t_i$, ... définit une histoire unique dans la famille. A l'instant initial $t_1$, comme en théorie de Bohm, on peut alors supposer une distribution de probabilités qui reproduit les prédictions quantiques, et pour finir définir une loi de mouvement pour le point qui garantisse la compatibilité avec les prédictions de la mécanique quantique standard[21] – ici la relation (XI-19). En ajoutant ainsi la variable $x(t)$ à l'interprétation des histoires, cette dernière peut donc être rendue déterministe et, dans une certaine mesure, compatible avec les idées de Bohm. Il reste que, dans l'état actuel des deux théories, on conclurait plutôt que les deux théories donnent des points de vue très différents sur la mécanique quantique.

Enfin, comment s'effectue la comparaison avec les théories à dynamique de Schrödinger modifiée (§ K) ? En un sens, elles découlent d'une stratégie complètement opposée, puisqu'elles introduisent dans une équation unique l'évolution continue du vecteur d'état ainsi qu'un mécanisme simulant sa réduction (quand c'est nécessaire) ; à l'opposé, l'interprétation des histoires met sur des niveaux différents l'évolution continue de Schrödinger et une sélection des histoires suivies par le système qui est totalement aléatoire. On pourrait se risquer à dire que la dynamique modifiée est un prolongement du programme purement ondulatoire de Schrödinger, alors que l'interprétation des histoires est une version moderne des idées mises en avant par Bohr. Une autre différence importante est, bien sûr, qu'une théorie à dynamique modifiée n'est pas parfaitement équivalente à la théorie standard, ce qui peut conduire à des tests expérimentaux, alors que l'interprétation des histoires cohérentes est construite pour reproduire strictement les prédictions de la mécanique quantique standard – même si elle peut parfois fournir des points de vue qui sont utiles pour mieux en comprendre le contenu [426].

### G-6. Une profusion d'histoires ; discussion

Revenons pour finir à la discussion de l'impact de la profusion des points de vue possibles fournis par toutes les familles satisfaisant le critère de co-

[21] Ceci pourrait être fait, soit de façon continue en postulant une équation d'évolution de $x(t)$, soit par marches discrètes en postulant une application de l'intervalle $[0,1]$ sur lui-même correspondant à la translation dans le temps de $t_i$ à $t_{i+1}$ (notons au passage une analogie avec la notion de carte de Poincaré en mécanique classique).

hérence logique. Nous avons déjà remarqué qu'il n'existe pas, et de loin, une seule façon dont cette interprétation peut décrire les propriétés physiques d'un système – par exemple toutes les descriptions complémentaires de l'interprétation de Copenhague apparaissent au même niveau. Il s'agit là d'une souplesse énorme, bien plus grande qu'en physique classique ou même qu'en théorie de Bohm. Les règles que nous avons définies ci-dessus ("pas de combinaison de points de vue différents") sont-elles véritablement suffisantes pour garantir que la théorie est vraiment satisfaisante ? La réponse à cette question n'est pas très claire, et pour plusieurs raisons. En premier lieu, pour des systèmes macroscopiques, il serait naturel de souhaiter que la théorie introduise naturellement une restriction à des familles d'histoires qui aient un caractère quasi classique ; par malheur, le nombre de familles cohérentes est bien trop grand pour qu'elles possèdent cette propriété [444]. C'est la raison pour laquelle ont été proposés des critères plus restrictifs pour sélectionner les familles, mais pour le moment aucune solution complète n'a été trouvée de sorte que le consensus n'est pas complet ; les conséquences physiques détaillées des conditions de cohérence sont toujours l'objet de travaux, et de fait fournissent un sujet de recherche intéressant. De plus, les paradoxes historiques ne sont pas tous résolus dans l'interprétation des histoires. Certains le sont, par exemple le paradoxe de l'ami de Wigner, dans la mesure où aucune référence à l'observateur n'est faite dans cette interprétation. Mais d'autres restent sans réponse, trouvant juste une reformulation dans un formalisme et un vocabulaire différents.

Prenons par exemple le paradoxe du chat de Schrödinger, paradoxe qui initialement provient du fait que l'équation de Schrödinger ne contient aucun ingrédient qui permette l'émergence de résultats macroscopiques uniques – en d'autres termes qui permette d'exclure des superpositions macroscopiques pour un système isolé et non observé. Dans l'interprétation des histoires, le paradoxe se transpose en termes de familles d'histoires où le chat peut se trouver à la fois mort et vivant ; en fait, la plupart des histoires qui sont mathématiquement acceptables en termes de condition de cohérence contiennent des projecteurs sur des superpositions macroscopiques, tout en gardant exactement le même statut que les familles "physiques" pour lesquelles ce n'est pas le cas. On aurait alors tendance à rechercher une condition de "super-cohérence" qui permette d'éliminer systématiquement ces superpositions, mais pour le moment cette condition n'existe pas. A ce stade, on peut faire deux choses : soit considérer que la question du choix d'un ensemble d'histoires raisonnables est juste une question de bon sens – mais alors on retourne à la situation habituelle dans l'interprétation standard, où l'application du postulat de réduction du vecteur d'état est également laissée au bon goût du physicien ; soit invoquer la décohérence et le couplage au monde extérieur pour éliminer toutes les familles indésirables – mais alors on revient à la situation habituelle où, conceptuellement, il est impossible d'attribuer des propriétés physiques

raisonnables à un système fermé, sans faire référence au monde extérieur et aux interactions avec lui[22].

Enfin on peut remarquer que, dans l'interprétation des histoires, il n'est fait aucune tentative de "suivre en temps réel" l'évolution du système physique ; on parle des histoires uniquement en tant que processus complets, "fermés dans le temps", en fait en un sens presque comme des histoires du passé. Des questions fondamentales qui étaient à l'origine de l'introduction de la réduction du vecteur d'état, par exemple "comment décrire la réalité physique d'un spin qui a subi une première mesure mais pas encore la seconde", n'ont pas de réponse simple. En fait, la condition de cohérence de l'histoire complète dépend du choix futur des observables qui seront mesurées, de sorte que la discussion n'est pas plus facile qu'au sein de l'interprétation traditionnelle – peut-être en fait plus complexe du fait que c'est tout le cadre logique qui est en discussion. Que dira-t-on d'une série de mesures qui pourront être effectuées, ou pas, en fonction d'une décision qui n'est pas encore prise ? En ce qui concerne les expériences de corrélation EPR, elles peuvent être ré-analysées dans l'interprétation des histoires et son formalisme [555] (voir également [236] pour une discussion des impossibilités de Hardy et de la notion de "contrafactualité cohérente") ; cependant, à un niveau fondamental, le raisonnement EPR doit toujours être rejeté pour exactement les mêmes raisons que celles invoquées par Bohr il y a bien longtemps : son erreur est d'introduire la notion d'éléments de réalité EPR, ou des arguments contrafactuels, qui ne sont pas plus valables dans l'interprétation des histoires que dans l'interprétation de Copenhague (voir par exemple le § V de [555] ou la première lettre dans [554]). Nous sommes donc ramenés au vieux débat sans aucun élément fondamentalement nouveau. Toutefois nous avons déjà remarqué, que, comme l'interprétation des corrélations, celle des histoires peut être complétée par d'autres ingrédients, par exemple l'interprétation de Everett ou, à l'autre extrême, des ingrédients EPR ou déterministes, cas auquel la situation deviendrait bien sûr différente.

Voir les références données au début de cette partie pour une discussion plus détaillée de cette interprétation. Pour une discussion sur les relations avec la décohérence, la notion de base préférée (ou base de l'aiguille du compteur), ainsi que les probabilités classiques, voir [444]. Pour une critique de l'interprétation des histoires cohérentes, voir par exemple [556], où entre autres on met en avant que les conditions de cohérence ne sont pas suffisantes

[22]Par exemple, dans le contexte des histoires, on invoque parfois l'impossibilité de construire un appareillage permettant de distinguer une superposition macroscopique d'une superposition orthogonale ; ceci justifierait l'élimination de celles qui devraient vraiment être utilisées pour décrire la réalité. Un tel argument réintroduit la notion de mesure et d'observateurs, en contradiction avec les motivations initiales de cette approche – voir la citation de Rosenfeld dans le § E du Chapitre II. De plus, ceci ré-ouvrirait immédiatement la porte aux paradoxes du type ami de Wigner, etc.

pour prévoir la persistance de la quasi-classicalité, même à l'échelle de l'Univers ; voir aussi la Ref. [557], qui considère que ces conditions ne sont pas suffisantes pour établir la validité de l'interprétation de Copenhague dans le futur ; mais voir aussi la réponse à cette critique de Griffiths dans [553]. Il existe un lien [558] entre l'interprétation des histoires et la théorie des mesures continues en mécanique quantique (§ C-2 du Chapitre IX), ainsi que la technique des trajectoires quantiques stochastiques (§ K-3). Enfin, une autre référence instructive est un article publié en 1998 dans *Physics Today* [18], qui contient une discussion de l'interprétation des histoires en des termes qui ont suscité des réactions intéressantes de ses défenseurs [554].

## H. Variables supplémentaires ("cachées")

Avec les variables supplémentaires/cachées, nous quittons maintenant le domaine des interprétations proches de l'interprétation standard ; clairement, des éléments qui n'appartiennent pas à la théorie standard sont introduits. Les variables supplémentaires sont ajoutées au vecteur d'état quantique afin d'obtenir une description physique d'un système unique plus précise qu'en mécanique quantique standard. Nous avons déjà vu que le théorème EPR lui-même peut être vu comme un fort argument en faveur de l'existence de telles variables supplémentaires. Ces variables sont parfois appelées "cachées", même si ce mot est quelque peu paradoxal, puisqu'elles sont dans la plupart des cas bien plus visibles que le vecteur d'état complexe[23] ; Bell préférait utiliser le mot "beable" [560] combinant la notion d'être (to be) avec la fin du mot variable, mot qui tend à être utilisé dans la littérature récente. Pour notre part, nous utiliserons le mot "supplémentaire" à cause de sa généralité.

Les théories à variables supplémentaires sont habituellement construites mathématiquement de façon à reproduire exactement toutes les prédictions de la mécanique quantique standard ; elles donnent alors exactement les mêmes probabilités pour tous les types de mesures possibles, de sorte qu'il est clair qu'il n'y aura jamais aucun espoir de mettre en défaut la mécanique quantique pour laisser la place à ces théories, ou le contraire. En ce sens, elles ne sont pas réellement des théories complètement nouvelles, mais plutôt des variations sur une théorie connue (une exception est cependant mentionnée dans le § H-1-g). Elles possèdent toutefois un intérêt conceptuel réel, car elles proposent une description et une explication physiques des phénomènes physiques qui diffèrent de celles de la théorie standard. Elles peuvent

[23] Les variables supplémentaires apparaissent directement dans les résultats de mesure de sorte que, au lieu d'être cachées, elles sont actuellement bien visibles. Dans [559], Bell écrit "De façon absurde, ces théories sont connues sous le nom de 'théories à variables cachées'. C'est absurde, car dans ce cas ce n'est pas dans la fonction d'onde que l'on peut trouver une image du monde visible et des résultats des expériences, mais dans les variables 'cachées' (!) qui ont été ajoutées".

ainsi rétablir le réalisme et résoudre les difficultés provenant de la coexistence entre deux sortes d'évolution du vecteur d'état (paradoxe du chat de Schrödinger). Elles peuvent également rétablir le déterminisme, sans que cela soit une nécessité, puisque l'on peut également bâtir des théories à variables supplémentaires qui restent fondamentalement non déterministes.

## H-1. Théorie de De Broglie-Bohm (dBB)

En mécanique quantique standard, un seul objet quantique peut parfois se comporter comme une particule, parfois comme une onde, parfois combiner les deux. En théorie de De Broglie-Bohm (que nous appellerons dBB), cette dualité est remplacée par une coexistence : onde et particule coexistent à tout instant et, de plus, la première est constamment guidée par la seconde. Le système élémentaire appelé "particule quantique" en théorie standard est remplacé par une paire indissociable comprenant à la fois une particule et un champ. Après une introduction historique, nous commençons par une brève discussion du cadre général de cette théorie ; nous discuterons ensuite les trajectoires pour une ou deux particules. Ceci nous conduira à l'étude du processus de mesure dans ce cadre, et au commentaire de quelques objections qui ont été faites à cette théorie. Nous conclurons par une discussion mettant en perspective les succès de cette théorie.

### H-1-a. Historique

Les théories à variables supplémentaires ont débuté en 1926-1927 avec le travail précurseur de L. de Broglie [561, 562], directement issu de celui de sa thèse [30]. L. de Broglie a en premier lieu proposé une "théorie de la double solution", dont le nom vient du fait que la même équation d'onde admet deux solutions : la fonction d'onde habituelle $\Psi(\mathbf{r})$, et une solution $u(\mathbf{r})$ possédant des singularités mobiles qui représentent la particule elle-même. La particule est en quelque sorte considérée comme une concentration d'énergie dans la région de singularité, et reste ainsi localisée comme en physique classique. Elle est également assimilée à une petite horloge dont les vibrations internes doivent rester synchronisées avec l'onde externe, ce qui fixe son mouvement : "le corpuscule glisse sur son onde de façon que sa vibration interne reste toujours en phase avec la vibration de l'onde au point où il se trouve"[24]. Mathématiquement, ceci conduit à écrire pour $u(\mathbf{r})$ une "équation de guidage" contenant la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{r})$. Comme cette dernière est sujette à des effets de diffraction sur les obstacles extérieurs, on peut alors retrouver les

[24] Dans le point de vue de De Broglie, une particule unique est réellement représentée par une onde $u(\mathbf{r})$, alors que la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{r})$ ne donne qu'une description statistique valable pour un ensemble de particules, de sorte qu'elle ne jouit alors pas du même statut de réalité. Il décrit cette situation comme un intriguant "mélange de l'individuel et de la statistique" [101].

prédictions habituelles de la mécanique quantique, à condition de supposer que la distribution initiale statistique des singularités soit donnée par $|\Psi(\mathbf{r})|^2$.

Invité par Lorentz à présenter son travail au congrès Solvay de 1927, il semble que L. de Broglie ait été quelque peu inquiet du fait des difficultés mathématiques de sa théorie, [101, 563], ce qui explique pourquoi il a préféré exposer devant cet auditoire une version plus simple[25], la "théorie de l'onde pilote". Dans cette version, la singularité de l'onde $u(\mathbf{r})$ est simplement remplacée par une position, comme en mécanique classique, tout en suivant un mouvement très différent du mouvement classique puisqu'à nouveau il est déterminé par l'onde pilote. L'idée générale est donc que la fonction d'onde ne représente pas directement une particule quantique, mais constitue plutôt une onde guidant le mouvement de la particule.

En 1926, Born avait d'ailleurs également envisagé la possibilité d'introduire des "paramètres supplémentaires" dans la théorie, au cours de son fameux article proposant l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde [34] ; il avait même travaillé plus en détail sur ce sujet avec son assistant Frenkel [58] mais, malheureusement, ce travail semble avoir été perdu. Le Chapitre 8 de la Ref. [564] discute plus en détail les premières tentatives visant à développer des théories quantiques déterministes.

En 1952, Bohm [11, 565] mit au point indépendamment une version plus complète de la théorie de l'onde pilote, donc en ajoutant à la fonction d'onde simplement une position pour la particule, et non pas une autre onde. A nouveau, le mouvement de la particule est guidé par les gradients de la fonction d'onde, comme dans la théorie de De Broglie, mais Bohm a ajouté des éléments nouveaux comme nous le verrons ci-dessous. Les deux points de vue partagent donc des concepts de base communs, et l'on parle souvent de la "théorie de De Broglie-Bohm". A l'heure actuelle, parmi les diverses théories qui ajoutent des variables supplémentaires à la mécanique quantique, la théorie de Bohm est probablement la plus connue. Un autre exemple est le travail de Wiener et Siegel [12], qui ont mis au point une formulation mathématique de la mécanique quantique en termes de probabilités (ou de densités de probabilité) au lieu d'amplitudes de probabilités, tout en conservant des

[25] Au congrès Solvay, W. Pauli éleva des objections à la théorie de l'onde pilote, en particulier parce qu'il pensait qu'elle ne pouvait pas reproduire les résultats de la théorie standard pour des collisions inélastiques. Nous savons maintenant qu'on peut parfaitement construire une théorie de l'onde pilote qui donne exactement les mêmes prédictions que la théorie standard, de sorte que cette objection ne tient pas.
Plus tard, de Broglie a regretté [101] d'avoir ainsi "affaibli sa position" en présentant une "forme tronquée" de sa théorie de la double solution, privée des singularités des ondes et donc de certains de ses avantages. Il était particulièrement intéressé par des similarités avec la théorie de la relativité générale, où le mouvement des singularités du champ de gravitation suit les géodésiques de l'espace-temps. Dans cette perspective, il a envisagé l'idée d'introduire une équation d'onde non linéaire spécifique à l'onde $u(\mathbf{r})$, ce qui a pour effet de diluer sa singularité sur une toute petite région de l'espace.

résultats parfaitement équivalents à ceux des probabilités standard. Un tel point de vue élimine totalement la nécessité d'introduire un postulat spécial pour le processus de mesure.

#### H-1-b. Cadre général

Nous commençons par exposer les composantes essentielles de la théorie dBB.

*α. Terme de vitesse quantique*

Aucun des ingrédients habituels de la mécanique quantique standard ne disparaît dans une théorie à variables supplémentaires comme la théorie dBB. Au lieu de rester un objet avec un statut de réalité intermédiaire (§ B-3), la fonction d'onde agit directement sur la position réelle de la particule par l'intermédiaire du gradient de sa phase. L'équation de Schrödinger elle-même reste strictement inchangée. Un ingrédient totalement nouveau est cependant ajouté : en plus de sa fonction d'onde, chaque particule se voit attribuer une variable supplémentaire $\lambda$, ou plus précisément trois variables supplémentaires qui sont les trois composantes d'un vecteur $\mathbf{Q}$. L'évolution de $\mathbf{Q}$ est couplée à la fonction d'onde par un "terme de vitesse quantique" (ou "formule de guidage") qui, pour une particule unique de fonction d'onde $\Psi(\mathbf{r},t)$, s'écrit[26] :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Q} = \frac{1}{m\,|\Psi(\mathbf{Q},t)|^2}\,\mathrm{Re}\left[\Psi^*(\mathbf{Q},t)\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}\Psi(\mathbf{Q},t)\right] = \frac{\hbar}{m}\boldsymbol{\nabla}\xi(\mathbf{Q},t) \qquad \text{(XI-23)}$$

où $m$ est la masse de la particule et $S(\mathbf{r},t)$ la phase du nombre complexe $\Psi(\mathbf{r},t)$. Le membre de droite de cette équation est simplement le rapport entre le courant de probabilité standard :

$$\mathbf{J}\,(\mathbf{r},t) = \frac{1}{m}\,\mathrm{Re}\left[\Psi^*(\mathbf{r},t)\frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}\Psi(\mathbf{r},t)\right] \qquad \text{(XI-24)}$$

et la densité de probabilité $|\Psi(\mathbf{r},t)|^2$, tous deux pris au point $\mathbf{r} = \mathbf{Q}$ ; en d'autres termes, la dérivée par rapport au temps de $\mathbf{Q}$ n'est autre que la vitesse locale de la version hydrodynamique de l'équation de Schrödinger introduite par Madelung en 1927 [566]. Le vecteur $\mathbf{Q}$ sera appelé la "position bohmienne" de la particule, et sa dérivée temporelle donnée par (XI-23) "vitesse bohmienne", mais pour simplifier nous omettrons parfois le mot "bohmienne".

[26] Nous supposons ici que le potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ est nul. En présence d'un potentiel vecteur, et avec une particule de charge $q$, dans le membre de droite de (XI-23) il faudrait remplacer remplacer $(\hbar/i)\boldsymbol{\nabla}$ par $(\hbar/i)\boldsymbol{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$, de sorte que $\hbar\boldsymbol{\nabla}\xi$ deviendrait $\hbar\boldsymbol{\nabla}\xi - q\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$. La vitesse de la position $\mathbf{Q}$ est alors invariante de jauge.

Pour un système de $N$ particules, les variables supplémentairres sont les $3N$ composantes des vecteurs $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$,...,$\mathbf{Q}_N$, qui ensemble définissent un vecteur dans l'espace des configurations évoluant selon une généralisation directe de (XI-23) : la dérivée temporelle de chaque $\mathbf{Q}_i$ est obtenue en y remplaçant le gradient $\boldsymbol{\nabla}$ par le gradient $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}_i}$ de dérivée partielle par rapport à la variable correspondante dans la fonction d'onde – voir par exemple (XI-26). Un point important à noter est qu'il n'existe pas de rétroaction des variables supplémentaires sur la fonction d'onde ; le couplage ne va que dans un sens. Ainsi, depuis le début, la théorie introduit donc une dissymétrie marquée entre les deux objets qui sont utilisés pour décrire le système quantique ; nous verrons plus bas qu'ils ont également des propriétés physiques très différentes.

Le terme de vitesse quantique dépend seulement du gradient de la phase de la fonction d'onde, pas de son module. Ainsi, des fonctions d'onde de valeurs arbitrairement faibles peuvent avoir une influence finie sur les particules. Avec un paquet d'ondes gaussien par exemple, l'influence du paquet d'ondes sur la vitesse de la particule est comparable près du centre du paquet d'ondes et à une distance arbitrairement grande, où la fonction d'onde est exponentiellement petite (mais pas exactement zéro). Bien évidemment, des situations où la position de la particule se trouve très loin du centre du paquet d'ondes sont très rares, mais lorsqu'elles se produisent, la position est guidée de façon aussi efficace dans tout l'espace.

Pour rendre sa théorie plus semblable à la mécanique classique, Bohm n'est pas parti directement de (XI-23) mais a introduit la notion de "potentiel quantique" ; ce dernier dépend de la fonction d'onde et vient ajouter son effet à celui du potentiel habituel $V(\mathbf{r})$ agissant sur la particule. Sa valeur est :

$$V_{\text{quantum}}(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta\,|\Psi(\mathbf{r},t)|}{|\Psi(\mathbf{r},t)|} \qquad \text{(XI-25)}$$

(où $\Delta$ est le laplacien). A partir de l'équation de Schrödinger pour $\Psi(\mathbf{r},t)$ et de l'équation de Newton habituelle pour l'accélération de la particule, on peut alors obtenir le terme de vitesse quantique. Les deux points de vue sont équivalents : on peut, soit postuler directement que l'équation (XI-23) est toujours satisfaite, soit supposer qu'elle l'est à l'instant $t = 0$ et ajouter $V_{\text{quantum}}(\mathbf{r})$ au potentiel habituel. La plupart des versions ultérieures de la mécanique de Bohm ont toutefois préféré ignorer le potentiel quantique en faveur du terme de vitesse quantique.

### *β. Condition d'équilibre quantique*

La théorie suppose de plus une distribution initiale des variables de position $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$,...,$\mathbf{Q}_N$ qui est aléatoire et reproduit exactement la distribution quantique $|\Psi(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, ...)|^2$ de la probabilité standard pour des mesures de position. Cette distribution est souvent appelée "distribution d'équilibre

quantique". Elle n'est pas due à une préparation du système qui serait insuffisamment précise, mais postulée comme conséquence d'un principe physique fondamental. Pour une réalisation donnée d'une expérience, il n'existe aucune méthode permettant de sélectionner la valeur de la position qui est effectivement réalisée parmi toutes celles de la distribution ; d'une réalisation à la suivante, un nouveau choix totalement aléatoire de cette position est fait par la Nature, sans possibilité par exemple de répéter la valeur précédente. Ainsi le caractère fondamentalement aléatoire de la mécanique quantique est maintenu [567].

Ainsi, les variables supplémentaires dépendent de la fonction d'onde de deux façons, à la fois par leurs valeurs initiales et par leur évolution. Combinant l'équation de Schrödinger avec la forme du terme de "vitesse quantique" (XI-23) on peut montrer que, si à l'instant $t$ la distribution des positions est égale à $|\Psi(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, ...)|^2$, l'égalité reste vraie à l'instant $t + dt$. Ceci assure que la propriété continue à être satisfaite à tout instant, et préserve automatiquement les prédictions de la mécanique quantique concernant toutes les probabilités de mesures de positions[27]. En particulier, sous l'effet du terme de vitesse quantique, les particules sont constamment entraînées par la fonction d'onde de sorte qu'elles ne peuvent jamais la quitter ; le fait qu'elles restent toujours dans les régions de l'espace où elle ne s'annule pas assure que l'équation de guidage (XI-23) et le potentiel quantique (XI-25) ne contiennent jamais de quantités indéterminées. Une autre conséquence utile de cette hypothèse concernant la distribution initiale des positions est d'éviter un conflit avec la relativité car toute autre distribution ouvrirait la possibilité de transmission de signaux à une vitesse dépassant celle de la lumière [568] (Appendice H). Comme la règle de Born est une conséquence de l'équilibre quantique, on peut donc considérer que cette règle n'est pas un postulat indépendant qu'il faut introduire en mécanique quantique, mais juste une conséquence de l'impossibilité d'une transmission instantanée de signal et donc de la relativité.

On peut alors rétablir le déterminisme[28], et supposer que les résultats de mesures ne font que mettre en évidence les valeurs pré-existantes des positions, prises parmi toutes celles qui sont initialement possibles (au § H-1-d-$\alpha$, nous revenons plus en détail sur la mesure en théorie dBB). Cette hypothèse résout plusieurs difficultés, comme celle de comprendre pourquoi des systèmes quantiques peuvent présenter un comportement à la fois ondulatoire et particulaire dans des expériences d'interférence. En fait, le système quantique contient toujours deux objets, une onde et une particule ; l'onde peut produire des effets d'interférence et guider la particule d'une façon qui force sa position à reproduire les caractéristiques d'une figure d'interférence – rien

[27] On peut toutefois également constuire des versions modifiées de la théorie dBB qui ne sont pas exactement équivalentes à la mécanique quantique standard ; voir § H-1-g.

[28] Au moins dans une certaine mesure, voir la discussion du § H-1-i.

de particulièrement mystérieux sur le plan conceptuel. De même, dans l'expérience négative avec un interféromètre de Mach-Zhender discutée au § D, dans tous les cas une onde se propage dans les deux bras, sans aucune influence de la position de la particule ; l'effet d'interférence qui se produit sur la lame séparatrice de sortie est cependant différent, selon que la composante de l'onde qui s'est propagée dans un des bras est absorbée par l'objet ou non, de sorte que la particule est guidée d'une autre façon. Le résultat final de l'expérience est une simple conséquence du choix aléatoire de chemin que fait la particule à l'entrée de l'interféromètre et de son guidage sur la lame de sortie, sans aucun paradoxe. Il en est de même du chat de Schrödinger : en théorie dBB, suivant la position exacte d'une variable de grande dimension $\lambda$, appartenant à un espace des configurations énorme (comprenant les variables associées au noyau radioactif et celles associées au chat), le chat survit ou meurt, mais les deux ne se produisent jamais simultanément. Cependant, la décohérence aura exactement le même effet, et rendra impossible en pratique l'observation d'interférences avec des objets macroscopiques dans des états très différents (ceci est relié à la notion des "ondes vides", *cf.* § H-1-d-$\alpha$ page 367) ; nous savons en effet que la théorie est construite pour donner des prédictions équivalentes à celles de la mécanique quantique standard.

### $\gamma$. *Description de la réalité physique*

Pour celui qui pratique couramment la mécanique quantique, mais pas le concept de variables supplémentaires, au premier contact elles peuvent paraître quelque peu mystérieuses, car elles nous forcent à beaucoup changer nos habitudes de raisonnement ; c'est peut-être pourquoi elles sont souvent appelées "cachées", mais c'est uniquement une conséquence de notre familiarité bien meilleure avec la mécanique quantique habituelle ! En réalité, ces variables sont moins abstraites que des fonctions d'onde. Ces variables supplémentaires sont celles qui sont directement "vues" dans les expériences, alors que le vecteur d'état lui-même reste invisible ; il ne joue qu'un rôle indirect, par son effet sur les variables supplémentaires. Dans l'exemple d'une particule créant une trace dans une chambre à bulles, ce que nous voyons directement sur la photo est l'ensemble des valeurs successives de la variable supplémentaire, la position de la particule qui donne la trace. En revanche, avec une seule réalisation de l'expérience, qui a jamais obtenu la photographie de la fonction d'onde d'un système quantique ?

Deux possibilités existent pour décrire la réalité physique dans le cadre de la théorie dBB. Dans la première, les positions bohmiennes et la fonction d'onde sont considérées comme physiquement réelles, donc sur le même plan. Dans la seconde, la fonction d'onde est plutôt considérée comme un outil mathématique qui permet d'obtenir la vitesse des positions, qui sont réelles. Discutons maintenant ces deux possibilités.

(i) Fonction d'onde physiquement réelle

Bell écrit dans l'un de ses articles [569] : "Personne ne peut comprendre cette théorie (la théorie dBB) tant qu'il n'accepte pas de considérer $\Psi$ comme un champ réel et objectif, plutôt que seulement une amplitude de probabilité". Dans ce point de vue, une "particule" est en fait toujours la combinaison d'une position et du champ associé, qui est physiquement réel. Comme ce champ peut s'étendre à une distance arbitrairement grande de la position bohmienne, il n'est alors en rien surprenant que deux particules puissent s'influencer mutuellement même si leurs positions sont très éloignées l'une de l'autre : l'influence résulte de l'interaction entre deux objets physiques, un champ et une position, comme en électromagnétisme classique.

Ce point de vue paraît unificateur, mais implique cependant une description de la réalité physique à deux niveaux différents :

– Un premier correspondant aux éléments associés à la fonction d'onde (ou au vecteur d'état), qui n'est pas directement visible mais peut être influencé dans les expériences en appliquant des champs (ou des parois mobiles), puisque l'évolution du vecteur d'état dépend d'un hamiltonien qui peut être contrôlé de l'extérieur, par exemple en appliquant des champs externes (et dépend également des conditions aux limites). Cette évolution se fait dans un espace de dimension élevée : par exemple, pour un ensemble de $N$ particules sans spin, la fonction d'onde évolue dans un espace à $3N$ dimensions. Cependant le vecteur d'état seul n'est pas suffisant pour donner une description complète d'un système physique.

– Un second correspondant aux variables supplémentaires, les positions bohmiennes des particules, qui sont visibles dans les résultats des expériences et se déplacent dans l'espace ordinaire à 3 dimensions. Il est cependant impossible de les manipuler directement, par exemple pour changer leur distribution à partir de l'équilibre quantique. La raison pour laquelle ceci est impossible est fondamentale car, si c'était possible, on pourrait envoyer des signaux supraluminaux, en contradiction avec la relativité [568]. Les positions bohmiennes ne peuvent être manipulées qu'indirectement, par des actions sur le vecteur d'état, qui guide alors leurs vitesses (même si les deux types d'objets évoluent dans des espaces totalement différents).

(ii) La fonction d'onde comme outil mathématique

Dans un autre point de vue, la fonction d'onde n'est pas un champ physiquement réel, mais plutôt un outil mathématique dont le rôle est de fournir, par ses dérivées partielles, les vitesses des positions bohmiennes. Comme ces vitesses elles-mêmes donnent directement l'évolution temporelle des vitesses, elles doivent être également considérées comme faisant partie de la description de la réalité physique, afin de satisfaire au principe général (exprimé en termes familiers) "tout ce qui agit sur le (ou détermine l'évolution du) réel doit également être réel". Dans une expérience, la fonction d'onde détermine les conditions de préparation du système physique quantique (§ B-3-b

du Chapitre I). La fonction d'onde joue un role similaire à celui d'un hamiltonien ou d'un lagrangien en mécanique classique : ces fonctions sont définies mathématiquement dans tout l'espace de configuration multidimensionnel, mais physiquement n'interviennent que leurs valeurs aux positions des particules, ou dans leur voisinage infinitésimal. Une illustration de cette analogie est donnée par un changement de jauge pour tenir compte de l'effet d'un champ magnétique extérieur : le lagrangien classique change, mais les forces agissant sur les particules ne sont pas modifiées ; de même, la fonction d'onde change, mais pas les vitesses des positions bohmiennes. On peut alors considérer que la réalité physique existe et se propage dans l'espace habituel à 3 dimensions, et non dans l'espace des configurations multidimensionnel comme dans le premier point de vue. La référence [570] discute ce second point de vue plus en détail ; voir en particulier les Remarques 5 et 6 du § 5.1.1, où une comparaison est développée entre les propriétés de la fonction d'onde et celles des champs électrique et magnétique en électromagnétisme classique. Pour une discussion plus détaillée du sujet "Réalité et le rôle de la fonction d'onde", en particulier la fonction d'onde de l'Univers, voir par exemple la Ref. [571].

Dans un point de vue comme dans l'autre, deux types de variables sont nécessaires et suffisants pour fournir une description complète de la réalité. Nous avons déjà mentionné qu'il n'existe aucune rétroaction des variables supplémentaires sur le vecteur d'état, ce qui crée une situation inhabituelle en physique : habituellement, quand deux quantités physiques sont couplées, elles s'influencent mutuellement[29]. Une autre caractéristique inhabituelle est que l'effet du champ sur la position de la particule ne dépend pas de l'intensité du champ correspondant, mais juste de ses variations relatives dans l'espace. De façon amusante, nous sommes alors en présence d'une autre sorte de dualité, qui distingue entre actions directes entre systèmes physiques (ou leur préparation), directement exprimables en termes de vecteur d'état, et résultats des expériences qui sont réalisées, déterminés par les variables supplémentaires.

#### H-1-c. Trajectoires bohmiennes

Dès lors que les particules ont une position à chaque instant, elles retrouvent également une vitesse, une accélération, etc. et une trajectoire comme en physique classique. En étudiant ces trajectoires, on obtient toute une série d'informations intéressantes et parfois inattendues. Par exemple, même dans le cas simple d'une particule unique libre dans l'espace, les trajectoires ne sont généralement pas de simples lignes droites [573, 574] ; elles peuvent se

[29] La référence [572] discute les effets possibles d'une rétro-action des positions sur la fonction d'onde. Une variante de la théorie dBB où cette rétro-action joue un rôle essentiel est discutée dans le § K-4.

courber d'une façon inhabituelle. Pour illustrer cette propriété, nous passons à une étude de quelques situations conduisant à des trajectoires de Bohm caractéristiques.

### α. *Une particule*

Une première remarque est que, chaque fois que la fonction d'onde est réelle, l'équation (XI-23) donne zéro[30] : une vitesse ne peut exister que si la phase de la fonction d'onde varie dans l'espace. En conséquence, par exemple dans l'état fondamental de l'atome d'Hydrogène, la position bohmienne de l'électron ne tourne pas autour du proton comme on aurait pu s'y attendre, mais reste statique en un point fixe de l'espace. L'effet du potentiel quantique compense exactement l'attraction par le proton de l'électron dans son état fondamental, qui ne ressent donc aucune force. De même, pour un oscillateur harmonique dans l'état fondamental (ou n'importe lequel de ses états stationnaires), la position de la particule n'oscille pas dans le potentiel, mais reste au même endroit.

Cette propriété est générale : chaque fois que l'hamiltonien est invariant par renversement du temps, on peut choisir une base de fonctions d'onde stationnaires qui sont réelles, de sorte que la vitesse de Bohm correspondante s'annule pour tous ces états stationnaires[31]. Bien sûr, avec des fonctions d'onde quelconques qui sont des superpositions cohérentes d'états stationnaires, la situation est différente : sous l'effet du changement de phase induit par l'équation de Schrödinger, les positions et vitesses associées deviennent des fonctions du temps. Un exemple est un oscillateur dans un état cohérent quasi classique, pour lequel l'évolution temporelle de la position reproduit parfaitement l'oscillation classique dans le puits de potentiel. De plus, même dans des états stationnaires réels, les fonctions de corrélations des positions sont des fonctions du temps car, en théorie dBB, l'effet de la mesure sur la fonction d'onde et toutes les positions bohmiennes doit être pris en compte (nous revenons sur les corrélations entre mesures à des instants différents dans la discussion du § H-1-h, page 379).

Considérons maintenant une expérience habituelle d'interférence, comme celle montrée schématiquement sur la Figure XI.1 : une source S émet une par

[30] Nous supposons que le champ magnétique et le potentiel vecteur sont nuls.

[31] L'atome d'hydrogène a des fonctions d'onde qui ne sont pas réelles, avec un facteur de phase $e^{im_l\varphi}$, où $\varphi$ est l'angle azimuthal et $m_l$ le nombre quantique associé à une composante du moment cinétique orbital. Pour ces états, les trajectoires de Bohm tournent effectivement autour du proton, comme dans l'image orbitale classique. Cependant, en l'abscence de champ magnétique, les valeurs $\pm m_l$ correspondent à la même énergie ; on peut, par combinaison linéaire, construire une base de fonctions d'onde stationnaires qui sont réelles et donnent donc une vitesse de Bohm nulle. Il s'ensuit que, pour une énergie donnée, si elle est dégénérée, selon le choix de la base que l'on effectue, on trouve des vitesses qui s'annulent ou pas.

une toute une série de particules qui peuvent atteindre un écran D à travers lequel deux ouvertures ont été percées ; des interférences sont observées dans la région R de l'autre côté de l'écran. L'expérience est symétrique par rapport à un plan horizontal représenté par une ligne tiretée sur la figure. Nous savons que la mécanique de Bohm est construite de façon à reproduire exactement les prédictions de la mécanique quantique standard concernant les mesures de positions des particules ; comment donc cette théorie peut-elle réussir à reproduire les franges d'interférence qui sont observées après l'écran si l'on mesure la position de la particule dans cette région ?

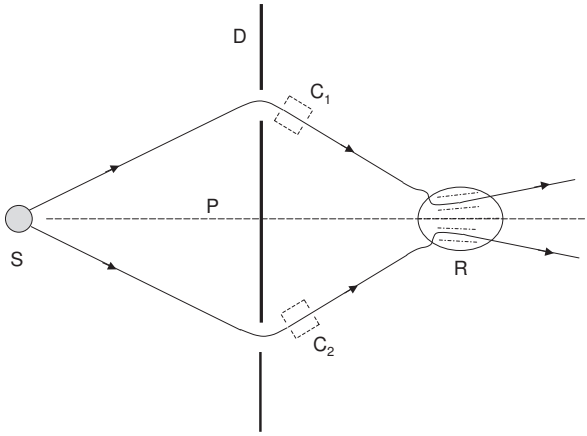


FIGURE *XI.1 – Trajectoires de Bohm associées à une particule émise par une source S et croisant un écran D percé de deux orifices. Dans la discussion du § H-1-h, deux cavités $C_1$ et $C_2$ seront ajoutées, mais pour le moment elles peuvent être ignorées. La mécanique quantique prédit que la particule interfère avec elle-même et produit une figure d'interférence dans la région d'observation R ; les lignes tiretées symbolisent les franges brillantes. En mécanique de Bohm, les trajectoires de la particule s'incurvent dans les deux orifices sous l'effet de la diffraction, et de plus oscillent dans la région où se produit l'interférence. Le résultat final est que les prédictions de la mécanique quantique standard sont exactement reproduites. On remarque une "règle de non-croisement" : les trajectoires ne traversent jamais le plan de symétrie horizontal P (ligne tiretée horizontale). Plus de détails sur la forme des trajectoires dans la région d'interférence sont visibles sur la partie droite de la Figure I-3 de l'Appendice I.*

La théorie dBB résout le problème grâce à la relation (XI-23), qui prédit que des particules libres peuvent parfaitement avoir des trajectoires courbées ;

cette propriété est en fait indispensable pour que la statistique des positions reproduise les prédictions habituelles de la mécanique quantique [575]. Deux trajectoires typiques sont représentées sur la Figure XI.1. Un premier effet intéressant se produit lorsque la particule passe à travers un des trous de l'écran, si ce trou est suffisamment petit pour diffracter la fonction d'onde (si son diamètre est plus petit que, ou comparable à, la longueur d'onde de De Broglie) : sans toucher les parois, la particule est déviée parce que la fonction d'onde qui pilote sa vitesse est soumise à la diffraction. De plus, après l'écran et dans la région R où les fonctions d'onde provenant des deux orifices se recouvrent, des effets de déviations de la trajectoire se produisent à nouveau, car la vitesse de la particule est modifiée par des effets d'interférence. Ces modifications sont telles que, lorsque la position de la particule est mesurée successivement dans un grand nombre d'expériences identiques, l'ensemble des résultats de mesure reconstruit exactement la figure d'interférence quantique.

On peut facilement voir par symétrie que, aux points du plan de symétrie de l'expérience (ligne centrale tiretée de la Figure XI.1), la vitesse de Bohm est toujours contenue dans ce plan : aucune trajectoire de la particule ne peut croiser ce plan. Ce résultat est parfois appelé "règle de non-croisement" des trajectoires de Bohm. Considérons maintenant deux paquets d'ondes, chacun venant d'un orifice différent, et se croisant dans la région du plan de symétrie. La règle du non-croisement implique donc que les trajectoires "rebondissent" sur le plan de symétrie de sorte que, lorsque les paquets d'onde se sont croisés, les trajectoires qui suivaient un paquet d'ondes sautent sur l'autre. Il s'ensuit que, après l'écran, une trajectoire qui se trouve au-dessus du plan de symétrie est nécessairement passée par l'orifice du haut, et réciproquement.

Voir [55] pour une discussion de comment la trajectoire d'une particule peut être reconstruite à partir de l'observation de ses positions successives dans une chambre à bulles, et le Chapitre 5 de [574] pour une discussion des trajectoires de Bohm à travers une barrière de potentiel (effet tunnel). Des effets du même type se produisent lorsque des particules se propagent dans un interféromètre de Mach-Zhender ; en l'abscence de la dernière lame séparatrice, la position des particules saute d'un paquet d'onde à l'autre, de sorte que la trajectoire prend une forme de zigzag [576].

On peut trouver ces trajectoires particulièrement étranges, et être tenté de rejeter l'interprétation dBB pour cette raison. Il faut toutefois garder à l'esprit que ces trajectoires ne sont pas introduites de façon arbitraire par l'interprétation dBB : en fait, elles existent déjà dans l'interprétation standard, où elles sont simplement les trajectoires du fluide de probabilité. La seule addition de l'interprétation dBB est de leur donner un contenu physique plus fort : la vitesse d'un fluide de probabilité y est considérée comme la vitesse d'une position ponctuelle.

*β. Deux particules*

Pour un système de deux particules ou plus, la situation devient encore plus intéressante[32]. Les vitesses des deux particules sont données à partir de la fonction d'onde à deux particules $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t)$ par :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{Q}_1 &= \frac{1}{m_1 \left|\Psi(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2; t)\right|^2} \mathrm{Re}\left[\frac{\hbar}{i}\Psi^*(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2; t)\nabla_{\mathbf{r}_1}\Psi(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2; t)\right] \\ \frac{d}{dt}\mathbf{Q}_2 &= \frac{1}{m_2 \left|\Psi(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2; t)\right|^2} \mathrm{Re}\left[\frac{\hbar}{i}\Psi^*(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2; t)\nabla_{\mathbf{r}_2}\Psi(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2; t)\right]\end{aligned} \tag{XI-26}$$

où $m_1$ et $m_2$ sont leurs masses. Puisque l'équation de Schrödinger reste inchangée en théorie dBB, comme en mécanique quantique standard la fonction d'onde se propage toujours dans l'espace des configurations, qui a 6 dimensions ; cette fonction d'onde pilote le vecteur à 6 dimensions dont les composantes sont l'ensemble de celles de $\mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{Q}_2$. Le fait que les vitesses des positions doivent être calculées dans l'espace des configurations est un élément essentiel de la théorie dBB, avec de nombreuses conséquences comme nous le verrons plus bas. Toutefois chacune des deux positions de Bohm, prise isolément, se propage dans l'espace ordinaire à trois dimensions. Du fait de cette opposition, des effets non locaux peuvent apparaître dans la propagation : la vitesse de chaque particule dépend, non seulement de sa propre position, mais également de la position de l'autre particule, et ceci même si elle est très éloignée.

Si la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t)$ est un produit :

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t) = \varphi(\mathbf{r}_1, t)\chi(\mathbf{r}_2, t) \tag{XI-27}$$

il est facile de voir que (XI-26) se simplifie en :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{Q}_1 &= \frac{1}{m_1 \left|\varphi(\mathbf{Q}_1, t)\right|^2} \mathrm{Re}\left[\frac{\hbar}{i}\varphi^*(\mathbf{Q}_1, t)\nabla_{\mathbf{r}_1}\varphi(\mathbf{Q}_1, t)\right] \\ \frac{d}{dt}\mathbf{Q}_2 &= \frac{1}{m_2 \left|\chi(\mathbf{Q}_2, t)\right|^2} \mathrm{Re}\left[\frac{\hbar}{i}\chi^*(\mathbf{Q}_2, t)\nabla_{\mathbf{r}_2}\chi(\mathbf{Q}_2, t)\right]\end{aligned} \tag{XI-28}$$

Chaque particule se propage alors indépendamment, guidée de façon locale par sa propre fonction d'onde.

Si la fonction d'onde n'est pas un produit, les vitesses doivent être évaluées à un point de l'espace des configurations qui dépend des positions des deux particules ; le résultat est alors que la vitesse de la particule 1 peut dépendre explicitement de la position de la particule 2, et réciproquement.

[32] Une particularité de la théorie est que, même pour des particules interagissant, leurs deux positions ne sont pas couplées directement. L'hamiltonien d'interaction agit sur la fonction d'onde, qui à son tour guide les positions, mais dans le monde des positions bohmiennes les interactions mutuelles directes n'existent pas.

Supposons par exemple que la fonction d'onde à deux particules s'écrive comme la somme de deux produits :

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t) = \alpha\varphi(\mathbf{r}_1, t)\chi(\mathbf{r}_2, t) + \beta\varphi'(\mathbf{r}_1, t)\chi'(\mathbf{r}_2, t) \qquad \text{(XI-29)}$$

et intéressons-nous au calcul de la vitesse bohmienne de la particule 1 ; quand des effets non locaux se produisent-ils ? Tout dépend du recouvrement des fonctions d'onde à une particule dans les deux termes de (XI-29).

(i) Prenons un point particulier $(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ de la trajectoire dans l'espace des configurations. Si, à l'instant $t$, l'une des deux fonctions d'onde $\chi(\mathbf{Q}_2, t)$ ou $\chi'(\mathbf{Q}_2, t)$ s'annule, un seul des termes de (XI-29) joue un rôle dans le calcul de l'expression de la vitesse de la particule 1 au point $\mathbf{Q}_1$. La fonction d'onde de la particule 2 disparaît comme dans (XI-28) ; la particule 1 se propage alors de façon locale.

(ii) Si les deux fonctions d'onde $\chi(\mathbf{Q}_2, t)$ et $\chi'(\mathbf{Q}_2, t)$ sont simultanément non nulles, alors la même simplification ne se produit plus. En général apparaissent des effets non locaux, où la vitesse de la particule 1 dépend explicitement de la position de l'autre. Bien sûr, ce n'est pas toujours le cas ; si, par exemple, il se trouve qu'au point $\mathbf{Q}_1$ les deux fonctions d'onde de la première particule ont la même variation relative :

$$\frac{\nabla_{\mathbf{r}_1}\varphi(\mathbf{Q}_1, t)}{\varphi(\mathbf{Q}_1, t)} = \frac{\nabla_{\mathbf{r}_1}\varphi'(\mathbf{Q}_1, t)}{\varphi'(\mathbf{Q}_1, t)} = \mathbf{W}(\mathbf{Q}_1, t) \qquad \text{(XI-30)}$$

alors à nouveau une simplification se produit[33] et la vitesse au point $\mathbf{Q}_1$ est indépendante de la position $\mathbf{Q}_2$. Mais, en général, la relation XI-30 n'est pas satisfaite.

En résumé, des effets non locaux de la particule 2 sur la particule 1 peuvent se produire quand les fonctions d'onde $\chi(\mathbf{Q}_2, t)$ et $\chi'(\mathbf{Q}_2, t)$ se recouvrent, et si la position $\mathbf{Q}_2$ tombe dans la région de recouvrement. Si les deux fonctions d'onde n'ont aucun recouvrement, quelle que soit la trajectoire considérée, une des composantes s'annule toujours lorsque les variables sont égales aux positions bohmiennes, et les particules se déplacent indépendamment. La composante de la fonction d'onde qui s'annule[34] est ce que Bohm appelle une "onde vide" [11].

### $\gamma$. *Ondes vides*

En théorie dBB, l'apparition des ondes vides ne se limite pas au cas où deux particules sont intriquées comme ci-dessus. Dans l'expérience à une

[33] Si, dans (XI-26), nous remplaçons $\Psi$ par son expression (XI-29), puis $\nabla_{\mathbf{r}_1}\varphi(\mathbf{Q}_1, t)$ par $\varphi(\mathbf{Q}_1, t) \times \mathbf{W}(\mathbf{Q}_1, t)$ et $\nabla_{\mathbf{r}_1}\varphi'(\mathbf{Q}_1, t)$ par $\varphi'(\mathbf{Q}_1, t) \times \mathbf{W}(\mathbf{Q}_1, t)$, nous obtenons $d\mathbf{Q}_1/dt = \hbar\,\mathrm{Im}\left[\mathbf{W}(\mathbf{Q}_1, t)\right]/m_1$, qui est indépendant de $Q_2$.

[34] Selon la trajectoire considérée, ce peut être l'une ou l'autre des composantes qui est vide.

seule particule décrite sur la Figure XI.1 par exemple, chaque fois qu'une particule est émise par la source, la position initiale de la variable bohmienne détermine quel chemin elle va suivre et par quel trou du diaphragme elle va passer. Une composante de la fonction d'onde guide alors la particule, tandis que l'autre devient une onde vide, ne jouant provisoirement aucun rôle tant que les deux composantes ne se recouvrent pas. Plus tard cependant, lorsque les deux ondes se recombinent dans la région d'interférence R, elles contribuent toutes deux au guidage de la particule et créent le système de franges observé. Pendant l'interférence, l'onde vide a alors en quelque sorte retrouvé sa particule, de sorte qu'elle n'est plus vide. De plus, comme nous l'avons vu au § H-1-c-$\alpha$, pendant que les paquets d'ondes se croisent, c'est l'onde vide qui "attrape" la particule au passage, comme deux joueurs qui se passent un ballon ; après leur croisement, l'onde qui était vide devient non vide, et inversement.

Un phénomène semblable peut également se produire dans l'exemple ci-dessus de la fonction d'onde (XI-29). Quand les deux particules sont intriquées mais que les fonctions $\chi(\mathbf{r}_2)$ and $\chi'(\mathbf{r}_2)$ n'ont pas de recouvrement, nous avons vu que l'une des composantes est nécessairement vide : la particule 2 est guidée par une seule onde, et aucun effet d'interférence ne peut se produire entre $\varphi(\mathbf{r}_1)$ et $\varphi'(\mathbf{r}_1)$, même si ces fonctions ont un recouvrement spatial[35]. Mais supposons maintenant que l'évolution future du système crée un recouvrement entre $\chi(\mathbf{r}_2, t)$ et $\chi'(\mathbf{r}_2, t)$, tandis que $\varphi(\mathbf{r}_1)$ et $\varphi'(\mathbf{r}_1)$ continuent à se recouvrir (au moins partiellement). Si $\mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{Q}_2$ tombent dans leur région respective de recouvrement, la composante vide de la fonction d'onde à deux particules devient active, de sorte que des effets d'interférence peuvent à nouveau se produire : en général, la vitesse de chaque particule dépend (de façon non locale) de la position des deux particules. Un mouvement compliqué des deux positions couplées peut alors se produire. Cette situation se produit dans les expériences d'interférence à deux particules [577,578], où les trajectoires bohmiennes reproduisent les résultats de la mécanique quantique standard [579].

Si finalement la particule 2 devient intriquée avec un très grand nombre d'autres particules, par exemple celles contenues dans un appareil de mesure (§ H-1-d-$\alpha$), alors la chaîne de von Neumann se propage trop loin de sorte qu'il devient impossible en pratique de faire apparaître à nouveau des effets d'interférence entre les composantes. Quand la décohérence atteint le point où elle est devenue irréversible, les ondes vides restent vides pour toujours. Une discussion plus détaillée du rôle des ondes vides dans le contexte de la théorie dBB ou d'autres interprétations peut être trouvée par exemple dans [71] et [580].

[35] Cette absence d'interférence se produit également en mécanique quantique standard : par trace partielle sur la particule 2 , les cohérences associées à la particule 1 disparaissent.

*δ. Autres définitions possibles pour les vitesses bohmiennes*

L'accord entre les prédictions de la mécanique quantique standard et la statistique sur les trajectoires de Bohm se base sur une relation où seule intervient la divergence de la vitesse définie en (XI-23). Donc, si l'on ajoute à cette vitesse un vecteur quelconque sans divergence (un rotationnel quelconque), l'accord reste le même. Cette remarque peut donner au premier abord l'impression d'une flexibilité presque illimitée, et d'une certaine façon celle d'un cadre insuffisamment défini pour pouvoir raisonner. Mais, en réalité, pour construire des trajectoires raisonnables, il existe d'autres contraintes physiques que celles découlant de ce simple accord. La Ref. [581] discute les contraintes dues à l'invariance galiléenne, qui introduit des limitations sévères, mais cependant pas suffisantes pour imposer une définition unique de la vitesse bohmienne.

On peut cependant montrer que, en relativité einsteinienne, le courant conservé est unique [582, 583], de sorte que la vitesse bohmienne peut être définie sans aucune ambiguïté. Ceci peut être montré en utilisant l'équation de Dirac, donc en supposant que les particules ont un spin, comme nous le ferons au § H-1-e. Il suffit alors de prendre une limite non relativiste pour obtenir une valeur galiléenne unique de la vitesse dans l'équation de guidage.

De plus, un autre argument en faveur de la définition habituelle de la vitesse bohmienne a été proposé dans la Ref. [584]. Cet article montre en effet que la vitesse bohmienne habituelle peut être mesurée par une combinaison appropriée de deux mesures successive de position, l'une forte (projective) et l'autre obtenue par mesure faible (§ C), dont la différence est divisée par la différence des temps. Bien sûr, proposer une technique de mesure fournissant expérimentallement la valeur d'une variable est une bonne façon de permettre d'y attacher plus de contenu physique.

#### H-1-d. Mesure quantique, non-localité

Nous montrons maintenant plus en détail comment le mécanisme des ondes vides assure tout naturellement l'unicité des résultats de mesures en mécanique de Bohm. Ce succès est obtenu au prix de l'introduction d'une non-localité explicite, que nous discutons également.

*α. Mesure en théorie dBB*

En théorie dBB, il est inutile d'introduire un postulat particulier pour la mesure et la réduction du vecteur d'état ; il est déjà contenu dans la théorie comme conséquence du mécanisme des "ondes vides", elles-mêmes conséquences des équations du mouvement et de la notion de trajectoire. Ceci résout immédiatement les difficultés associées à la définition d'une frontière entre l'équation de Schrödinger et la réduction du vecteur d'état, qui ne joue plus aucun rôle. En d'autres termes, l'équation de Schrödinger s'applique

tout aussi bien pendant toutes les étapes d'un processus de mesures qu'à tout autre instant.

Considérons en effet un système physique après qu'il ait interagi avec un appareil de mesure. Il est alors nécessairement intriqué avec l'appareil (§ A), de sorte que la fonction d'onde de l'ensemble des deux systèmes prend la forme :

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N; t) = \sum_j \varphi_j(\mathbf{r}, t)\ \chi_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N; t) \qquad \text{(XI-31)}$$

où les $\varphi_j(\mathbf{r}, t)$ sont des fonctions d'onde du système mesuré associées aux différents résultats possibles de mesure, qui sont mutuellement orthogonales. Les $\chi_j(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N; t)$ sont les fonctions d'onde correspondantes pour l'appareil de mesure (y compris l'aiguille du cadran, souvent appelée "pointeur"), elles aussi orthogonales ; elles dépendent d'un très grand nombre de positions $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N$ puisque l'appareil est évidemment constitué d'un très grand nombre de particules. En fait les fonctions d'onde de l'appareil sont, non seulement orthogonales, mais également sans recouvrement – pour que l'observation de la position de l'aiguille fournisse une mesure, il faut que les positions d'un grand nombre des particules qui constituent l'appareil soient différentes selon le résultat observé. Nous retombons sur une forme du vecteur d'état semblable à (XI-29), dans le cas où il n'y a pas de recouvrement, de sorte que la même discussion reste valable. Nous avons vu (§ H-1-b) que les variables de position de Bohm ne peuvent jamais "quitter" la fonction d'onde (atteindre des points de l'espace des configurations où elle s'annule). Après la mesure, les variables $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$,... $\mathbf{Q}_N$ associées à l'appareil de mesure se trouvent donc nécessairement dans l'un des domaines de l'espace des configurations où l'une des fonctions d'onde $\chi_j$ ne s'annule pas ; comme ces domaines sont disjoints, elles ne peuvent appartenir à plus de l'un de ces domaines. Ainsi, pour n'importe quelle trajectoire, seul un terme de la somme (XI-31) intervient, alors que tous les autres sont des "ondes vides".

De plus, nous avons vu à la fin du § H-1-c-$\gamma$ que, du fait du très grand nombre de variables associées à un appareil de mesure et à son environnement, il devient totalement impossible en pratique de rétablir un recouvrement des différentes composantes de la fonction d'onde et de guider chacune des très nombreuses positions bohmiennes vers sa région propre de recouvrement pour la fonction d'onde. Ainsi, ces ondes vides ne peuvent plus jouer aucun rôle dans le guidage des particules, et aucun rôle non plus concernant les résultats de mesures futures de positions ; elles resteront vides pour toujours. Il est donc possible de ne garder que le terme non vide, et d'ignorer tous les autres sans affecter aucunement la dynamique ultérieure du système total. On peut également normaliser ce terme non vide (en théorie dBB, les vitesses sont invariantes si l'on multiplie la fonction d'onde par une constante).

Le résultat final est que, pour toute réalisation donnée d'une expérience, la trajectoire des positions est donnée, et :

– un seul résultat est obtenu ;

– une seule des composantes de (XI-31) joue un rôle dans le calcul du mouvement ultérieur des positions bohmiennes dans l'espace des configurations (ainsi que dans le calcul des probabilités associées à toute mesure éventuelle qu'on pourrait ensuite effectuer sur le système). Ceci reconstruit la réduction du vecteur d'état.

Dans le point de vue de De Broglie-Bohm, le résultat d'une expérience n'est que la conséquence de la position initiale aléatoire du système dans l'espace des configurations. L'unicité de ce résultat résulte simplement de l'impossibilité pour un seul point de l'espace des configurations d'appartenir à la fois à plus d'un des domaines associés aux composantes de (XI-31). Ceci produit automatiquement une annulation de toutes les composantes de la fonction d'onde, sauf celle correspondant au résultat de la mesure. Le déterminisme est rétabli en principe mais, du fait que cette variable de position ne peut être contrôlée lors de l'étape de préparation du système – voir ci-dessus et le point (ii) du § H-1-b – en pratique les expériences donnent toujours des résultats aléatoires. Alors qu'en mécanique quantique standard le mécanisme de la décohérence (corrélation avec l'environnement) n'est pas suffisant pour expliquer l'émergence d'un résultat unique dans une expérience unique, en théorie dBB il l'est grâce à l'introduction des variables de position de l'appareil de mesure et au mécanisme des ondes vides. C'est un succès considérable !

### $\beta$. *Mesures de positions et trajectoires bohmiennes*

Lorsqu'une série de mesures de positions est effectuée à des temps différents sur une particule, on peut se demander si les résultats de cet ensemble de mesures reconstruisent la trajectoire bohmienne en restant compatibles avec elle – sinon, bien sûr, il faudrait s'interroger sur l'interprétation physique des trajectoires bohmiennes. La raison pour laquelle c'est effectivement le cas est discutée au § 2 de l'Appendice I. En fait, la démonstration n'est simple que dans le cas où les appareils de mesure successifs sont suffisamment rapides pour indiquer (presque) en temps réel le passage de la particule. Lorsque les appareils sont lents et ne peuvent fournir l'information qu'avec retard, le problème est plus délicat, comme nous le verrons au § 4 de l'Appendice I.

### $\gamma$. *Ondes effectives*

Plus généralement, considérons une série d'expériences dont le produit est une liste de résultats successifs pour des observables arbitraires (par exemple des spins, comme discuté au § H-1-e-$\alpha$). Pour chaque réalisation de la série d'expériences, la liste de résultats effectivement observés est étiquetée par les

positions bohmiennes des pointeurs des appareils de mesure ; elle correspond à une composante non vide du vecteur d'état, la "fonction d'onde effective" de la Ref. [567]. Toutes les autres listes de résultats sont associées à des ondes vides, qui certes existent toujours, mais ne peuvent avoir strictement aucun effet sur l'évolution future des positions bohmiennes. Ces ondes vides, qui ne disparaissent jamais de la solution de l'équation de Schrödinger (comme dans l'interprétation d'Everett, § M), sont ainsi condamnées pour toujours à rester inactives, sans aucun effet observable. Si la série d'expériences considérée est longue, le nombre d'ondes vides peut être très grand, alors qu'il n'existe qu'une seule onde non vide (fonction d'onde effective) pourvue de conséquences physiques observables. Si maintenant nous considérons le vecteur d'état de l'Univers, nous sommes clairement en présence d'un nombre absolument fantastique d'ondes vides. Certes, elles peuvent être ignorées, puisque que cela n'affecte en rien les prédictions physiques pour le futur, mais leur statut de réalité n'est pas évident à définir (nous revenons sur ce point au § H-1-i, page 388).

*δ. Non-localité*

Dans le § H-1-c-$\beta$, nous avons vu que les positions bohmiennes évoluent selon des équations qui sont explicitement non locales. La non-localité est évidemment une propriété singulière pour une théorie physique, mais nous devons garder à l'esprit que cette propriété n'est pas plaquée de façon artificielle sur une théorie qui serait sinon parfaitement locale : la mécanique quantique standard n'est pas vraiment locale elle non plus. En fait, dans l'espace des configurations, les deux théories sont bien locales, mais c'est le passage à l'espace ordinaire à 3 dimensions qui fait apparaître les non-localités.

Considérons par exemple deux particules sans spin et leur espace des configurations à 6 dimensions. Le formalisme de la mécanique quantique standard ne propose aucune description locale de la physique se produisant à la position d'une seule particule, même si les deux particules sont contenues dans des régions très éloignées de l'espace. La description standard est contenue dans la fonction d'onde[36], dont les valeurs dépendent des positions $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$ des deux particules. Si la fonction d'onde n'est pas un produit, la seule façon correcte de caractériser le système physique met en jeu l'espace des configurations. Par exemple, l'évolution de la phase de la fonction d'onde met en jeu les valeurs des potentiels à une particule $V(\mathbf{r}_1)$ et $V(\mathbf{r}_2)$. Il en est

[36] Ceci est vrai dans le point de vue de Schrödinger. Dans le point de vue de Heisenberg, la dynamique est contenue dans l'évolution d'opérateurs ; leurs éléments de matrice appartiennent à un espace dont la dimension est le carré de celle de l'espace des configurations, donc encore bien plus grande. Si l'on utilise la seconde quantification ou la théorie des champs, la dimension devient infinie (en théorie des champs, les coordonnées de l'espace ordinaire apparaissent dans le formalisme comme des paramètres dont dépendent les opérateurs, mais l'espace dans lequel agissent ces opérateurs est de dimension infinie).

de même du courant de probabilité **J**, qui est lui aussi défini dans l'espace des configurations, et dont la dérivée contient en général les deux potentiels (toutefois, pour les deux théories, la non-localité disparaît dès qu'on effectue une trace partielle sur l'autre particule ; en théorie dBB, ceci met en jeu une intégration sur toutes les positions possibles de la seconde particule).

La différence entre les deux théories ne tient donc pas tellement aux équations mathématiques, qui ne sont vraiment locales ni dans un cas ni dans l'autre. Elle tient plutôt au fait que la théorie dBB attribue une réalité physique à des variables qui évoluent de façon non locale, alors qu'en théorie standard les évolutions non locales ne concernent que des variables dont le lien avec la réalité physique est moins direct.

#### H-1-e. Spin et théorie des champs

La théorie dBB peut prendre en compte le spin ou la théorie des champs ; nous ne donnerons ici qu'un bref résumé avec quelques exemples simples.

*α. Spin en théorie de Pauli*

Le spin peut facilement être pris en compte dans la théorie dBB dans le cadre d'un traitement non relativiste avec des spineurs de Pauli. La méthode la plus simple est celle qui consiste à ne pas ajouter de variable bohmienne spécifique qui soit associée au spin, mais de se contenter de garder la position bohmienne habituelle. Même dans ce cadre il se produit divers effets intéressants, sans toutefois introduire la moindre contradiction avec les prédictions de la mécanique quantique standard.

Pour une particule unique de spin $S$, l'état quantique peut être défini par un spineur ayant $2S+1$ composantes $\Psi_\mu(\mathbf{r},t)$. Si $S=0$ (particule sans spin), la composante unique du spineur est la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{r},t)$ apparaissant dans (XI-23) ; si la particule a un spin 1/2, elle est décrite par deux composantes $\Psi_\pm(\mathbf{r},t)$ qui obéissent à l'équation de Pauli, etc. A chaque point de l'espace, la vitesse de Bohm de la particule est définie comme le rapport entre le courant local de probabilité et la densité locale de probabilité, ces deux grandeurs étant toutes deux obtenues par trace sur la variable de spin (somme sur l'indice $\mu$). L'équation (XI-23) devient alors :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Q} = \frac{1}{m\sum_\mu |\Psi_\mu(\mathbf{Q},t)|^2}\,\mathrm{Re}\sum_\mu\left[\frac{\hbar}{i}\Psi_\mu^*(\mathbf{Q},t)\boldsymbol{\nabla}\Psi_\mu(\mathbf{Q},t)\right] \qquad \text{(XI-32)}$$

Au lieu de partir de spineurs de Pauli non relativistes, on peut partir de l'équation relativiste de Dirac et de son courant de probabilité. Il se trouve que cela définit de façon unique le courant conservé, et donc la vitesse bohmienne locale [582, 583] ; on peut ensuite prendre la limite non relativiste et comparer à (XI-32). Un point intéressant est que la vitesse bohmienne ainsi

obtenue est alors la somme du terme de droite de (XI-32) et d'un terme supplémentaire contenant un rotationnel :

$$\frac{1}{m\sum_\mu |\Psi_\mu(\mathbf{Q},t)|^2}\nabla\times\sum_\mu \Psi^*_\mu(\mathbf{Q},t)\left[\sigma\Psi(\mathbf{Q},t)\right]_\mu \qquad \text{(XI-33)}$$

De plus, en calculant par la mécanique quantique standard la moyenne locale de l'orientation du spin, obtenue à partir du spineur, on peut également définir une direction locale du spin, ce qui conduit à une description encore plus visuelle de la propagation de la particule. L'évolution de la direction locale du spin contient un terme supplémentaire appelé le terme de "couple quantique" (§ 9.3.2 de [574]). Son effet est visible sur les trajectoires de spin de la Figure XI.2. Il est intéressant de noter que ce terme apparaît également dans la théorie cinétique d'un gaz ultra-froid présentant la condensation de Bose-Einstein [585] ; il introduit une rotation de ces spins qui ne dépend pas des interactions.

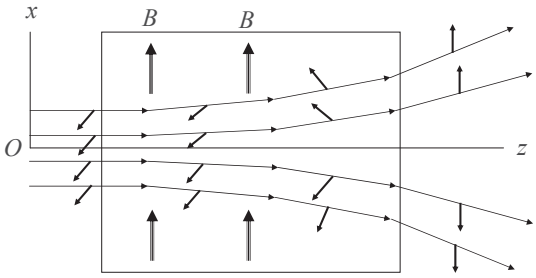


FIGURE *XI.2 – Dans une expérience de Stern et Gerlach, les atomes se propageant le long de la direction Oz pénètrent dans une région (rectangle) où règne un champ magnétique intense B le long de la direction Ox. Son fort gradient agit sur les moments magnétiques des atomes et les dévie d'une façon dépendant de leur spin. Initialement, les atomes ont une direction du spin transverse le long de Oy. Lorsqu'ils se propagent dans le gradient, cette direction change : lorsqu'ils quittent l'appareil, deux faisceaux séparés sont formés avec des spins parallèles ou antiparallèles à Ox. La figure montre quatre exemples de trajectoires bohmiennes (les directions des flèches montrent les changements de l'angle polaire entre le spin et Ox ; pour plus de clarté, la précession rapide de l'angle azimuthal du spin autour de B n'est pas prise en compte).*

*β. Quelques exemples*

Les effets qui se produisent pour une particule sans spin ont leur contrepartie lorsqu'elle possède un spin. Nous en discutons maintenant quelques exemples.

(i) La direction d'un spin ne reste pas toujours nécessairement constante le long d'une trajectoire, même pour une particule libre – pour plus de détails, voir par exemple les Chapitres 9 et 11 de [574] et [586]. Comme dans la Ref. [587], considérons un atome qui pénètre dans un appareil de Stern et Gerlach mesurant la composante du spin sur $Ox$. Si initialement le spin pointait dans une direction perpendiculaire $Oy$, la direction du spin change progressivement au fur et à mesure que la trajectoire se propage dans le gradient de champ magnétique, et finit par devenir parallèle (ou antiparallèle) à $Ox$ à la sortie de l'appareil. Le premier cas correspond aux trajectoires conduisant au résultat $+1$, le second à celles donnant le résultat $-1$.

Des rotations du spin le long des trajectoires se produisent même pour des particules libres ; il existe un équivalent de la "règle du non-croisement" : si deux paquets d'ondes associés avec des directions opposées du spin se croisent dans l'espace libre, le long de toute trajectoire de Bohm la direction du spin tourne au cours du croisement et, après que la position ait sauté d'un paquet d'ondes à l'autre, termine dans la direction opposée de la direction initiale – un effet analogue à l'échange de paquets d'ondes par les trajectoires que nous avons discuté plus haut.

(ii) Une expérience de pensée intéressante fait intervenir une particule avec spin se propageant le long de la direction $Oz$ qui est envoyée successivement à travers toute une série d'analyseurs (des aimants de Stern et Gerlach par exemple) d'orientations différentes (Fig. XI.3) ; le premier analyseur sépare les deux valeurs de la composante du spin de long de $Ox$, le second le long d'une direction perpendiculaire $Oy$, le troisième à nouveau le long de $Ox$, etc. (à chaque étape, la direction selon laquelle la mesure est effectuée tourne de 90°). Le premier analyseur divise les trajectoires en deux groupes, celles qui vont dans des directions positives le long de $Ox$, et celles qui vont dans des directions négatives, en fonction de la position initiale de la particule. Le second analyseur divise à nouveau chacun de ces deux groupes de trajectoires en deux sous-groupes, parmi lesquels la trajectoire de la particule fait un choix en fonction de sa position initiale. Le même phénomène se répète pour les mesures suivantes. On pourrait alors espérer, au bout d'un certain nombre de mesures, que l'information obtenue sur la position bohmienne devienne suffisamment précise pour permettre de prédire la trajectoire dans l'analyseur suivant. En fait, quel que soit le nombre d'analyseurs utilisés, on n'atteindra jamais une situation où la position bohmienne est suffisamment bien connue pour permettre une détermination parfaite du résultat de la mesure suivante : sans aucune limite, le résultat reste toujours complètement

aléatoire. La raison en est que la répétition des mesures introduit une sensibilité aux conditions initiales qui croît exponentiellement, d'une façon analogue à une situation chaotique en mécanique classique. A chaque étape, la distribution de la position de Bohm reste exactement celle d'équilibre quantique. Il n'existe ainsi aucune façon, même avec un très grand nombre de mesures, d'éliminer le caractère fondamentalement non déterministe de la mécanique quantique.

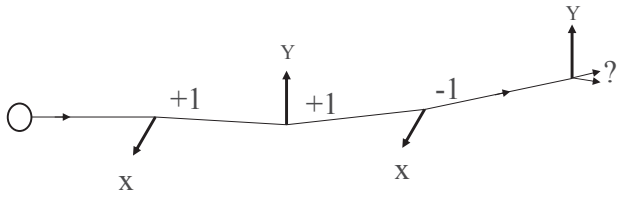


FIGURE *XI.3 – Une particule de spin* $1/2$ *se propageant le long de la direction* $Oz$ *croise successivement des analyseurs de Stern et Gerlach mesurant sa composante de spin alternativement le long de* $Ox$*,* $Oy$*,* $Ox$*, etc. Le résultat* $+1$ *est obtenu pour la composante du spin si la déviation de la trajectoire se fait dans une direction, le résultat* $-1$ *si elle se fait dans la direction opposée. Ces résultats sont totalement aléatoires, mais permettent de préciser la position intiale de la particule dans le paquet d'ondes à l'entrée de l'appareil. Toutefois, quel que soit le nombre de mesures, l'information ainsi obtenue ne suffit jamais pour pouvoir prédire le résultat de la mesure suivante.*

Wigner a mis l'accent sur la non-réversibilité de l'évolution des variables supplémentaires dans de telles situations [588] ; Clauser a remarqué que la réversibilité peut être rétablie si l'on prend en compte les variables de polarisation de spin [589]. De plus, il est parfaitement possible de supposer l'existence de variables supplémentaires associées aux appareils de mesure, comme le montre un "argument informel de von Neumann sur les variables

supplémentaires" ; dans ce cas, un supplément d'aléatoire se produit lors de chaque mesure, de sorte qu'il n'est plus nécessaire d'invoquer une extrême sensibilité aux conditions initiales.

(iii) Pour deux particules, considérons par exemple une expérience EPRB, comme celle décrite dans le § C-1, et l'évolution des positions des particules lorsqu'elles sont éloignées l'une de l'autre. Si la particule 1 traverse un analyseur de Stern et Gerlach orienté selon la direction $a$, l'évolution de sa position de Bohm est évidemment fonction de $a$ (la position doit suivre la fonction d'onde quantique ; dans ce cas, elle a le choix entre deux paquets d'ondes qui se séparent le long d'une direction définie par $a$). Mais cela change en même temps la position $(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ du point représentant le système dans l'espace des configurations à 6 dimensions. Comme nous l'avons vu plus haut, pour une fonction d'onde orbitale qui n'est pas un produit, cela change le terme de vitesse quantique pour la particule 2, d'une façon qui dépend explicitement de $a$. De plus, il faut tenir compte des spins et de leurs corrélations avec les variables de position. Pour un état singulet de spin, on constate alors (pour plus de détails, voir Appendice I, seconde partie) que la sélection d'un paquet d'ondes orbital pour la première particule induit une projection de l'état de spin de la seconde particule sur un état qui dépend également de $a$. Il n'est donc pas étonnant qu'une théorie de ce type n'ait aucune difficulté à reproduire les effets non locaux associés avec des violations des inégalités de Bell !

Dans ce cas, l'avantage d'introduire des variables supplémentaires est de mettre en lumière explicitement les effets de la non-localité, qui souvent reste relativement cachée dans le formalisme standard de la mécanique quantique (une raison de plus de ne pas appeler ces variables "cachées" !). Bell par exemple écrit (dernière phrase de [590]) : "c'est un mérite de l'interprétation de De Broglie-Bohm de mettre en avant ce point (la non-localité) de façon tellement explicite qu'il n'est plus possible de l'ignorer" – de fait, historiquement, c'est précisément par cette voie qu'il est parvenu à sa fameuse inégalité. Comme mentionné dans le § C-2 du Chapitre IV, il n'existe pas d'unanimité concernant la question de savoir si l'interprétation standard de la mécanique quantique se contente d'occulter la non-localité qu'elle contient, ou si elle peut être considérée comme une théorie locale en dépit des violations des inégalités.

### $\gamma$. *Traitement relativiste du spin*

Nous avons déjà mentionné plus haut que la théorie dBB peut être étendue à l'équation relativiste de Dirac, ce qui conduit par exemple au terme supplémentaire (XI-33) dans les vitesses bohmiennes. C'est possible car, comme l'équation de Schrödinger, l'équation relativiste de Dirac peut être reformulée en termes de densités et courants locaux, comme remarqué par des Cloizeaux

en 1983 [591]). Le Chapitre 12 de l'ouvrage de Holland [574] discute divers aspects de cette extension de la théorie dBB à l'équation de Dirac. Cette équation introduit des questions spécifiques du fait qu'elle prédit l'existence d'énergies négatives ; on suppose généralement que tous les niveaux d'énergies négatives sont remplis par des fermions, formant ainsi ce que l'on appelle une "mer de Dirac". Il est en fait possible d'attribuer des trajectoires de particules à tous les fermions, y compris ceux de la mer de Dirac, et de développer une théorie qui reste déterministe [592].

*δ. Théorie des champs*

Dans le second de ses articles initiaux (appendice A de [120]), Bohm donne une brève discussion de la quantification du champ, dans le contexte d'une étude de l'effet Compton. L'analogie entre un oscillateur harmonique et la dynamique d'un mode du champ électromagnétique (libre) dans une cavité est un guide utile pour introduire des trajectoires de Bohm en électrodynamique quantique – voir aussi les § 10.6 et Chapitre 12 de [574]. Bohm introduit une variable supplémentaire $\mathcal{A}$ associée avec l'opérateur quantique $A$ décrivant le potentiel vecteur, qui joue alors le rôle de la "position" de l'oscillateur harmonique ; la "fonction d'onde" dans la représentation où $A$ est diagonal guide alors $\mathcal{A}$, selon l'équation pilote habituelle. Comme souvent en électromagnétisme quantique, ceci est fait en jauge de Coulomb, où le potentiel vecteur est transverse et donne directement le champ magnétique ; le champ électrique est proportionnel à sa dérivée temporelle, donc au moment conjugué du potentiel vecteur (il est possible de montrer que la théorie reste invariante de jauge).

Au lieu d'introduire une variable bohmienne pour le potentiel vecteur, on peut le faire directement pour le champ électrique en lui associant la variable bohmienne $\mathcal{E}$, qui est guidée par la "fonction d'onde" dans la représentation où le champ électrique est diagonal. $\mathcal{E}$ et sa dérivée temporelle $d\mathcal{E}/dt$ donnent alors les composantes électrique et magnétique (à un facteur constant près) du champ électromagnétique associé au mode considéré. Une transformée de Fourier inverse fournit ensuite les valeurs des deux champs en tout point à l'intérieur de la cavité.

Des méthodes similaires peuvent être appliquées à d'autres champs bosoniques. Les bosons massifs possèdent des opérateurs de positions (contrairement aux photons, de masse au repos nulle). Pour des états contenant un nombre fixé de bosons non relativistes, on peut alors définir une fonction d'onde dans l'espace des configurations de toutes les positions. Ceci permet d'appliquer directement la même méthode qu'au § H-1-b pour introduire des positions bohmiennes : l'équation pilote reste exactement la même que pour des particules discernables, toutes les positions bohmiennes étant guidées par une fonction d'onde totalement symétrique. Cette méthode n'est toutefois

plus applicable lorsque le vecteur d'état est une superposition contenant des nombres totaux de bosons différents. On peut alors procéder comme ci-dessus pour le champ électromagnétique, et introduire des variables bohmiennes pour les champs[37]. On peut même introduire des opérateurs de création et d'annihilation [593, 594] qui créent ou annihilent des positions bohmiennes, de sorte que les trajectoires démarrent ou se terminent en des points. Pour finir, la situation pour les bosons est qu'il semble exister un choix entre les variables bohmiennes de position ou de champ.

Pour des champs fermioniques, si l'état quantique contient un nombre fixé de particules, la situation est la même que plus haut : les positions bohmiennes sont guidées par une fonction d'onde totalement antisymétrique. Il est plus compliqué d'introduire des variables bohmiennes pour des champs qui sont associés à des opérateurs qui anticommutent ; pour éviter la difficulté, on peut postuler que les variables bohmiennes sont uniquement les positions. Si l'on combine ceci avec la description ci-dessus, on arrive à une description de la réalité où les fermions et bosons sont traités de façon très différente, les premiers ayant des variables bohmiennes de position et les seconds de champ. La symétrie de la seconde quantification habituelle est perdue. Mais, après tout, les bosons et les fermions sont effectivement des systèmes physiquement très différents, et il n'y a aucune raison particulière pour qu'ils soient traités de la même manière ! De plus, des bosons composites (par exemple des atomes) contenant un nombre pair de fermions acquièrent effectivement une position dans cette théorie, le centre de masse des constituants fermioniques.

Bell a également discuté la quantification dans un cadre réaliste de champs fermioniques sur un réseau d'espace discret [560] ; c'est d'ailleurs à cette occasion qu'il a introduit le mot "beable". Dans son modèle, l'équation pilote déterministe est remplacée par des probabilités de transitions stochastiques, mais il conjecture que cette composante stochastique pourrait disparaître d'une façon ou d'une autre à la limite continue. Aucune variable supplémentaire n'est introduite pour les bosons ; les variables bosoniques standard apparaissent seulement dans le vecteur d'état, comme habituellement. Pour des revues sur les théories dBB des champs, voir par exemple [593] et [595] ou, pour une théorie relativiste, [596, 597].

#### H-1-f. Cosmologie quantique

En cosmologie, un problème important est l'étude de l'évolution de la structure de l'Univers primordial au cours de la période du "big bang". La mécanique quantique y joue un rôle important, mais aussi la gravité. La re-

[37] Les difficultés provenant de divergences en théorie des champs standard, entraînant la nécessité de procédures de renormalisation, sont également présentes en théorie dBB, comme on pouvait s'y attendre.

lativité générale introduit une équation donnant la métrique, équation où le facteur d'échelle de relativité générale apparaît comme un opérateur quantique. En ce qui concerne les particules quantiques, lorsque la température est suffisamment haute, elles peuvent être considérées comme formant un fluide relativiste (similaire à un champ de radiation) ; on arrive alors à une forme générique de l'action qui décrit tous ces degrés de liberté microscopiques. Les deux systèmes possèdent des fluctuations quantiques dont l'effet peut être de créer de petites perturbations initiales qui, croissant dans le temps, conduisent à la formation d'étoiles et de galaxies ; cependant ce phénomène obéit à des équations quantiques couplées qui sont compliquées. Un développement en perturbations peut être introduit par rapport aux petites fluctuations inhomogènes et anisotropes de la métrique, mais même dans ces conditions la solution reste très difficile, du fait de la présence de l'opérateur quantique associé au facteur d'échelle relativiste.

Pour aller plus loin, on peut alors traiter le facteur d'échelle de façon approximative, c'est-à-dire comme un nombre classique ; bien évidemment, ceci n'est pas très satisfaisant sur le plan conceptuel. Mais l'on peut aussi développer une théorie dBB de la gravité quantique selon les mêmes lignes que pour le champ électromagnétique ; il apparaît alors une variable bohmienne pour la métrique. Les références [598] et [599] ont cependant montré que, une fois qu'une transformation unitaire a été appliquée pour mettre l'hamiltonien sous forme d'une somme de deux termes, il est utile d'introduire la trajectoire de Bohm du facteur d'échelle. Cette trajectoire peut être calculée à des ordres successifs, ce qui rend possible d'injecter les valeurs correspondantes dans les diverses équations de perturbation des autres degrés de liberté. Cette façon de procéder ne signifie en aucune manière que les effets quantiques ont été ignorés : comme nous l'avons vu, les trajectoires bohmiennes sont sensibles aux effets d'interférence et d'effet tunnel, et leur usage ne supprime aucun effet quantique. Par exemple, la méthode s'applique aux théories où l'Univers passe par des cycles d'expansion-contraction, mais où la contraction ne dépasse pas une valeur petite (mais non nulle) du facteur d'échelle, pour laquelle les effets quantiques gravitationnels deviennent tellement répulsifs que l'Univers rebondit vers l'extérieur ("Big Bounce") [600]. Cette approche est particulièrement bien adaptée à la définition d'un temps global en cosmologie ; divers résultats intéressants en cosmogenèse quantique ont été obtenus de cette façon. Bien sûr on peut, au choix, interpréter les trajectoires de Bohm comme définissant un phénomène physique réel, ou simplement comme un outil mathématique intermédiaire commode rendant plus aisé un calcul de perturbations.

#### H-1-g. Modifications de la théorie dBB

Dès ses premiers articles de 1952 (§ 9 de la première partie de la Ref. [11]), Bohm a mis l'accent sur le fait que la théorie dBB pouvait être un bon point de départ pour introduire des modifications de la théorie standard, par exemple pour résoudre des difficultés se manifestant à très courtes distances. Ces théories dBB modifiées ne sont alors plus équivalentes à la théorie standard, ce qui signifie qu'il devient possible d'effectuer des tests expérimentaux qui les départagent de la théorie standard ; elles introduisent donc de la nouvelle physique. Par exemple, Bohm a discuté l'introduction d'un terme de relaxation dans l'expression de l'accélération de la particule (ceci change la formule du guidage et la condition d'équilibre quantique), ou dans l'équation d'évolution du vecteur d'état (ceci change la dynamique quantique). Il est revenu au problème en 1953 pour montrer dans un modèle simple que, sous l'effet de collisions aléatoires non contrôlées, une distribution initiale arbitraire tend vers une distribution $|\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ...)|^2$, de sorte qu'il semble probable qu'elle en reste proche à tout instant. En 1954, lui et Vigier ont traité un cas plus général, en postulant des fluctuations stochastiques et irrégulières du fluide qui guide les positions des particules [601].

Valentini a repris le problème de 1991 [602] en s'inspirant du théorème H en mécanique statistique, et a introduit une "entropie sub-quantique" $H$ pour caractériser une distribution différant de celle de l'équilibre quantique ; il a ensuite montré qu'une valeur à gros grains de $H$ ne peut que croître en fonction du temps, et que la valeur maximale est obtenue pour l'équilibre quantique. Ce dernier apparaît alors comme un attracteur, de sorte que le raisonnement conduit à ne plus considérer la règle de Born comme un postulat, mais comme une conséquence de la dynamique. Voir les références [603, 604] pour des simulations numériques plus récentes de ce phénomène d'émergence de l'équilibre quantique. Un autre type de modification de la théorie dBB est discuté au § K-4 (page 415).

#### H-1-h. Objections et solutions

Nous ne pouvons discuter ici tous les aspects de la théorie dBB. Ce n'est pas une théorie d'usage général en physique quantique ; elle n'a certainement pas été appliquée à tous les problèmes qui ont été traités avec succès dans le cadre de la mécanique quantique standard, allant des innombrables applications en matière condensée, optique quantique, etc. jusqu'à la chromodynamique quantique (théorie des interactions fortes mettant en jeu les quarks, une composante essentielle de notre description actuelle du monde physique). Puisque notre propos ici est plutôt de nous concentrer sur l'interprétation, nous nous contenterons de discuter quelques exemples d'application de la théorie dBB. Nous les choisirons parce qu'ils mettent en lumière le contenu physique de cette théorie, et permettent au passage de clarifier un certain

nombre de malentendus. Une revue de diverses objections, quelques malentendus communs, et de leurs réponses peut être trouvée dans le § 15 de la Ref. [605].

### $\alpha$. *Les trajectoires bohmiennes sont-elles réelles ?*

Nous l'avons vu, une trajectoire bohmienne peut être reconstruite dans le passé à partir de l'observation de la position de la particule, qui permet de calculer ses positions précédentes et donc sa trajectoire. Pour le futur, il est cependant impossible de faire des prédictions plus précises qu'en mécanique quantique standard, dont le caractère fondamentalement indéterministe n'est pas altéré. En ce sens, les explications des phénomènes quantiques données par la théorie dBB sont plus rétrodictives que prédictives.

Les auteurs de la Ref. [586] proposent d'étudier la nature de cette explication en considérant une expérience d'interférence dans un cas à la fois intéressant et intrigant (voir aussi la discussion de la Ref. [606]). Le dispositif d'interférence habituel est complété par deux cavités électromagnétiques, qui peuvent emmagasiner l'énergie de photons qu'elles contiennent et être utilisées comme des dispositifs "Welcher Weg" (dispositif "quel chemin"), indiquant à l'expérimentateur à travers quel trou est passée la particule dans une expérience d'interférence. La première particule passe à travers un écran muni de deux orifices, avec une cavité située près de chacun d'entre eux ($C_1$ et $C_2$ dans la Figure XI.1). Si la particule passe par l'orifice du haut, elle laisse un photon dans la première cavité[38] ; si elle traverse l'orifice du bas, elle laisse le photon dans la seconde cavité. Si l'on teste le nombre de photons dans l'une quelconque des deux cavités, ou les deux, on peut en déduire à travers quel orifice la particule est passée. Une façon d'obtenir cette information est d'observer la trajectoire d'une seconde particule[39], qui est envoyée ensuite à travers cette même cavité, interagit avec son champ, et prend une trajectoire qui dépend du nombre de photons qu'elle contient. Au bout du compte, l'idée générale de cette expérience est de comparer les trajectoires des deux particules, qui peuvent interagir indirectement via un photon dans une cavité, et d'étudier les conditions dans lesquelles ces trajectoires peuvent s'influencer mutuellement.

Pour la discussion, il est plus commode de supposer que les paquets d'onde issus des deux trous se croisent dans une région finie de l'espace, au lieu de se recouvrir jusqu'à une distance infinie de l'écran sous les effets de la diffraction. On a alors une situation plus simple schématisée sur la Figure XI.4. L'expérience est symétrique par rapport au plan horizontal P de la figure. En

[38] Nous pouvons supposer que les particules sont des atomes dans des niveaux de Rydberg élevés, qui peuvent avoir de très grands moments dipolaires électriques et peuvent donc aisément émettre ou absorber des photons dans des cavités supraconductrices.

[39] Un schéma analogue est utilisé dans l'expérience décrite au § C.

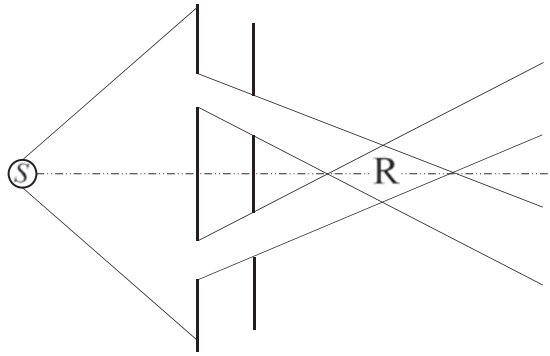


FIGURE *XI.4 – Une expérience d'interférence avec une source S et des écrans disposés de façon à ce que les paquets d'ondes se croisent dans la région d'interférence R.*

mécanique quantique standard, les deux paquets d'ondes se traversent sans aucun effet mutuel (l'équation de Schrödinger est linéaire). Ainsi, le paquet d'ondes qui passe par le trou du haut, et peut donc laisser au passage un photon dans $C_1$, se propage-t-il toujours vers le bas de la figure ; après le passage par la région d'interférence, une particule dans ce paquet d'ondes ne peut être trouvée qu'au-dessous du plan de symétrie P. De même, le paquet d'ondes susceptible de laisser un photon dans $C_2$ se propage vers le haut et correspond à des particules qui sont détectées au-dessus du plan P après la région d'interférence. Mais nous avons vu au § H-1-c-$\alpha$ que, en l'absence des cavités à photons détectant le passage de la particule test, ses trajectoires dBB ne peuvent jamais traverser le plan de symétrie P ("règle du non-croisement") : car elles "sautent" d'un paquet d'ondes à l'autre dans la région d'interférence, ce qui leur permet d'éviter le croisement du plan. Supposons pour le moment que cela reste vrai en présence des cavités à photons (nous reviendrons sur cette question plus bas). Alors, trouver la particule en dessous du plan de symétrie P signifie alors nécessairement que sa trajectoire est passée à travers le trou inférieur, et ceci même si un photon a été laissé dans la cavité du haut. On aboutit ainsi à une contradiction rétrodictive entre la mécanique quantique et la théorie dBB, puisqu'elles considèrent que le trou par lequel est passé la particule est différent. La particule test a laissé un photon dans la cavité où sa trajectoire bohmienne n'est jamais passée ! Faut-il en conclure que les résultats de mesures quantiques de la position de la particule sont contradictoires avec les trajectoires bohmiennes ? Si c'est le cas, les trajectoires ne perdent-elles pas tout sens physique ?

La contradiction apparaît encore plus marquée si l'on suppose que la présence du photon est détectée par son influence sur la trajectoire d'une

seconde particule qui passe dans la cavité du haut ; le résultat est que les deux trajectoires s'influencent mutuellement, alors que jamais elles ne sont proches. De cette constation surprenante, les auteurs concluent que les trajectoires rétrodictives de Bohm sont "surréalistes". Nous étudions maintenant cette question.

Remarques :

(i) Avant d'étudier plus en détail le paradoxe, nous pouvons remarquer qu'il repose sur l'idée que les deux particules peuvent être identifiées à leurs positions et trajectoires seulement. Cela correspondrait à une vision de la théorie dBB où seules les positions des particules seraient associées à la réalité physique, mais aucun élément de la fonction d'onde. Mais, en théorie dBB complète, la fonction d'onde n'est pas exclue de la réalité physique, comme nous l'avons vu au § H-1-b-$\gamma$. Par exemple, dans le point de vue où la fonction d'onde devient un champ réel classique, qui existe aussi objectivement qu'un champ électromagnétique (*cf.* la citation de Bell du § H-1-b-$\gamma$). Une "particule" met alors toujours en jeu simultanément une position et le champ associé, et il n'existe alors aucune raison a priori de penser que ce dernier ne peut pas également influencer son entourage. Ainsi, la façon la plus simple de résoudre le paradoxe apparent est de considérer que le champ réel associé à la première particule peut parfaitement interagir localement avec le champ électromagnétique dans la cavité, et y laisser un photon ; plus tard, ce photon pourra agir sur la trajectoire de la seconde particule.

De façon équivalente, et si l'on préfère raisonner en termes de potentiel quantique et de non-localité, on peut se référer aux termes des auteurs de la Ref. [607] : "l'énergie a été transférée non localement au champ dans la cavité par l'action du potentiel quantique... phénomène qui est tout aussi réel que les corrélations non locales observées dans les effets EPR" – voir les figures de cette référence pour des exemples de tracés des trajectoires.

(ii) Une autre remarque est que, dans le cadre de l'interprétation parfaitement standard de la mécanique quantique, les "mesures sans interactions" sont décrites d'une façon qui est en réalité très proche de cette description de Bohm. Dans le § D, nous avons décrit une expérience où certains événements ne peuvent se produire que parce que l'onde de Schrödinger est absorbée dans un bras d'un interféromètre, alors que la particule n'a accès qu'à l'autre bras pour se propager ; dans de tels événements, les propagations de l'onde et de la particule semblent tout aussi dissociées. Les processus de mesure sans interaction tout à fait standard ne sont pas moins "surréalistes" que les trajectoires de Bohm !

*β. Effets de l'intrication sur les trajectoires*

L'existence des événements étudiés dans la Ref. [586], où une particule dépose un photon dans une cavité alors que sa trajectoire ne la traverse pas (trajectoires surréalistes), est déduite de la règle du "non-croisement" – les trajectoires bohmiennes ne peuvent jamais traverser le plan de symétrie horizontal P de la Figure XI.1. C'est effectivement toujours le cas pour une particule unique, qui se propage dans un environnement symétrique avec une fonction d'onde symétrique. Mais, dès que la particule a traversé les cavités, elle est intriquée avec les deux champs des cavités, et il n'est plus possible de la considérer comme un système quantique isolé, muni d'une fonction d'onde unique se propageant dans l'espace à 3 dimensions. L'intrication peut alors se propager vers d'autres particules, y compris celles de l'appareil de mesure. Une étude plus détaillée est donc nécessaire, qui permet de faire un lien intéressant avec les corrélations entre la particule et l'appareil de mesure déjà invoquées dans le fameux débat entre Einstein et Bohr lors des conférences Solvay. Ceci donne également une idée de la façon dont les traces partielles d'opérateurs densité apparaissent en théorie dBB.

Notre conclusion sera que, si la particule qui joue le rôle de pointeur est microscopique (une seule position bohmienne lui est associée), un certain nombre de trajectoires croisent la région d'interférence sans se dévier, tandis que d'autres rebondissent et manifestent donc un effet de non-localité (trajectoires surréalistes). Si le pointeur est macroscopique, il doit lui être associé un très grand nombre de positions bohmiennes, et les trajectoires traversent toute la région d'interférence sans dévier : les trajectoires surréalistes n'existent pas.

En théorie dBB, lorsque l'intrication apparaît, la cohérence du raisonnement impose de tenir compte de toutes les variables de position associées à l'ensemble des sous-systèmes intriqués. Dans l'Appendice I, nous étudions ce qui se produit si le deuxième système quantique est macroscopique, et en particulier inclut un pointeur constitué d'un très grand nombre de particules. Dans ce chapitre, nous nous limitons à l'étude du mécanisme de base, et supposons que les deux systèmes intriqués sont microscopiques : la particule test et un autre système quantique qui peut être, soit un photon dans une cavité, soit une particule unique. L'étude du micromaser en théorie dBB requiert l'introduction des variables de position associées aux modes du champ dans chacune des cavités. Nous traitons ces modes par un modèle simple : des oscillateurs harmoniques associés avec des particules massives placées dans un potentiel. La variable de position de la fonction d'onde associée à la cavité $C_1$ est $\mathbf{r}_1$, celle associée à la cavité $C_2$ est $\mathbf{r}_2$, qui correspondent respectivement en mécanique bohmienne aux variables de position $\mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{Q}_2$. Nous appelons $\mathbf{r}$ la variable de la fonction d'onde de la particule test, dont la position bohmienne est $\mathbf{Q}$. La situation intriquée est alors décrite par une fonction

d'onde :

$$\Psi(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi_{\text{upper}}(\mathbf{r})\chi_e(\mathbf{r}_1)\theta_g(\mathbf{r}_2)+\varphi_{\text{lower}}(\mathbf{r})\chi_g(\mathbf{r}_1)\theta_e(\mathbf{r}_2)\right] \quad \text{(XI-34)}$$

où $\varphi_{\text{upper}}(\mathbf{r})$ et $\varphi_{\text{lower}}(\mathbf{r})$ sont les fonctions d'onde de la particule qui partent respectivement des orifices supérieur et inférieur dans l'écran, $\chi_{g,e}(\mathbf{r}_1)$ les fonctions d'onde associées au premier oscillateur harmonique dans son état fondamental $g$ et son premier état excité $e$, et $\theta_{g,e}(\mathbf{r}_2)$ les fonctions d'onde analogues pour l'autre oscillateur.

Les localisations les plus probables des positions $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{Q}_2$ sont celles où $|\Psi(\mathbf{Q},\mathbf{Q}_1,\mathbf{Q}_2)|^2$ prend des valeurs relativement grandes, ce qui implique que l'une des deux composantes au moins de (XI-34) ait un grand module. Une valeur maximale de la première composante demande que $\mathbf{Q}_1$ soit choisi de façon à donner une valeur maximale à $|\chi_e(\mathbf{Q}_1)|^2$, tandis que la seconde composante demande que $|\chi_g(\mathbf{Q}_1)|^2$ soit maximal. Mais les deux fonctions $\chi_{e,g}(\mathbf{r})$ sont significativement différentes (elles sont en fait orthogonales), et leurs maximums ne coïncident pas ; quelle que soit la valeur aléatoire de $\mathbf{Q}_1$, au plus l'une de ces fonctions peut prendre une valeur relativement grande, l'autre restant assez petite[40]. Il en est évidemment de même pour $\mathbf{Q}_2$. Ainsi, pour un choix quelconque de $\mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{Q}_2$, la probabilité ne peut être significative que lorsqu'une des composantes de (XI-34) domine l'autre. Il s'ensuit que, pour une trajectoire particulière du système (dans l'espace des états des configurations à 9 dimensions), la probabilité est grande que les deux composantes de (XI-34) aient un module différent. Ceci brise la symétrie initiale et change le système d'interférences : la règle de non-croisement ne s'applique évidemment plus. Certes, il existe toujours des trajectoires paradoxales (celles où la trajectoire passe par une cavité mais excite le champ dans une autre), mais elles demandent une configuration peu probable de $\mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{Q}_2$, de sorte que leur probabilité en est nettement diminuée.

De plus, si nous désirons obtenir une information sur l'état du champ dans les cavités, il nous faut le coupler à d'autres systèmes physiques, une seconde particule par exemple. A son tour, la position de cette particule sera diffusée dans une direction qui dépend de l'état du champ dans les cavités. La superposition écrite en (XI-34) doit maintenant contenir 4 fonctions et 4 variables, et le déséquilibre entre les deux termes de (XI-34) sera encore plus marqué pour la plupart des trajectoires (dans l'espace des configurations à 12 dimensions). Enfin, lorsque cette seconde particule atteindra un appareil de mesure, le nombre de degrés de liberté intriqués devient très grand et on atteint la même situation que plus haut : l'une des ondes devient totalement vide, et toutes les trajectoires paradoxales disparaissent complètement

[40]Par exemple, si $\mathbf{Q}_1$ tombe exactement sur un maximum de la distribution de probabilité pour l'état fondamental, la fonction d'onde de l'état excité s'annule exactement, de sorte que l'un des termes de (XI-34) disparaît totalement.

(une situation semblable se produit si la particule étudiée se propage dans une chambre à bulles, qui s'intrique rapidement avec de nombreuses autres particules).

Remarque :

On peut trouver un lien entre cette analyse et l'un des fameux paradoxes discutés par Einstein et Bohr aux conférences Solvay. Einstein élevait une objection contre le principe d'incertitude, en considérant une expérience d'interférence où le recul d'impulsion de l'écran est mesuré, ce qui fournit une information "Welcher Weg" (quel chemin) – voir par exemple le Complément $D_I$ de [608]). Bohr a répondu [609] qu'il faut tenir compte du caractère quantique de l'écran, qui lui aussi est soumis aux relations d'incertitude ; un calcul correct montre alors que, si l'interférence peut être observée, l'état de l'écran est nécessairement tel qu'il est impossible de déterminer le trajet de la particule. Einstein a alors reconnu que le paradoxe était levé. Ici, nous avons une situation similaire : de l'impulsion est également transférée de la particule vers l'écran, par exemple lorsque sa trajectoire se courbe lors du passage dans les trous. Ceci a nécessairement des conséquences sur les positions bohmiennes associées à l'écran. Il serait incohérent de traiter les deux systèmes différemment, l'un avec une position bohmienne, l'autre sans. Le fait que la mécanique quantique s'applique de la même façon à tous les systèmes était précisément la conclusion de cette discussion entre Einstein et Bohr. Il est amusant de voir que cet argument historique s'applique également dans le cadre de la théorie dBB !

Au niveau microscopique, le fait que deux trajectoires puissent s'influencer mutuellement même si elles ne passent jamais près l'une de l'autre (dans une expérience de type EPR par exemple) n'est en rien une absurdité, mais simplement une illustration du caractère explicite de la non-localité en théorie dBB – voir la citation de Bell ci-dessus ou la discussion de cette expérience de pensée par Griffiths [610]. Il existe bien d'autres exemples illustrant que les phénomènes quantiques sont bien locaux dans l'espace des configurations, mais pas dans l'espace ordinaire.

### $\gamma$. *Pointeurs lents*

Cette analyse illustre pourquoi un bon recouvrement entre les deux états quantiques du pointeur (les états intriqués avec ceux de la particule test) favorise le non-croisement des trajectoires, et donc leur caractère surréaliste éventuel. Il a été suggéré de maximiser ce recouvrement par l'usage de "pointeurs lents" [611,612]. Il s'agit de détecteurs de chemin qui se trouvent initialement, juste après intrication avec la particule test, dans deux états quantiques ayant la même répartition spatiale de densité de probabilité, mais cependant orthogonaux : les deux fonctions d'onde correspondent à des impulsions différentes

(elles sont multipliées par des exponentielles imaginaires différentes). De tels pointeurs ne fournissent aucune information instantanée sur le chemin suivi, mais avec un retard : l'information apparaît seulement après que les paquets d'ondes de la particule test aient traversé la région d'interférence. Dans ces conditions, la règle du non-croisement s'applique toujours dans cette région, ce qui conduit à des trajectoires paradoxales. Plusieurs articles [613], [614] ont étudié des problèmes similaires dans le contexte des mesures faibles (§ C-1), continues ou encore protectives. Une composante commune de toutes ces études est que le pointeur, les bulles de la chambre de détection, etc. sont associées avec un petit nombre de variables bohmiennes, souvent une seule position.

Dans le § 3 de l'Appendice I, nous étudions les trajectoires bohmiennes avec des pointeurs lents. Nous montrons que, tant que le pointeur reste microscopique (petit nombre de degrés de liberté), les trajectoires peuvent effectivement présenter des effets non locaux. Mais, lorsque le nombre de degrés de liberté est augmenté, la fraction des trajectoires non locales diminue de plus en plus. Une première raison est que le recouvrement entre les deux états quantiques du pointeur varie exponentiellement avec le nombre de ses degrés de liberté : donc, même un déplacement minuscule de l'objet résulte dans un recouvrement extrêmement faible. Une autre raison est que deux états orthogonaux qui diffèrent par leur impulsion vont rapidement s'intriquer avec des états orthogonaux de l'environnement ; il suffit pour annuler le recouvrement qu'une seule de ses particules soit diffusée dans une direction qui dépend de l'impulsion. A la limite où le pointeur devient macroscopique la conséquence en est que, comme le nombre de ses particules est de l'ordre du nombre d'Avogadro, les effets non locaux disparaissent, de sorte que les indications du pointeur sont cohérentes avec les trajectoires bohmiennes.

En conclusion de cette discussion sur les effets d'un pointeur, on trouve dans la littérature diverses études de l'intrication entre systèmes quantiques décrits par un petit nombre (souvent deux) variables de position bohmiennes. Ceci est parfaitement approprié pour étudier deux systèmes quantiques microscopiques, et jette un éclairage intéressant sur des effets quantiques non locaux. Toutefois, lorsque l'un des deux systèmes intriqués est un appareil de mesure, il devient indispensable d'inclure un nombre macroscopique de variables bohmiennes, et les trajectoires surréalistes disparaissent. La même nécessité d'introduire tous les degrés de liberté existe en mécanique quantique standard : même quand la dynamique du centre de masse d'un objet quantique macroscopique peut être traitée comme celle d'une particule unique de grande masse, ce n'est pas pour autant que les autres variables peuvent être ignorées lorsqu'il s'agit de calculer une trace partielle sur toutes les variables de cet objet.

*δ. Corrélations entre mesures à des instants différents*

Jusqu'ici nous n'avons considéré que des mesures effectuées à un instant donné, mais la mécanique quantique donne également des prédictions concernant les mesures effectuées à plusieurs instants différents ; il est donc intéressant de les comparer avec celles de la théorie dBB [615]. De fait, à première vue, il n'est pas évident que les résultats seront les mêmes ; par exemple, si l'on étudie un système dans un état stationnaire avec une fonction d'onde réelle, la vitesse de Bohm s'annule, de sorte que la position **Q** reste constante. Mais d'autre part, en mécanique quantique, la fonction de corrélation à deux temps dans un état stationnaire n'a aucune raison de ne pas dépendre du temps : pour un oscillateur harmonique dans son état fondamental par exemple, il est bien connu que la fonction de corrélation à deux temps oscille dans le temps. On pourrait alors penser naïvement que la théorie dBB prédit des fonctions de corrélation constantes dans le temps, en contradiction avec la dépendance temporelle prévue par la mécanique quantique standard.

Mais, en réalité, une utilisation correcte de la mécanique de Bohm montre à nouveau que cette contradiction n'existe pas. En effet, dans le cadre de cette théorie, l'effet de la première mesure doit être pris en compte – c'est indispensable même si les deux observables mesurées commutent, et même si elles correspondent à des systèmes indépendants. La première mesure corrèle la position de la particule avec celle du pointeur d'un appareil de mesure ; il est alors indispensable de tenir compte également de cette position dans l'application de la théorie. Comme la fonction d'onde du système total n'est plus un produit, des situations analogues à celles discutées au § H-1-c pour deux particules se produisent alors : la position du système mesuré prend une vitesse qui dépend de la position de l'aiguille. Ce fait change complètement son évolution future, et donc la fonction de corrélation. Au bout du compte, un calcul dans le cadre de la théorie dBB correctement appliquée reproduit exactement les résultats de la mécanique quantique standard – pour plus de détails, voir l'Appendice I, qui discute également d'autres expériences dans le contexte de la mécanique de Bohm [616–619].

*ϵ. Les règles à observer en théorie standard et dBB sont similaires*

La conclusion de cette brève revue de diverses objections à la théorie dBB est que, d'une certaine façon, sa structure est plus proche de celle de la mécanique quantique standard qu'on aurait pu le penser ; toutes les règles standard qui s'appliquent au vecteur d'état trouvent leur contrepartie directe en termes de vitesses et positions de Bohm. Il ne faut donc pas répéter en théorie dBB des erreurs que nous avons appris à éviter en théorie standard. Nous savons en effet que, lorsque le système physique se corrèle avec d'autres, en particulier des appareils de mesure, il devient indispensable de prendre en

compte cette corrélation par un vecteur d'état intriqué. De même, en théorie dBB, il faut prendre en compte les corrélations entre les variables de position de Bohm, ce qui introduit le phénomène des ondes vides (§ H-1-d-$\alpha$). Nous avons appris à l'occasion des arguments célèbres de Bohr que la cohérence logique de la mécanique quantique demande que toutes les parties de l'expérience soient traitées quantiquement, et par exemple qu'on ne peut pas ignorer l'effet de recul d'une partie de l'appareillage (l'écran de l'expérience d'interférence). De même, la description de Bohm du système demande que le recul soit pris en compte en termes de positions.

La même règle s'applique aux fonctions de corrélation. En mécanique quantique standard, ces fonctions sont calculées en prenant en compte la perturbation de la première mesure sur l'évolution du système jusqu'à la seconde mesure ; on peut par exemple pour cela utiliser la formule de Wigner (XI-9). En théorie dBB, il est impératif de tenir également compte de cet effet lorsque l'on calcule l'évolution des positions bohmiennes entre les deux mesures.

De façon générale, de nombreuses objections peuvent être élevées contre la théorie dBB si cette dernière est tronquée à seulement certaines de ses variables. Une théorie dBB complète demande impérativement que toutes les variables de position de l'ensemble des systèmes quantiques intriqués soient prises en compte. Si cette nécessité est oubliée, diverses contradictions apparaissent ; elles peuvent toutefois être levées par l'introduction de toutes les variables.

#### H-1-i. Résumé et discussion

On peut résumer les caractéristiques principales de la version dBB de la théorie quantique comme suit :

– Elle décrit les mêmes éléments d'une façon plus riche que la théorie standard, mais sans introduire aucune contradiction avec ses prédictions. Elle apporte parfois une perspective inattendue sur les phénomènes en mettant en lumière des trajectoires non triviales, des sauts que les particules effectuent d'un paquet d'ondes à un autre[41], etc., et conduit à des représentations qu'on peut trouver intéressantes sur le plan esthétique. Elle rend la non-localité complètement explicite, mais il ne s'agit pas d'une caractéristique qui serait artificiellement ajoutée à la théorie standard, car cette dernière n'est pas non plus parfaitement locale (les deux théories sont mathématiquement locales dans l'espace des configurations, mais des non-localités apparaissent quand l'on revient à l'espace habituel à 3 dimensions). Ce caractère explicite peut

[41] Bien sûr, ces représentations ne sont pas réellement spécifiques de la théorie dBB. Elles apparaissent également en théorie quantique standard lors du tracé de figures montrant le courant de probabilité. La différence est que la théorie bohmienne attribue plus de réalité physique à ces tracés.

s'avérer le point de départ de nouvelles découvertes, comme l'illustre celle du théorème de Bell.

– Elle a souvent été rejetée pour de mauvaises raisons, à commencer par les objections de Pauli à la conférence Solvay de 1927 (inaptitude à traiter les collisions inélastiques), dont on voit bien avec le recul du temps qu'elles ne tiennent pas. Ses prédictions sont en fait équivalentes à celles de la théorie standard, mais quand l'intrication apparaît (ou quand il faut calculer des traces partielles), un traitement correct du problème doit impérativement inclure toutes les variables bohmiennes de positions qui entrent en jeu ; en omettre une partie conduit à des résultats incorrects.

– Elle réussit brillamment à éliminer le rôle de l'observateur au cours des mesures. Grâce au mécanisme des ondes vides, les mesures peuvent être considérées comme n'importe quel processus d'interaction ordinaire ; l'unicité du résultat final émerge avant même toute observation. La réduction du vecteur d'état n'est plus un postulat, mais peut être déduite grâce à ce mécanisme.

– En ce qui concerne le déterminisme, la situation est plus nuancée : certes, la théorie fournit un schéma où le processus de mesure apparaît comme déterministe, mais où une moyenne doit être prise sur une distribution initiale qui est incontrôlable. La mesure révèle alors une propriété pré-existante des positions bohmiennes, mais seulement d'une façon rétrodictive ; le résultat fournit des informations sur la trajectoire de la particule dans le passé, mais pour le futur il est impossible de faire des prédictions plus précises que la mécanique quantique standard. Il n'existe en effet aucun moyen de contrôler ces positions initiales pour supprimer le caractère aléatoire de la mesure, ou même de réduire partiellement le caractère aléatoire prédit par la théorie standard. Certes, si on le souhaite, on peut considérer que le résultat de toute mesure est une conséquence des positions bohmiennes initiales de toutes les particules de l'Univers, au moment du big bang, mais on ne peut pas vraiment dire que tout indéterminisme ait disparu[42] ; il s'appuie juste sur une base plus concrète que dans l'interprétation standard.

– Pour le réalisme, nous avons vu au § H-1-b-$\gamma$ qu'il existe deux possibilités : soit l'on considère que la fonction d'onde décrit un champ physiquement réel comme suggéré par Bell, soit l'on considère la fonction d'onde comme un outil mathématique permettant de calculer l'évolution des positions réelles. Dans les deux cas, la simple donnée des positions n'est pas suffisante pour caractériser le système physique et son évolution ; la fonction d'onde est nécessaire pour spécifier ses conditions de préparation du système physique, qui sont réelles, ainsi que l'évolution ultérieure des positions, qui sont aussi

[42]En mécanique quantique, des événements fondamentalement aléatoires se produisent tout le temps – au moins chaque fois qu'une mesure est effectuée quelque part dans l'Univers. En mécanique bohmienne, un grand événement aléatoire s'est produit à la création de l'Univers, qui est la source de toutes les probabilités associées à des mesures futures.

réelles. Il en résulte que la théorie dBB ne permet pas de ré-introduire un réalisme simple et naïf. La raison en est que, si l'on désire éviter une incompatibilité avec la relativité (éviter de prédire la possibilité de transmettre des signaux plus rapidement que la vitesse de la lumière), on est contraint d'accepter l'idée que les positions bohmiennes ne peuvent jamais être directement manipulées. Ceci conduit à admettre l'existence de deux niveaux de description de la réalité, comme nous l'avons déjà remarqué à la fin du § H-1-b (voir également l'Appendice H) :

• Un niveau correspondant à la préparation du système ; le fait qu'un atome ou un ion soit préparé dans un niveau de configuration électronique donnée (un système de deux spins dans un état singulet, etc.) constitue une partie de la réalité objective qui ne peut pas être décrite en termes de positions seulement. Cette description demande un objet qui, mathématiquement, est un champ (fonction d'onde) ou un vecteur d'état ; ce dernier peut être manipulé directement dans les expériences (en changeant des potentiels extérieurs ou en déplaçant des conditions aux limites), mais n'est pas directement observable. Il se propage dans l'espace des configurations qui n'est pas l'espace habituel à 3 dimensions (sauf pour une particule unique sans spin). Ce niveau inclut les ondes vides, dont le statut de réalité intermédiaire n'est pas aisé à définir[43] [580].

• Un autre niveau associé aux observations, décrit par les positions bohmiennes se propageant dans l'espace habituel à 3 dimensions, et qui sont directement observables. Ce niveau ne peut pas être manipulé directement – en fait les interactions sont totalement absentes en son sein (pas d'interaction entre positions bohmiennes). Les variables correspondantes ne sont guidées que par le champ, ce qui permet donc de les manipuler indirectement, mais sans jamais changer leur distribution d'équilibre quantique.

Une sorte de dualisme réapparaît ainsi, mais un dualisme asymétrique puisque le premier niveau de réalité (préparation) influence le second (observation) et pas l'inverse. De plus, alors que les positions se propagent de façon naturelle dans l'espace ordinaire à 3 dimensions, elles sont uniquement guidées par un champ qui se propage dans un espace tout différent, l'espace abstrait des configurations. Le fait même que les deux niveaux de réalité soient distingués par les effets possibles des manipulations par des expéri-

[43] Comme déjà discuté à la fin du § H-1-c-$\gamma$, une question concerne le niveau de réalité qu'il convient d'attribuer aux ondes vides qui sont associées aux résultats des expériences qui n'ont pas été obtenus. Ces ondes vides tendent à constamment proliférer ; par exemple, la fonction d'onde de l'Univers comprend un nombre immense de branches vides, alors qu'il existe une seule branche non vide qui soit capable d'influencer les positions bohmiennes futures (composante effective de la fonction d'onde). Il devient alors tentant de postuler que seule la composante non vide du vecteur d'état est un champ de Bohm réel. Mais cela reviendrait à ré-introduire le postulat de réduction du vecteur d'état, alors que sa disparition était une motivation essentielle de la théorie ; de plus, cela pose des questions délicates concernant le moment exact où des ondes deviennent vides pour toujours.

mentateurs montre que l'observateur, qu'on avait espéré faire disparaître de la théorie, s'insère à nouveau dans la description des phénomènes physiques. En ce sens, on peut estimer que l'interprétation dBB ne remplit pas complètement son programme de simplification conceptuelle. De plus on remarque que la tension (sans contradiction) qui existe entre relativité et mécanique quantique standard trouve son image miroir dans la théorie dBB : c'est bien la relativité qui contraint à postuler une impossibilité fondamentale de manipuler les variables bohmiennes [568], ce qui assure ensuite que leur évolution non locale ne puisse pas être mise à profit pour une transmission instantanée de signaux.

Accepter ou refuser l'interprétation dBB reste donc une question de goût personnel. Il n'est pour finir pas surprenant que ses inventeurs, de Broglie et Bohm, aient eux-mêmes parfois changé de position sur le sujet au cours de leurs carrières. Un bon point de comparaison pourrait être la théorie des intégrales de chemin introduite par Feynman [52], qui est généralement considérée comme une branche de la mécanique quantique standard. La plupart des physiciens ne voient aucune contradiction entre ce point de vue et l'utilisation des méthodes standard de quantification hamiltonienne et de l'équation de Schrödinger standard (ou du point de vue de Heisenberg) ; il s'agit juste de vues complémentaires (en fait, les intégrales de chemin sont plus générales), chacune pouvant être utilisée en fonction de celle qui est la plus commode dans un contexte donné. De la même façon, la théorie dBB peut être vue comme encore un autre point de vue, complémentaire et non contradictoire.

### H-2. Mécanique de Nelson

Une autre formulation de la mécanique quantique faisant intervenir des variables supplémentaires a été introduite en 1952 par Fényes [620] et en 1966 par Nelson [621], avec une forme quelque peu différente. Au lieu de considérer l'équation de Schrödinger comme donnée et de lui adjoindre des positions comme le fait la théorie dBB, on cherche à établir cette équation à partir des propriétés de mouvements aléatoires se produisant à un niveau plus bas. On étudie les mouvements aléatoires de particules de masse $m$ sujettes à un mouvement brownien (processus de Wiener), avec un coefficient de diffusion $\hbar/m$ et aucune friction ; l'effet d'une force extérieure dérivant d'un potentiel est simplement pris en compte en appliquant la loi classique de Newton. On obtient alors des équations d'évolution couplées non linéaires pour deux variables classiques réelles[44], qu'il est possible de regrouper en une seule va-

[44]Les deux variables classiques réelles sont la "vitesse ordinaire" et la "vitesse osmotique", définies respectivement comme la demi-somme et la demi-différence de deux vitesses : les dérivées temporelles vers le futur et vers le passé de la position aléatoire (non différentiable) de la particule. Le changement de variables introduit $\Psi$, défini avec un module égal à la

riable complexe, $\Psi$. Un choix judicieux de changement de variable permet de produire un "miracle", de sorte qu'on obtient finalement une équation d'évolution linéaire pour $\Psi$. Ainsi, pour des valeurs appropriées des paramètres, l'hypothèse de l'existence d'un mouvement brownien universel conduit naturellement à l'équation de Schrödinger, indépendante ou dépendante du temps, en tenant compte de l'effet éventuel d'un champ électromagnétique extérieur.

On peut considérer cette façon de faire comme une méthode de quantification de nature purement mathématique, sans conséquence physique particulière. Mais on peut également lui donner une portée plus fondamentale et attribuer une réalité physique à la position aléatoire ainsi calculée pour toutes les particules, ainsi qu'à ce mouvement brownien universel. On arrive alors à une autre interprétation de la mécanique quantique, qui rappelle par certains aspects la théorie de Bohm. Une différence avec cette théorie (et la théorie standard) est que l'évolution de la fonction d'onde n'est plus donnée par un postulat, mais déduite d'autres postulats que l'on considère comme plus fondamentaux, ceux décrivant un "mouvement brownien universel". Une autre différence est que le point de vue de Nelson utilise directement l'équation dynamique de Newton ; il est donc bien plus ancré dans la mécanique classique qu'une théorie où cette équation est modifiée. Cependant, comme en théorie de Bohm, il apparaît des trajectoires continues pour les particules, trajectoires qui ne sont pas directement accessibles à l'expérimentation. A nouveau, le formalisme est construit pour reproduire exactement les prédictions de la mécanique quantique standard, de sorte qu'une bonne partie de notre discussion sur la théorie de Bohm peut être transposée à la mécanique de Nelson. Pour une discussion des mélanges statistiques dans ce contexte, voir la Ref. [622].

Comme la théorie de De Broglie-Bohm, la mécanique de Nelson donne un rôle important aux équations hydrodynamiques de Madelung [566]. Il a cependant été remarqué [623] que ces équations ne sont pas suffisantes pour garantir un caractère univalué à la fonction d'onde lorsque cette dernière a des nœuds (points où elle s'annule) ; pour obtenir une valeur unique, on doit ajouter des conditions de circulation quantifiées autour des nœuds, en plus des équations locales d'évolution du fluide. En mécanique quantique stochastique, des contraintes additionnelles sont donc nécessaires pour assurer une compatibilité complète avec la mécanique quantique standard, ce qui complique cette interprétation d'un point de vue physique.

Les processus de Wiener sont également mis en œuvre dans de nombreux autres domaines de la physique – nous en avons vu un exemple dans le cadre des mesures continues (§ C-2-c). Ils fournissent en particulier le point de

racine carrée de la densité de probabilité de la position, et une phase dont le gradient est proportionnel à la vitesse ordinaire.

départ d'une méthode mathématique de quantification. C'est ainsi que la méthode de "quantification stochastique" a été utilisée en théorie quantique des champs [624, 625], en particulier par Parisi et Wu. Ces derniers ont proposé une méthode de quantification qui fait intervenir une variable de temps supplémentaire et une équation stochastique de Langevin, et qui permet des calculs perturbatifs indépendants de la jauge [626, 627].

## J. Interprétations modale et interactive

Les mots "interprétation modale de la mécanique quantique" sont utilisés pour désigner une classe d'interprétations [628, 629] introduites par Van Fraassen [630], qui attribuent elles aussi au système physique un plus grand nombre de propriétés que ne le fait la mécanique quantique standard, sans toutefois que la position des particules joue un rôle particulier comme en théorie de Bohm. Ce que l'on ajoute à la description quantique standard est en fait un vecteur d'état supplémentaire, donc un objet parfaitement semblable à ce qui existe déja dans le formalisme standard. Il en résulte alors que, dans ces interprétations, un système physique peut avoir une valeur parfaitement définie pour une observable donnée même si son vecteur d'état n'est pas un vecteur propre de l'observable en question. Cependant, puisque la variable supplémentaire est un vecteur d'état, il en résulte automatiquement que les propriétés additionnelles sont suffisamment restreintes pour éviter de flagrantes contradictions ou incohérences avec la mécanique quantique standard. D'un autre côté, elles sont suffisamment riches pour conduire à des événements macroscopiques bien définis et des résultats uniques de mesures ; le postulat de réduction du vecteur d'état d'ondes n'a plus son utilité dans le cadre de ces interprétations, et l'on peut donc s'en passer.

L'idée générale commune à toutes cette famille d'interprétations est d'associer deux états à un système physique quelconque :

(i) un "état dynamique", qui n'est autre que l'état quantique habituel (ou opérateur densité) de la mécanique quantique standard. Cet état décrit l'évolution du système qui, pour un système isolé, est donnée par l'équation de Schrödinger. Dans l'interprétation modale, l'état dynamique ne subit jamais de réduction du vecteur d'état.

(ii) un "état physique" (en anglais, "value state"), qui représente les propriétés physiques du système à tout instant.

Considérons un système $S$ qui appartient à un système plus grand $T$ que nous supposons isolé pour simplifier. Voyons maintenant comment l'état dynamique et l'état physique décrivant $S$ peuvent différer si l'état dynamique de $S$ (opérateur densité obtenu par trace partielle) n'est pas un projecteur sur un état pur (au moins deux de ses valeurs propres ne sont pas nulles). Diverses possibilités ont été proposées pour définir l'état physique. Van Fraassen [630] a initialement suggéré des règles relativement générales, en suppo-

sant que l'état physique pouvait être n'importe quel état apparaissant dans la décomposition de l'état dynamique (il peut être n'importe quelle combinaison linéaire des états propres de valeur propre non nulle de l'opérateur densité partiel $\rho_S$ définissant l'état dynamique de $S$). Cette définition reste alors relativement peu précise. D'autres auteurs ont proposé de se limiter à la décomposition bi-orthonormale (décomposition de Schmidt, § B-2 du Chapitre VII) pour écrire l'état intriqué du système complet $T$ sous la forme :

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n \ |\varphi_n\rangle \otimes \left|\Phi'_n\right\rangle \tag{XI-35}$$

où les $|\varphi_n\rangle$ sont normés et mutuellement orthogonaux ainsi que les $|\Phi'_n\rangle$. Les $|\varphi_n\rangle$ donnent alors les états physiques possibles pour décrire le système $S$. Bien sûr, si tous les $c_n$ sont nuls sauf un, le système $S$ est déjà dans un état pur dans le cadre de la mécanique quantique standard, et cet énoncé n'apporte rien de nouveau. Mais l'interprétation modale postule que, même lorsque plusieurs des $c_n$ ne sont pas nuls, le système $S$ possède toutes les propriétés physiques associées à un seul $|\varphi_n\rangle$. Ce postulat reste fondamentalement non déterministe : la seule prévision possible est que le système $S$ a une probabilité $|c_n|^2$ d'être dans l'état $|\varphi_n\rangle$, ce qui reconstruit la règle de Born (à ce stade, l'usage de l'état dynamique est donc inévitable). Mais, même s'il est impossible de prédire à l'avance quel état physique accessible sera atteint, lorsqu'il est atteint, toutes les propositions concernant $S$ qui seraient vraies en mécanique quantique standard si $S$ était dans l'état $|\varphi_n\rangle$ sont effectivement vraies. Ce point de vue, où l'état dynamique ne détermine pas d'une façon unique l'état physique mais ne fournit que des valeurs possibles de cet état, est appelé "modal" parce qu'il conduit à une logique modale de propositions quantiques (§ D-1).

Le résultat final est que l'état physique de $S$ peut en général contenir plus d'information sur les propriétés physiques de $S$ que son état dynamique. Une limite générale est toutefois imposée sur la quantité d'information supplémentaire en question : l'ensemble des propriétés physiques qui résultent de cette description plus précise ne peut excéder le maximum contenu dans une description standard par un vecteur d'état quelconque. En d'autres termes, on peut parfaitement attribuer à $S$ un état pur même s'il est intriqué avec un autre système quantique (donc même si $S$ n'est pas décrit par un état pur en mécanique quantique standard), mais il n'est pas possible d'aller au-delà pour obtenir une description encore plus précise. En conséquence, on ne peut jamais attribuer simultanément des valeurs parfaitement définies à des grandeurs physiques correspondant à des opérateurs qui ne commutent pas, position et impulsion par exemple (contrairement à la mécanique bohmienne, où une particule possède une position et une vitesse parfaitement précises à tout instant). On arrive alors à une description avec deux vecteurs d'état qui rappelle un peu la théorie de Bohm-Bub de la mesure [7], sur laquelle nous

revenons dans le § suivant.

Considérons un processus de mesure sur un système $S$ avec un appareil de mesure $M$. Pendant l'étape initiale d'interaction entre $S$ et $M$, les deux systèmes s'intriquent. Ce processus est suffisant pour introduire un état physique pour $S$ qui est différent de celui de la description standard (avec un opérateur densité). A partir de ce moment, l'interprétation assure que les deux sous-systèmes ont toutes les propriétés nécessaires à l'émergence d'un résultat unique pour la mesure (unicité macroscopique).

Ce programme de recherche a été ensuite prolongé par Kochen [631], en mettant plus l'accent sur le caractère relationnel des propriétés des systèmes : il considère que les états physiques de $S$ ne décrivent pas des propriétés de $S$ seul, mais des propriétés en relation avec les systèmes avec lesquels il est intriqué, dont les appareils de mesure. Dieks [632] introduit un point de vue différent où les systèmes ont des propriétés intrinsèques, et discute dans quelles conditions peuvent être compris les processus de mesure et l'existence d'une unicité macroscopique dans le cadre de l'interprétation modale. Il fait remarquer que cette interprétation est réaliste, en ce sens qu'elle attribue des valeurs bien définies à toute une série de grandeurs concernant le système physique ("beables" ou "existents"), et non pas seulement à des résultats de mesure comme le fait la théorie standard.

Healey [633] a proposé une "interprétation interactive" qui est similaire à une interprétation modale. Il propose de distinguer entre :

(i) un "état quantique" du système, qui n'est autre que l'état habituel en mécanique quantique standard ;

(ii) un "état dynamique" du système, qui contient l'information sur toutes ses propriétés dynamiques à l'instant considéré. "L'état dynamique d'un système à un instant quelconque peut être identifié à un ensemble de valeurs de vérité attribuées à toutes les phrases énonçant une propriété quantique dynamique à ce système à cet instant". Cependant, l'état dynamique ne suffit pas en général pour déterminer le comportement futur du système, ou même les probabilités des comportements futurs.

La fonction de l'état quantique est précisément d'engendrer des probabilités. Cet état caractérise la disposition probabiliste à un moment donné, dont une partie se manifestera dans des interactions futures, mais ne suffit pas à déterminer son comportement futur. Chaque système quantique possède toujours un état dynamique, mais pas nécessairement un état quantique (s'il est intriqué avec un autre système). On notera l'inversion de vocabulaire : l'état dynamique de l'interprétation interactive est l'analogue de l'état physique (value state) de l'interprétation modale, alors que l'état dynamique de cette interprétation est l'analogue de l'état quantique de l'interprétation interactive.

Le rôle de l'environnement est clairement essentiel dans toutes ces inter-

prétations[45]. Pour un appareil de mesure, le rôle des "états pointeurs" (§ A-2) est important. Bacciagaluppi [634], Dickson [635], Berkovitz et Hemmo [636], et d'autres ont également contribué à cette interprétation, en discutant par exemple le rôle des mesures imparfaites, le lien avec le théorème BKS (§ D du Chapitre VI), etc. Cette interprétation présente toutefois un certain nombre de difficultés, en particulier pour les modèles de décohérence attribuant une position unique aux "pointeurs" [637] lorsque ces modèles deviennent continus [634], de l'invariance de Lorentz et la contextualité [636, 638], et enfin dans l'application à la théorie quantique des champs relativiste [639].

## K. Dynamique de Schrödinger modifiée

Une autre façon de résoudre le problème de coexistence entre les deux postulats d'évolution du vecteur d'état en mécanique quantique est de les fondre en un seul en modifiant l'équation de Schrödinger, de façon qu'elle présente toutes les caractéristiques nécessaires pour décrire une opération de mesure. On suppose alors que l'équation d'évolution du vecteur d'état (ou de la fonction d'onde) contient, en plus du terme hamiltonien habituel, un ou plusieurs termes nouveaux (qui peuvent être non linéaires et/ou stochastiques) ; ces derniers introduisent l'équivalent de la réduction du vecteur d'état lorsque c'est nécessaire [7, 13, 15, 472, 640]. Les objectifs généraux à atteindre dans cette approche sont les suivants :

(i) Unicité de la réalité macroscopique : la nouvelle dynamique doit être construite de telle façon que les superpositions d'états macroscopiquement distincts ne soient jamais atteintes, en d'autres termes que les chats de Schrödinger (tels que définis dans l'article original) ne se produisent jamais. En particulier, toutes les mesures effectuées avec des appareillages macroscopiques doivent avoir un résultat unique et bien défini.

(ii) Compatibilité avec la mécanique quantique standard au niveau macroscopique : les probabilités des différents résultats de mesure doivent reproduire la règle de Born habituelle pour les probabilités.

(iii) Compatibilité avec la mécanique quantique standard au niveau microscopique : la théorie doit rester compatible avec la quantité énorme de résultats expérimentaux que la mécanique quantique a permis de prédire avec une excellente précision pour divers systèmes microscopiques.

La condition (i) implique que, pour des superpositions macroscopiques mettant en jeu par exemple les aiguilles des cadrans d'appareils de mesure, le nouveau terme sélectionne une seule branche de la superposition et annule toutes les autres. Si c'est le cas, le postulat de réduction du vecteur d'état

[45] Bien sûr, en soi l'idée d'introduire une correspondance entre les propriétés physiques d'un système physique et son environnement n'est pas unique à cette interprétation ; elle fait partie également, par exemple, des points de vue pragmatiques discutés aux §§ A-1 et A-2.

devient alors sans objet ; une loi d'évolution unique suffit, et l'on peut dire que macro- et micro-dynamiques sont unifiées. La condition (ii) ajoute que la sélection d'une seule branche doit être (ou sembler être) aléatoire d'une façon qui reproduise exactement les règles de probabilité de la mécanique quantique standard, ainsi que l'effet de la réduction du vecteur d'état. La condition (iii) implique que les conséquences de la modification de l'équation de Schrödinger doivent rester extrêmement petites dans toutes les situations ne mettant en jeu que des objets microscopiques (atomes, molécules, etc.) ; ceci assure immédiatement la préservation de l'immense capital de prédictions excellentes fournies par la mécanique quantique dans ce domaine.

Ainsi, deux extrêmes doivent être évités : ou bien trop perturber l'équation de Schrödinger, et faire disparaître les effets d'interférence dans des cas où l'on souhaite les conserver (par exemple une recombinaison de deux jets atomiques à la sortie d'un aimant de Stern et Gerlach lorsqu'aucune décohérence ne s'est produite) ; ou alors trop peu, et ne plus assurer la totale disparition d'incertitude macroscopique (chats de Schrödinger). Le nouveau terme doit devenir important au moment où (et pas avant) un système microscopique s'est corrélé à un environnement macroscopique, ce qui assure qu'une décohérence efficace s'est déjà produite ; de toute façon, dans le cadre de la théorie standard, la restauration d'effets d'interférence est déjà devenue impossible. Le nouveau terme reproduit alors bien les effets du postulat de réduction du paquet d'ondes, qui n'est ainsi plus un postulat indépendant, mais juste une conséquence de l'évolution tout à fait "normale" de la fonction d'onde.

Inclure de cette façon l'émergence de l'unicité macroscopique dès l'équation dynamique fondamentale de la théorie résout bien des difficultés conceptuelles de la mécanique quantique. Il n'est plus nécessaire de préciser une frontière entre les domaines d'application de deux postulats, puisque les processus de mesure deviennent des processus d'interaction tout à fait ordinaires entre deux systèmes physiques ; l'observation ne joue aucun rôle particulier, ce qui supprime toute nécessité de traiter les mesures différemment de l'évolution "normale". De plus, il devient alors parfaitement possible de considérer que le vecteur d'état décrit directement la réalité physique, au lieu de n'y voir qu'un simple outil de calcul. La théorie contient donc tous les éléments nécessaires pour expliquer [14] "pourquoi les événements se produisent" ! L'utilité d'introduire en physique quantique la notion d'événement, ainsi que la "transmutation des possibilités en faits", est discutée dans les Refs. [641, 642].

Pour véritablement définir une théorie, les conditions générales ci-dessus ne sont évidemment pas suffisantes ; il faut préciser de quelle façon exacte on choisit de modifier l'équation de Schrödinger, sans autre guide que les "lignes jaunes à ne pas dépasser" (ii) et (iii). Il n'est donc pas étonnant que plusieurs versions des théories à dynamique de Schrödinger modifiée aient été proposées.

### K-1. Evolution des idées

Deux approches sont possibles : on peut construire des versions de théories à dynamique de Schrödinger modifiée, soit sans introduire des variables supplémentaires, soit en procédant à cette introduction ; les deux méthodes ont été mises en œuvre.

#### K-1-a. Premiers travaux

En 1966, Bohm et Bub [7] ont proposé une théorie de la mesure contenant un mécanisme conduisant à la réduction du vecteur d'état. Cette théorie appartient à la seconde catégorie (avec variables supplémentaires), puisque ces auteurs introduisent dans leur théorie les variables supplémentaires de Wiener et Siegel [12], qui sont contenues dans un "vecteur dual". Ce dernier est un objet mathématique très semblable au vecteur d'état $\mid \Psi >$, mais qui obéit à une équation de mouvement totalement différente – en fait les deux vecteurs évoluent sous l'effet d'équations couplées. Les probabilités des résultats de mesure sont simplement des conséquences d'une distribution initiale aléatoire du vecteur dual. Pour certaines distributions "normales" de ces nouvelles variables, les prédictions de la mécanique quantique standard sont retrouvées ; mais il est également possible de supposer l'existence de distributions "sans dispersion" qui conduisent à des prédictions plus précises, donc non standard. Il en résulte que cette théorie conduit à une statistique plus riche que celle de la mécanique quantique habituelle. Les auteurs discutent dans quelles circonstances les effets des nouvelles variables, qui n'ont pas été observées pour le moment, pourraient être détectées dans le futur.

En 1976, Pearle [13] a introduit une version de la théorie qui, elle, appartient à la première catégorie, celle sans variables supplémentaires. On considère le vecteur d'état du système comprenant à la fois le système mesuré et l'appareil de mesure, juste après l'interaction ; ils sont alors fortement intriqués dans une superposition cohérente d'états macroscopiquement différents (§ A du Chapitre IX). L'idée est de supposer que le résultat de la mesure est déterminé par les phases relatives des diverses composantes du vecteur d'état ; comme ces phases ne peuvent pas être contrôlées expérimentalement avec une parfaite précision, le résultat final de la mesure apparaît alors comme aléatoire. Ce comportement est obtenu en ajoutant dans l'équation d'évolution du vecteur d'état un nouveau terme non linéaire, avec une constante de temps $\gamma$, qui réduit le vecteur d'état à l'une seule de ses composantes macroscopiques d'une façon qui dépend des phases initiales relatives. Dans ce point de vue, le caractère aléatoire du processus de mesure, postulé en mécanique quantique standard comme fondamental, n'est qu'une conséquence du fait que les conditions expérimentales ne sont jamais parfaitement reproductibles. Le formalisme habituel de la mécanique quantique est relativement peu modifié, le terme nouveau dans l'équation d'évolution devant

satisfaire à un certain nombre de conditions dont l'auteur fait la liste suivante :

– propriété 1 : un résultat unique est prédit par la nouvelle équation d'évolution, ce qui veut dire que, parmi une série d'amplitudes de probabilités, toutes s'annulent après l'interaction, sauf l'une d'entre elles qui prend un module unité – c'est l'équivalent de la propriété (i) ci-dessus ;

– propriété 2 : si l'expérience est répétée un grand nombre de fois, la sélection d'une amplitude de probabilité non nulle unique se fait d'une façon qui est cohérente avec les prédictions de la mécanique quantique concernant les probabilités – l'équivalent de la propriété (ii) de la page 396.

Dans les deux théories ci-dessus, la réduction du vecteur d'état est un processus dynamique qui, comme tout processus dynamique, dure un certain temps fini. Nous verrons plus bas des exemples de théories (GRW) où ce n'est pas le cas et où la réduction est instantanée.

En 1979, Pearle a proposé une approche différente [13], cette fois en introduisant un terme stochastique dans l'équation de Schrödinger ; elle devient alors une équation stochastique différentielle contenant un opérateur fluctuant, qui agit sur le vecteur d'état de façon non linéaire. La présence de ce nouvel opérateur fait qu'on peut ranger cette théorie dans la catégorie de celles à variables supplémentaires. Par comparaison avec la version de 1976, la sélection du résultat unique de la mesure n'est plus due à des phases mal contrôlées, mais aux fluctuations de l'opérateur. Le mécanisme mathématique par lequel la nouvelle équation réduit le vecteur d'état à une seule composante est décrit par une équation de Fokker-Planck ; il est analogue à une marche aléatoire entre des conditions aux limites de barrières totalement absorbantes – les propriétés statistiques correspondantes sont parfois décrites comme celles du "jeu de la ruine du parieur" ("the gambler's ruin"). Cette version de la théorie de Pearle est plus générale que la précédente, mais elle continue à souffrir d'un certain nombre de difficultés dont il dresse la liste dans un article de revue [643], parmi lesquelles le "problème de la base privilégiée", le "problème de l'interaction", le "problème du déclenchement". Dans la théorie de Bohm-Bub, le temps de réduction complète était infini mais, ici, il a maintenant une durée finie du fait des propriétés statistiques du "jeu de la ruine du parieur" [644].

#### K-1-b. Localisation spontanée par sauts ("hits")

En 1986 Ghirardi, Rimini et Weber (GRW) ont introduit une nouvelle version de la théorie fournissant une "théorie unifiée des systèmes microscopiques et macroscopiques" [15]. Ils arrivent à ce résultat en ajoutant à l'équation de Schrödinger habituelle des processus d'évolution qu'ils nomment "localisation spontanée" ("spontaneous localization", ou SL en anglais) ; ces derniers changent brusquement le vecteur d'état en localisant sa fonction d'onde dans

l'espace – comme si les positions des particules étaient mesurées à des temps aléatoires, et avec une précision imparfaite (la localisation garde une certaine imprécision). Un certain nombre des propriétés de cette théorie rappellent l'effet des observations et mesures continues en mécanique quantique standard [645, 646] (§ C-2), ou celles de mesures approximatives. La localisation spontanée se produit à des instants aléatoires avec une constante de temps qui est ajustée de façon que, pour des systèmes macroscopiques, toute superposition d'états de localisations spatiales éloignées soit très rapidement détruite – *cf.* condition (i) ci-dessus ; mais ceci n'est vrai que pour des systèmes macroscopiques, et pas pour des systèmes microscopiques – *cf.* condition (ii) ci-dessus. Un peu auparavant (1984), Gisin avait également introduit une dynamique modifiée de Schrödinger avec des équations semblables réalisant le postulat de projection [472], mais dans ce cas le temps de réduction du vecteur d'état est infini.

Une propriété remarquable de l'approche GRW est qu'elle résout le problème de la "base privilégiée" (la base correspond nécessairement à des états localisés en position) ainsi que le problème du "déclenchement". Dans ce modèle, pour une réalisation unique d'un système quantique (par opposition avec l'ensemble d'un très grand nombre de réalisations[46] du même système), les processus de localisation sont soudains ; on les appelle parfois en anglais "hitting processes". Ceci les rend bien sûr totalement différents de ce qui peut se produire dans une dynamique de Schrödinger habituelle. Considérons par exemple une particule unique décrite par un vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ pouvant subir un processus de localisation spontanée. Dans un tel processus, $|\Psi(t)\rangle$ est soudainement remplacé par le ket $|\Psi'(t)\rangle$ donné par :

$$\left|\Psi'(t)\right\rangle = \frac{F_j \left|\Psi(t)\right\rangle}{\left\langle\Psi(t)\right| \left(F_j\right)^2 \left|\Psi(t)\right\rangle} \tag{XI-36}$$

(le numérateur de cette expression assure la conservation de la norme du vecteur d'état) où $F_i$ est un opérateur hermitique diagonal en représentation position. GRW supposent que $F_j$ localise la particule autour d'un point de l'espace $\mathbf{r}_j$ avec une précision caractérisée par un paramètre arbitraire $\alpha$ de la théorie ($\alpha^{-1/2}$ est une longueur) :

$$F_j = c\, e^{-\alpha(\mathbf{R}-\mathbf{r}_j)^2/2} \tag{XI-37}$$

Dans cette égalité, $\mathbf{R}$ est l'opérateur de position de la particule et $c$ est un coefficient de normalisation réel.

[46] Pour un ensemble de systèmes, les discontinuités sont moyennées, et l'on retrouve des équations d'évolution continues pour les opérateurs densité. Comme la plus grande partie de la discussion de la Ref. [15] est donnée en termes d'opérateurs ou de matrices densité, et d'apparition de mélanges statistiques (décohérence), on peut en retirer l'impression que les réalisations uniques ne sont pas prises en compte dans ce travail, mais en réalité ce n'est pas le cas : les "hitting processes" sont bien introduits à un niveau fondamental.

On introduit ensuite une série d'opérateurs $F_j$ satisfaisant la condition :

$$\sum_j (F_j)^2 = 1 \tag{XI-38}$$

Pour les opérateurs $F_j$ définis en (XI-37), il est naturel de supposer que l'indice $j$ définit une variable continue de position $\mathbf{r}_j$ ; la somme sur $j$ devient alors une intégrale sur $d^3r_j$ et il est facile de vérifier que :

$$c \int d^3r_j \; e^{-\alpha(\mathbf{R}-\mathbf{r}_j)^2} \, |\mathbf{r}\rangle = c \int d^3r_j \; e^{-\alpha(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)^2} \, |\mathbf{r}\rangle = c \left[\frac{\pi}{\alpha}\right]^{3/2} |\mathbf{r}\rangle \tag{XI-39}$$

La condition (XI-38) est donc satisfaite si :

$$c = \left[\frac{\alpha}{\pi}\right]^{3/2} \tag{XI-40}$$

Les $\mathbf{r}_j$ peuvent également définir des positions discrètes aux nœuds d'un réseau dont la cellule unité a une taille très petite devant $1/\sqrt{\alpha}$ ; la valeur de $c$ dépend alors de cette taille. Dans ce qui suit, par commodité nous continuons à écrire des sommes discrètes sur $j$, mais la transposition à un indice continu et à des intégrales ne pose pas de problème particulier.

Supposons maintenant que tous les processus de localisation autour des divers points $\mathbf{r}_j$ agissent constamment en parallèle pour localiser aléatoirement la particule, chacun avec une probabilité par unité de temps donnée par :

$$\gamma \; \langle \Psi(t)| \, (F_j)^2 \, |\Psi(t)\rangle \tag{XI-41}$$

où $\gamma$ est un autre paramètre libre de la théorie (un taux par unité de temps, l'inverse d'un temps). La condition (XI-38) assure que la probabilité totale pour une localisation quelconque soit indépendante de l'état initial $|\Psi(t)\rangle$. On ajoute ensuite l'effet de ces processus aléatoires de localisation à l'évolution habituelle donnée par l'équation de Schrödinger. Le résultat est alors une théorie où, pour chaque réalisation possible des localisations, le vecteur d'état suit une "trajectoire" unique et bien définie, mais évidemment différente pour chaque réalisation.

Considérons le premier processus de localisation. Si $\Psi(\mathbf{r}, t)$ est la fonction d'onde associée à l'état $|\Psi(t)\rangle$, d'après (XI-37) la probabilité que le processus d'indice $j$ a de se réaliser est :

$$\mathcal{P}_j = \gamma c^2 \int d^3r \; e^{-\alpha(\mathbf{R}-\mathbf{r}_j)^2} \; |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \tag{XI-42}$$

Les processus de localisation ont donc plus de chances de se produire dans les régions de l'espace où la densité de présence $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ est grande ; inversement, les localisations spontanées sont très peu probables dans les régions

de l'espace où le module de la fonction d'onde est très faible. Quel que soit celui des $\mathbf{r}_j$ qui est sélectionné par le premier processus de localisation, il a pour effet de multiplier la fonction d'onde par $e^{-\alpha(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)^2/2}$, ce qui tend à la restreindre dans un voisinage du point $\mathbf{r}_j$ avec une extension spatiale $\alpha^{-1/2}$.

Commençons par supposer pour simplifier que la fonction d'onde n'a pas le temps d'évoluer entre cette localisation et la suivante. A cause de l'effet sur la fonction d'onde de la première localisation, la seconde se produit avec une grande probabilité autour d'un point situé dans le voisinage proche de $\mathbf{r}_j$, la troisième dans le voisinage des deux points précédents, et ainsi de suite : après quelques processus de localisation, la fonction d'onde est très efficacement restreinte autour d'un point $\mathbf{r}$ qui est, certes aléatoire, mais bien défini. C'est le processus spontané de réduction spatiale de la fonction d'onde. Si maintenant une évolution de la fonction d'onde a lieu entre les processus de localisation, les points autour desquels ils se produisent reconstituent de façon approchée la trajectoire de la particule, comme une trace dans une chambre de Wilson.

Ce schéma peut immédiatement être généralisé à un système constitué de $N$ particules ; on suppose que toutes les particules subissent en parallèle des processus de localisation de façon indépendante. Les opérateurs $F_j$ sont alors remplacés par des opérateurs hermitiques $F_j^i$ agissant sur la $i$-ème particule pour la localiser autour du point $\mathbf{r}_j$ ; il faut maintenant sommer leurs effets sur les indices $i$ et $j$ dans l'équation de Schrödinger du système, mais à nouveau pour chaque réalisation l'on obtient une trajectoire unique pour le vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ décrivant le système physique. L'effet des processus aléatoires est de localiser spatialement la fonction d'onde autour d'un seul point de l'espace des configurations à $3N$ dimensions, avec une extension linéaire $\alpha^{-1/2}$ dans chaque direction.

Prenons maintenant un ensemble de réalisations du même système physique, décrit par un opérateur densité $\rho$. La moyenne sur toutes les réalisations des localisations donne une évolution de $\rho$ qui s'écrit :

$$i\hbar\frac{d\rho(t)}{dt} = [H(t), \rho(t)] + \gamma \left[ \sum_j F_j \ \rho(t) \ F_j \ - \rho \right] \qquad \text{(XI-43)}$$

Dans cette équation, le premier terme contenant l'hamiltonien $H(t)$ correspond à l'évolution habituelle de Schrödinger-von Neumann. Le second est nouveau et décrit l'effet moyen de processus stochastiques, qui remplacent avec une probabilité par unité de temps $\gamma$ l'opérateur densité $\rho$ par une nouvelle valeur $F_i\rho(t)F_i$.

En mécanique quantique, la localisation d'une particule entraîne automatiquement un changement de son énergie cinétique ; il s'ensuit que les hitting processes "chauffent" la particule, de sorte qu'une étude du rôle de la conservation de l'énergie devient nécessaire. En pratique, ceci signifie qu'il

faut ajuster les constantes de temps $\gamma$ et de localisation spatiale $\alpha$, de façon à éviter la prédiction d'effets de chauffage spontané qui n'ont jamais été observés expérimentalement. GRW proposent des choix de ces paramètres ($\gamma = 10^{-16}$ s$^{-1}$ et $\alpha^{-1/2} = 10^{-7}$ m) tels que la rapidité d'échauffement d'une mole de gaz parfait soit de l'ordre de $10^{-15}$ K par an, donc effectivement suffisamment faible pour rester compatible avec l'absence de mise en évidence expérimentale d'un tel échauffement spontané.

Benatti et al. ont montré que l'effet principal du nouveau terme est effectivement de produire une réduction du vecteur d'état [647]. Une étude plus générale des conséquences de l'introduction de termes non hamiltoniens dans l'évolution du vecteur d'état a été donnée dans [648], avec en particulier une discussion des effets éventuels d'une localisation combinée de la position et de l'impulsion ; la conclusion de cette étude est que, si l'on veut éviter des modifications inacceptables des prédictions concernant les processus microscopiques, il convient de se limiter à des localisations de la seule position. Un problème qui subsiste toutefois dans l'approche GRW est qu'elle suppose des localisations indépendantes des particules individuelles, de sorte qu'elle ne conserve pas la symétrie requise par la mécanique quantique pour des particules identiques, bosons ou fermions.

Une approche générale a été proposée pour construire des modèles de localisation spontanée [649] : "Event–Enhanced Quantum Theory" (EEQT), où le système quantique étudié est couplé à un système classique C dont l'état est défini par un paramètre classique $\lambda$. Le formalisme quantique standard est généralisé par un remplacement de l'espace des états habituel $\mathcal{E}$ par une famille d'espaces $\mathcal{E}_\lambda$ dépendant de $\lambda$ ; de même, tous les opérateurs quantiques acquièrent un indice supplémentaire $\lambda$. Dans la version la plus simple, $\lambda$ ne peut prendre que deux valeurs, correspondant par exemple aux deux positions possibles de l'aiguille d'un appareil de mesure ; mais $\lambda$ peut également prendre une série de valeurs discrètes quelconques, ou même être un vecteur avec un grand nombre de composantes prenant de telles valeurs. La valeur de $\lambda$ détermine l'évolution du vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ de S, qui satisfait une équation contenant des termes non hermitiques $\Lambda_\lambda$ dépendant de $\lambda$, en plus de l'hamiltonien habituel. La valeur de $\lambda$ change de façon aléatoire à des instants déterminés par la valeur moyenne de $\Lambda_\lambda$ dans l'état $|\Psi(t)\rangle$, de sorte que l'évolution de $|\Psi(t)\rangle$ dépend de $\lambda$ et réciproquement. Ce que les auteurs appellent un événement est un changement de la valeur de $\lambda$. Ce modèle est générique et contient la théorie GRW comme un cas particulier. Cependant, dans la mesure où $\lambda$ est considéré comme décrivant un système physique classique, ce modèle ré-introduit la notion bohrienne de frontière entre deux mondes, classique et quantique, alors qu'une des motivations des théories à dynamique de Schrödinger modifiée est précisément de supprimer cette frontière.

#### K-1-c. Localisation spontanée continue

En 1989, Pearle a montré [650] qu'il est possible de résoudre ce problème et de se débarrasser du caractère discontinu des "hitting processes", tout en préservant les caractéristiques utiles du modèle GRW. Ce résultat est obtenu en ajoutant des termes de "localisation spontanée continue" – en anglais "continuous spontaneous localization" ou CSL – à l'hamiltonien habituel de l'évolution de Schrödinger. Ces termes correspondent à des processus aléatoires de Markov qui dépendent de fonctions du temps aléatoires $w_j(t)$ avec un spectre large (bruit blanc), et contiennent une constante de temps $\gamma$ ainsi qu'une série d'opérateurs hermitiques $A_j$ commutant entre eux. Pour un choix approprié de ces opérateurs, une compatibilité complète avec la notion standard de particules identiques est obtenue. Un autre avantage de ce point de vue est qu'il introduit une modification moins radicale du formalisme de la théorie standard, puisque le vecteur d'état évolue toujours selon une équation différentielle continue. Cependant, l'équation inclut maintenant des fonctions aléatoires du temps (équation stochastique différentielle de Itô) ainsi que des opérateurs anti-hermitiques, ce qui fait que la norme du vecteur d'état n'est plus conservée.

Cette non-conservation de la norme joue en fait un rôle essentiel dans la théorie, car les propriétés statistiques des fonctions aléatoires sont définies précisément en fonction de cette norme : on postule (loi CSL des probabilités) que la probabilité[47] de réaliser une dépendance temporelle $w_j(t)$ qui conduit à une valeur donnée de $|\Psi(t)\rangle$ n'est autre que $\langle\Psi(t)\,|\Psi(t)\rangle^2$. C'est le moment où le caractère non linéaire de la théorie devient évident : l'évolution de $|\Psi(t)\rangle$ dépend de fonctions $w_j(t)$ qui, à leur tour, ont des propriétés statistiques qui suivent constamment la norme de $|\Psi(t)\rangle$ lui-même. Un tel postulat favorise fortement les réalisations des fonctions aléatoires qui donnent une grande norme au vecteur d'état, tout en réduisant les effets de toutes les autres donnant des valeurs exponentiellement petites à la norme (même si mathématiquement elles correspondent à un nombre beaucoup plus grand de possibilités). On peut alors vérifier que ce choix de propriétés statistiques reste compatible avec une évolution indépendante de chaque réalisation du vecteur d'état. Une équation de Fokker-Planck peut alors être obtenue pour la dépendance temporelle des densités de probabilités.

Pour comprendre le mécanisme de réduction dans cette théorie (décrit plus en détail dans l'Appendice J), commençons par prendre le cas simple où un seul opérateur $A$ est introduit (valeurs propres $a_n$). Nous supposons que cet opérateur est associé à une mesure quantique, comme dans la situation considérée au § A du Chapitre IX ; juste après la fin de l'interaction entre

[47] Cette hypothèse est un peu semblable au fait de postuler (XI-41). Plusieurs réalisations des fonctions aléatoires $w_j(t)$ peuvent conduire à la même valeur de $|\Psi(t)\rangle$ à l'instant $t$ ; le carré de la norme de $|\Psi(t)\rangle$ donne alors la probabilité associée à chacune de ces réalisations.

système mesuré et appareil de mesure, tous deux sont intriqués et décrits par l'état (IX-7). Sous l'effet des termes anti-hermitiens contrôlés par les fonctions aléatoires $w_j(t)$, le module des amplitudes de probabilité $c_n(t)$ fluctue dans le temps, au lieu de rester constant. Parmi le très grand nombre de $w_j(t)$ qui sont mathématiquement possibles, d'après la loi CSL des probabilités qui a été postulée, seule une très petite proportion peut se produire avec une probabilité non négligeable, la proportion des réalisations qui conduit à une grande valeur de la somme sur $n$ de tous les $|c_n(t)|^2$. Or il se trouve que, parmi toutes ces fonctions très particulières, les plus efficaces pour donner une grande norme au vecteur d'état sont celles qui donnent une grande valeur à l'un seul des $|c_n(t)|^2$. En effet, les fluctuations de $w_j(t)$ peuvent favoriser une des valeurs de $n$, mais pas plusieurs à la fois ; si les fluctuations des $w_j(t)$ favorisent successivement deux (ou plus) des valeurs de $n$, elles conduisent à une dilution de l'effet de préservation de la norme et, au bout du compte, à une valeur exponentiellement plus faible de la norme totale. Nous obtenons ainsi un processus qui sélectionne un seul résultat de mesure, quelque peu semblable au "jeu de la ruine du parieur" de [14]. Les fluctuations des fonctions aléatoires brisent la symétrie entre tous les résultats possibles de mesure, de sorte que cette théorie reproduit la réduction du vecteur d'état.

En théorie CSL, l'opérateur $A$ n'est pas associé à un processus particulier de mesure – sinon l'on perdrait immédiatement une des motivations de la théorie (ne donner aucun rôle particulier aux opérations de mesure). On préfère supposer que $A$ est remplacé par une série d'opérateurs de localisation des positions $A_j$, agissant sur toutes les particules du système, et les situant à toutes les positions possibles de l'espace ($j$ devient alors un indice caractérisant des positions spatiales, et peut ainsi être continu). Comme en théorie GRW, une localisation parfaite poserait problème, puisqu'elle transférerait une énergie infinie aux particules, ce qui est physiquement inacceptable. On postule donc que la localisation réalisée par chaque $A_j$ est imparfaite, et caractérisée par une imprécision spatiale $\alpha^{-1/2}$ ; tous les $A_j$ commutent mutuellement. En dépit de ces changements concernant la définition des opérateurs, l'essence du processus de localisation reste presque la même que celle qui a été discutée plus haut, et conduit à une sélection qui finit toujours par localiser les particules dans une seule région aléatoire de l'espace – c'est une réduction spatiale du vecteur d'état. Pour de petits systèmes quantiques (particule unique, atomes, molécules, etc.), la probabilité pour qu'un effet de réduction du vecteur d'état se produise reste extrêmement faible pendant des temps très longs ($\gamma$ est très petit). Pour des systèmes macroscopiques dans des superpositions quantiques de deux états distincts spatialement, comme toutes les particules sont simultanément sujettes au processus de localisation, et que la localisation d'une seule d'entre elles est suffisante pour détruire la coexistence des deux composantes, il devient très probable qu'une telle réduction apparaisse en un temps très court.

Les fonctions $w_j(t)$ sont considérées comme fondamentalement aléatoires ; comme les positions de la théorie de Bohm, elles ne peuvent pas être manipulées directement, mais contrairement à ces positions elles ne peuvent pas non plus être détectées directement (on pourrait donc les appeler "fonctions cachées" au lieu de "variables cachées"). Cependant, si l'on change à la main les paramètres extérieurs contrôlant l'hamiltonien (champ magnétique par exemple), le vecteur d'état est modifié, ce qui peut affecter indirectement les propriétés statistiques des $w_j(t)$.

En 1990, l'étude des processus de Markov et de la localisation spontanée continue pour des particules identiques fut reprise par Ghirardi, Pearle et Rimini [651]. Ils montrèrent que, pour un ensemble de systèmes, l'équation (XI-43) est remplacée par une "forme de Lindblad" (§ D-3 du Chapitre VII) conduisant à l'évolution temporelle :

$$i\hbar\frac{d\rho(t)}{dt} = [H(t), \rho(t)] + \frac{\gamma}{2}\sum_{j=1}^{N}\left[2A_j\rho A_j - (A_j)^2\,\rho(t) - \rho(t)\,(A_j)^2\right] \quad \text{(XI-44)}$$

où les $A_j$ sont des opérateurs hermitiques commutant entre eux (ils peuvent en principe être quelconques, mais ici l'on choisit des opérateurs de localisation de position). De façon générale, des processus de Markov discrets dans un espace de Hilbert peuvent toujours être ramenés, dans une limite appropriée, à une localisation continue spontanée. Effectivement, si l'on choisit dans (XI-44) des opérateurs tels que $A_j = F_j$, on retrouve (XI-43) compte tenu de (XI-38) ; ceci introduit une correspondance entre les modèles discrets (type GRW) et des théories du type CSL en ce qui concerne l'évolution moyenne des opérateurs densité. Inversement, les théories CSL ne demandent pas nécessairement que la somme des carrés des opérateurs soit 1 ; la forme la plus générale d'un opérateur de Lindblad ne peut pas être obtenue à partir d'une théorie à "hitting processes". Les théories CSL couvrent donc un domaine plus grand de possibilités, ce qui peut s'avérer utile dans l'élaboration de versions relativistes de la théorie (§ K-1-e), ou en théorie cosmologique [652].

Un problème qui subsiste cependant est qu'en théorie CSL, ici aussi, une réduction complète de la fonction d'onde ne se produit jamais en un temps fini. Même quand la plus grande partie de la fonction d'onde est concentrée dans une composante correspondant à un résultat unique dans une expérience, il reste toujours une minuscule composante sur les autres (même si elle est extrêmement petite et décroissante dans le temps). L'existence de cette composante n'est pas considérée comme posant un problème sérieux par les défenseurs de la théorie [653]. Cependant, Shimony a fait valoir [654] que, de son point de vue, il est philosophiquement peu justifié d'associer la réalité avec un seul état, tant que le système reste dans une superposition de cet état et d'un autre ; il considère que cela reste problématique même si le poids du premier est énorme en comparaison de celui du second. Le pro-

blème correspondant est souvent appelé le "problème des queues" (queue de la variation de la probabilité en fonction du temps) de la dynamique modifiée de Schrödinger ; voir [655] et par exemple [656] pour une proposition d'une solution à ce problème mettant en jeu une combinaison de dynamique de Schrödinger modifiée et des vitesses de Bohm, toutes deux stochastiques.

Une caractéristique importante commune à toutes ces théories est qu'elles contiennent de nouvelles constantes universelles. Ces dernières apparaissent dans la modification de la dynamique de Schrödinger, et sont ajustées pour satisfaire les conditions (i) à (iii) de § K. Par exemple, nous avons vu que la théorie GRW introduit une échelle de temps $\gamma^{-1}$ pour la probabilité par unité de temps avec laquelle la localisation spontanée se produit, ainsi qu'une échelle de longueur $\alpha^{-1/2}$ pour caractériser la précision de cette localisation. On pourrait voir ces quantités comme des paramètres auxiliaires introduits dans la théorie pour des raisons techniques. Elles jouent cependant un rôle conceptuel absolument essentiel, puisqu'elles définissent la frontière entre les mondes microscopique et macroscopique. Cette frontière, qui restait floue et mal définie dans l'interprétation standard, est maintenant introduite de façon parfaitement précise. Conceptuellement, leur rôle rappelle donc celui de la constante de Planck.

#### K-1-d. Liens avec la gravité

En 1989, partant également d'une étude des processus quantiques stochastiques ("quantum Wiener processes" [12]) comme modèles pour la réduction du vecteur d'état [640], ainsi que du traitement de mesures continues [657], Diosi a proposé une intéressante modification de la théorie GRW [658]. La nouvelle théorie continue à fournir une unification de la micro- et de la macro-dynamique, mais sans demander l'introduction d'aucun paramètre nouveau. L'idée générale est de remplacer les processus de localisation spontanée évoqués antérieurement par un processus de localisation stochastique de la masse, avec une intensité qui est proportionnelle à la constante universelle de gravitation $G$ de Newton ; c'est le seul paramètre qui apparaisse dans les nouveaux termes ajoutés à ceux de la dynamique habituelle de Schrödinger. Diosi introduit alors un traitement de la réduction de la fonction d'onde provenant d'une loi totalement générale de localisation de la densité, ce qui fournit l'unification recherchée, mais cette fois sans avoir à introduire de nouveau paramètre. On peut alors parler d'un mécanisme réellement universel pour la réduction !

Cependant, Ghirardi et al. [659] ont rapidement montré que cette approche séduisante introduit au passage des problèmes réellement sérieux à courtes distances, car des prédictions totalement irréalistes sont obtenues ; par exemple, les noyaux atomiques recevraient tellement d'énergie qu'ils ne pourraient plus rester dans leur niveau fondamental, mais seraient rapide-

ment excités (ou même dissociés). Ghirardi et al. ont proposé une modification de la théorie de Diosi qui résout ces problèmes tout en conservant l'idée de faire intervenir la constante de Newton ; cependant une autre constante reste nécessaire, ayant la dimension d'une longueur. En ce sens, le caractère "universel" de la théorie est perdu – les auteurs considèrent d'ailleurs ce fait comme un signe du caractère indispensable d'un paramètre nouveau pour résoudre le problème de la théorie quantique de la mesure.

Penrose a souvent invoqué l'existence d'une relation profonde entre gravité et unicité de la réalité macroscopique en mécanique quantique (réduction du vecteur d'état). Dans [660], il se place dans un contexte plutôt philosophique et général incluant la notion de conscience, et émet l'idée que "le seuil quantique de la gravité qui produit une auto-réduction du vecteur d'état joue un rôle vis-à-vis de la conscience". Dans [661], il considère une superposition quantique du même objet massif en deux positions différentes de l'espace ; en l'absence de gravité, cette superposition peut avoir une énergie très bien définie, du fait de l'invariance par translation. Il prend alors en compte la relativité générale pour en déduire que, puisqu'une masse courbe l'espace-temps, cette situation crée en fait une superpostion de deux espace-temps différents. Il met alors en jeu un "principe de covariance générale" pour étudier les propriétés de l'opérateur de translation dans le temps, et montre que la situation considérée implique une incertitude $\Delta E$ de l'énergie. Se basant ensuite sur la relation d'incertitude temps-énergie, il conjecture que l'inverse de $\Delta E$ correspond à une durée de vie finie de la superposition initiale : elle est instable, et se décompose spontanément en l'une de ses deux composantes. Ceci donne lieu à une réduction du vecteur d'état et assure l'unicité macroscopique de la position spatiale de tous les corps massifs. Il avertit toutefois le lecteur que "cette proposition ne constitue pas une *théorie* de la réduction quantique du vecteur d'état. Elle indique seulement le niveau auquel il faut s'attendre à des déviations introduites par les effets gravitationnels s'ajoutant à l'évolution (unitaire) prédite par l'équation de Schrödinger standard".

#### K-1-e. Liens avec la relativité

La localisation introduite dans la théorie GRW n'est pas facile à décrire de façon relativiste, puisqu'elle attribue un rôle particulier aux positions, lors de leur localisation dans un volume fini à un instant donné ; c'est un concept plus proche de la relativité galiléenne que de celle d'Einstein. Cependant des versions relativistes de dynamiques quantiques stochastiques et de la théorie CSL ont été développées [662, 663]. De plus, en 2005 Pearle a introduit une quantification du champ aléatoire classique de la théorie CSL [664], ce qui conduit à "une théorie complètement quantifiée de la réduction du vecteur d'état" ; on résout ainsi le problème lié à l'augmentation de l'énergie des particules sous l'effet du mécanisme de réduction, en attribuant une éner-

gie décroissante au champ stochastique de sorte que l'énergie totale reste constante. Voir également [665] et [666].

Une remarque générale est que la non-linéarité et la stochasticité doivent impérativement aller de concert si l'on veut éviter des contradictions avec la relativité. Par exemple, si l'on introduit des termes non linéaires dans l'équation de Schrödinger (à un niveau microscopique) tout en maintenant le postulat habituel de réduction de la mécanique quantique (dont, normalement, les théories à dynamique modifiée ne font plus usage), la transmission de signaux plus rapide que la vitesse de la lumière devient possible, comme souligné par Gisin [667] et par Polchinski [668]. Tumulka a proposé une version relativiste de la théorie GRW qu'il appelle "flash ontology" [669], où les "local beables" (§ H) sont données par un ensemble discret de points d'espace-temps où sont centrées les réductions du vecteur d'état ; ces points sont aléatoires avec une distribution donnée par la fonction d'onde initiale [48]. Pour une revue générale ou historique des théories dynamiques de la réduction du vecteur d'état, voir [670] et [643].

#### K-1-f. Liens avec l'expérience

Nous l'avons vu, la motivation fondamentale des théories à dynamique de Schrödinger modifiée est de fournir une unification de toutes les sortes d'évolution physique, y compris l'émergence d'un résultat unique dans une expérience ; ce résultat est obtenu par l'introduction de mécanismes physiques nouveaux caractérisés par des constantes nouvelles, ce qui implique immédiatement que ces théories sont plus précises sur les conditions dans lesquelles la réduction du vecteur d'état se produit effectivement. En d'autres termes, ces théories sont plus prédictives que la mécanique quantique standard. Nous l'avons vu, ce fait fournit à la fois une contrainte forte, qui prend la forme d'une compatibilité totale avec tous les résultats expérimentaux connus, mais en même temps fournit des occasions intéressantes de tester la nouvelle théorie sur le plan expérimental. Ce domaine n'est donc pas limité à des considérations purement théoriques.

En ce qui concerne des conflits possibles avec les expériences connues, nous avons déjà mentionné la discussion de la Ref. [659] signalant des incompatibilités entre la théorie universelle de Diosi et le comportement connu d'objets microscopiques. Un cas similaire est fourni pas une généralisation de la mécanique quantique proposée par Weinberg [671], qu'il a introduit précisément comme un exemple de non-linéarité qui peut conduire à des incompatibilités avec les données expérimentales ; voir également [672] pour une application de la même théorie à l'optique quantique, et [667] pour une

[48] On retrouve ici une caractéristique de la théorie de De Broglie-Bohm. Cependant il s'agit de points de réduction dans l'espace-temps et non de positions purement spatiales ; de plus, en théorie de Bohm, aucune réduction ne se produit.

démonstration de l'incompatibilité de cette théorie avec la relativité, du fait de la prédiction de transmission de signaux à une vitesse dépassant celle de la lumière (la démonstration est limitée à l'incompatibilité de cette théorie avec la relativité, et ne concerne pas les autres formes de dynamique de Schrödinger modifiée mentionnées plus haut).

Une autre possibilité serait de détecter le faible effet de chauffage spontané prévu par ces théories. Sous l'influence du terme de réduction spontanée dans l'équation d'évolution, les atomes et leurs noyaux devraient se trouver partiellement excités, et donc émettre un faible rayonnement que l'on pourrait essayer de détecter [673]. Il se trouve que plusieurs expériences de ce type ont été réalisées, mais avec des motivations différentes, par exemple la détection du rayonnement éventuellement produit dans des cristaux de Germanium par des collisions avec la "matière noire", ou encore la radioactivité spontanée à deux neutrinos et double $\beta$ [674]. Les auteurs de la Ref. [675] ont proposé de mesurer l'effet de chauffage créé par le terme de localisation dans des condensats de Bose-Einstein gazeux. Cependant, pour le moment aucune expérience n'a réussi à confirmer ou infirmer la validité des théories à dynamique de Schrödinger modifiée.

Pour les expériences futures, on pourrait concevoir des tests de ces nouvelles théories en réalisant des expériences d'interférence quantique avec des objets contenant chacun beaucoup de particules et passant à la fois par deux chemins bien distincts spatialement. En effet, si les termes de localisation spontanée jouent un rôle totalement négligeable dans les expériences d'interférence quantique réalisées jusqu'à maintenant avec de petits objets, pour des objets plus lourds ils devraient intervenir en diminuant, voire en annulant, le contraste des franges observées. Si l'on retient les valeur proposées actuellement pour les paramètres $\gamma$ et $\alpha$, des tests significatifs pourraient être obtenus avec des objets contenant $10^8$ nucléons. Il reste cependant que l'observation de figures d'interférence avec des objets ayant les masses correspondantes reste pour le moment un véritable défi expérimental, compte tenu des technologies actuellement disponibles. Pour une revue des résultats récents obtenus dans des expériences sur des agrégats et des molécules, ainsi qu'une discussion d'expériences futures possibles, voir [676]. Les diverses approches théoriques et les perspectives expérimentales sont passées en revue dans [677].

### K-2. Description de la réalité dans le cadre d'une théorie à dynamique modifiée

Dans cette classe d'interprétations de la mécanique quantique, le vecteur d'état perd le statut intermédiaire subtil qu'il avait en mécanique quantique standard (§ B-3 du Chapitre I) : il représente maintenant directement la réalité physique "en elle-même". L'évolution dans le temps de cette réalité se

fait selon une théorie dynamique unifiée, indépendamment du fait que des mesures, des observations humaines, etc., se produisent ou non. Bien sûr, cela ne veut pas dire que la théorie redevienne plus ou moins semblable à la mécanique classique. Par exemple, comme le vecteur d'état évolue dans un espace des états complexe (espace de Hilbert), c'est dans cet espace que la description de la réalité doit être faite, au lieu de l'espace habituel à 3 dimensions ; or les deux espaces sont très différents (pas uniquement du fait de leurs dimensions ; même si l'on accepte de passer à l'espace classique des configurations de dimension bien plus élevée, on a toujours un espace très différent de l'espace de Hilbert). Cependant, le but général d'unification de la théorie et de sa dynamique est parfaitement atteint, ce qui apporte une grande simplification conceptuelle. En comparaison de la théorie de De Broglie et Bohm, cette description de la réalité est plus simple, du fait qu'elle ne met en jeu qu'une fonction d'onde sans aucune position pour les particules. La présence d'un mécanisme de réduction agissant directement sur le vecteur d'état supprime également l'existence des "ondes vides".

Des descriptions physiques assez semblables sont obtenues quelle que soit la forme spécifique de théorie à dynamique non linéaire. Par exemple, quand une particule passe à travers une chambre à bulles, les termes nouveaux se chargent de faire apparaître à un niveau macroscopique une trajectoire pour la particule ; ils sélectionnent également un seul des paquets d'ondes à la sortie d'un aimant de Stern et Gerlach (et éliminent l'autre), mais pas avant que ces paquets d'ondes ne se soient corrélés avec l'environnement (par exemple des détecteurs). Bien sûr, un processus de localisation de la fonction d'onde qui agit dans l'espace des positions, plutôt que celui des impulsions, détruit la symétrie habituelle en mécanique quantique entre position et impulsion. Mais ceci n'est pas un problème insurmontable : on peut aisément se convaincre que ce qu'on mesure en pratique dans les expériences est en fait la position des particules ou d'objets comme les aiguilles des cadrans des appareils de mesure, alors que les impulsions ne sont accessibles que de façon indirecte.

Qu'en est-il du chat de Schrödinger et des paradoxes de ce type ? Si le terme non linéaire ajouté possède toutes les propriétés nécessaires pour mimer les effets de la réduction du vecteur d'état, ces paradoxes sont aisément résolus. Par exemple, une bouteille cassée de poison doit avoir au moins certaines parties qui sont dans une position spatiale différente (dans l'espace des configurations) que si la bouteille est intacte, sinon toutes leurs propriétés physiques seraient identiques. Il est alors clair que la dynamique modifiée résoudra les composantes du vecteur d'état bien avant que la superposition n'atteigne le chat, ce qui assure l'émergence d'une seule possibilité. Pour une revue récente des effets de la dynamique modifiée sur les "états par tout ou rien" (§ A-3 du Chapitre VI) dans le contexte de l'optique quantique, et sur les effets de la perception en termes d'états relatifs du cerveau, voir le § M et la Ref. [678].

Que devient la description d'une expérience EPRB dans ce point de vue ? Dans le cas des trajectoires de Bohm, nous avions insisté sur le rôle du "terme de vitesse quantique", qui était défini dans l'espace des configurations et non dans l'espace ordinaire. Ici, le rôle essentiel est tenu par les termes supplémentaires de localisation introduits dans l'équation de Schrödinger et leur effet sur le vecteur d'état. Intrinsèquement, ces termes restent parfaitement locaux ; dans la théorie GRW par exemple, chaque particule peut subir à tout instant un processus de localisation spontanée vers tout point où sa probabilité de présence n'est pas nulle. Considérons alors deux particules à spin dans un état singulet se propageant vers des analyseurs de Stern et Gerlach, dont les champs magnétiques sont orientés selon les directions $a$ et $b$. Rien de spécial ne se produit tant que les particules se propagent vers les analyseurs de Stern et Gerlach, ou même dans les aimants, puisque les particules sont microscopiques et que la probabilité d'une localisation spontanée reste extrêmement faible ; comme en théorie standard, elles peuvent parfaitement se trouver dans des superpositions cohérentes, même si elles sont très éloignées dans l'espace. Cependant, aussitôt que la particule 1 (par exemple) frappe un détecteur à la sortie de l'aimant, le système développe des corrélations avec les particules qui constituent le détecteur, le courant électronique, l'amplificateur, etc. Une chaîne de von Neumann se développe alors avec deux branches, chacune issue de l'un des deux paquets d'onde que l'aimant de Stern et Gerlach a séparés. Un niveau macroscopique est alors atteint de sorte que le terme de localisation spontanée devient très efficace et agit presque instantanément. Supposons par exemple que la localisation se produise dans la branche associée pour la particule 1 à état de spin de composante + selon la direction $a$. Mathématiquement, cette localisation effectue une projection du vecteur d'état à deux particules sur la composante où la première particule est dans l'état de spin + selon $a$, composante qui d'après la structure mathématique de l'état singulet contient l'état − (selon la même direction $a$ pour le spin de la seconde particule). Ainsi, du simple fait de la structure mathématique du vecteur d'état initial intriqué, le spin de seconde particule est projeté exactement comme si l'on avait appliqué le postulat de réduction[49]. Ce n'est donc pas le processus de localisation en lui-même qui introduit la non-localité, mais son effet sur un vecteur d'état qui contenait initialement une intrication non locale. Comme ce point de vue insiste sur le rôle des détecteurs plutôt que sur celui des analyseurs (rien ne se produit tant que les particules se propagent librement dans les gradients de champs magnétiques), en ce sens il est plus proche de l'interprétation standard que l'interprétation de Bohm. La réduction du vecteur d'état se produit plus tard

[49]Les équations sont similaires à celles écrites dans la seconde partie de l'Appendice I dans le contexte de la théorie de Bohm, à ceci près qu'elles mettent en jeu l'intrication avec l'environnement, et pas seulement l'autre spin.

que dans cette interprétation, puisqu'elle requiert une intrication avec l'environnement expérimental, et pas seulement une séparation magnétique des états de spin d'une particule. Cependant, les deux théories mettent en lumière de façon explicite la non-localité, bien que par un mécanisme différent.

On peut voir ce programme comme une sorte de résurgence des espoirs initiaux de Schrödinger, pour qui l'essentiel de la physique devait être contenu dans la fonction d'onde et dans son évolution progressive (voir la fin du § A-2 au Chapitre I) ; c'est tout particulièrement vrai, évidemment, des versions de la dynamique non linéaire qui sont continues (même si des quantités supplémentaires fluctuantes peuvent être introduites), et moins vrai des versions incluant les "hits" qui, elles, sont plutôt dans la ligne des sauts quantiques et du postulat de réduction du vecteur d'état. Ici, c'est bien le vecteur d'état qui décrit directement la réalité physique, en opposition avec ce qui a été dit au § B du Chapitre I ; nous sommes donc en présence d'une nouvelle catégorie de mécanique ondulatoire, où la notion de particules ponctuelles est totalement abandonnée au profit de petits paquets d'ondes. La théorie est évidemment très différente de la théorie de Bohm puisque la notion de position infiniment précise dans l'espace des configurations n'apparaît jamais. Elle ne présente pas les difficultés mentionnées au § H-1-i, puisqu'elle n'impose pas de distinction entre niveaux de réalité pouvant, soit être observés, soit manipulés ; elle introduit toutefois dans l'équation d'évolution du vecteur d'état des fonctions aléatoires (ou des processus de sauts aléatoires) qui ne peuvent a priori être contrôlés par aucune action humaine. Comme nous l'avons vu, une autre différence importante est que ces théories à dynamique modifiée sont véritablement de nouvelles théories : il peut arriver qu'elles conduisent à des prédictions différentes de celles de la mécanique quantique standard, de sorte que des tests expérimentaux sont en principe envisageables. Enfin, nous devrions rappeler une fois de plus que, dans ce point de vue non plus, il n'est pas possible de considérer la fonction d'onde comme un champ classique ordinaire, puisqu'elle se propage dans l'espace des configurations et non dans l'espace ordinaire.

Nous concluons notre discussion de la dynamique de Schrödinger modifiée en citant l'essai de Bell "Speakable and unspeakable in quantum mechanics" (Chapitre 18 de [6]). Il écrit à propos de la mécanique quantique standard : "Le 'problème' est alors le suivant : comment le monde doit-il être divisé en un appareil dont on peut parler normalement... et un système quantique dont on ne peut rien dire ? Combien d'électrons, d'atomes, ou de molécules sont nécessaires pour constituer un 'appareil de mesure' ? La mathématique de la théorie standard demande qu'une telle division soit effectuée, mais ne nous dit rien sur la façon de la faire[50] ... A mon avis, les pères fondateurs (de la

[50] On peut par exemple comparer avec la citation de Landau et Lifshitz du § E au Chapitre II.

mécanique quantique) avaient tort sur ce point. Les phénomènes quantiques n'excluent *pas* une description unifiée des micro- et macro-mondes,... système et appareil de mesure. Il n'est *pas* essentiel d'introduire une division vague de ce type". Effectivement, la dynamique de Schrödinger donne une réponse à ces questions, et montre qu'une théorie où c'est le vecteur d'état qui décrit directement la réalité physique est parfaitement possible : modifier la mécanique quantique n'entraîne pas nécessairement de contradiction immédiate avec le corpus de résultats connus.

Après tout, si nous pensons vraiment que la mécanique quantique est fondamentalement non déterministe, pourquoi devrions-nous exiger que son équation d'évolution fondamentale reste elle-même déterministe, comme l'est l'équation de Schrödinger standard ? N'y a-t-il pas là une certaine contradiction, et ne serait-il pas plus naturel d'accepter l'existence d'un petit terme stochastique dans l'équation d'évolution elle-même, afin de rendre compte de ce caractère aléatoire et d'unifier la dynamique ? La frontière entre les situations où l'unicité macroscopique émerge, ou n'émerge pas, ne serait alors plus vague comme en théorie standard, mais contenue de façon précise dans les équations. De plus, une telle théorie ouvre la possibilité de phénomènes physiques intéressants se produisant à cette frontière. Certes, le mécanisme précis de l'émergence macroscopique reste inconnu ; pour le moment toute une classe de possibilités existent, ouvrant également la porte à des controverses tant qu'on ne disposera pas d'une théorie complète.

Mais le simple fait que cette possibilité existe est conceptuellement très important. L'existence des théories de dynamique de Schrödinger est la preuve qu'il n'est pas impossible de construire une théorie quantique qui soit réaliste. Il n'est donc pas obligatoire d'enseigner la mécanique quantique aux étudiants à partir de l'interprétation standard, ce qui demande de les faire passer par toutes ses difficultés conceptuelles. On peut parfaitement prendre un point de vue où le monde physique possède des propriétés indépendantes de l'observation, en considérant que chaque système est réellement décrit par une fonction d'onde (ou un vecteur d'état) qui se propage dans l'espace des configurations. Il faut concéder que l'évolution de cette fonction d'onde obéit à une équation dont, pour le moment, la forme la plus générale n'est pas connue. Ce qui est cependant clair est que, dans la limite des systèmes microscopiques, cette équation se réduit à l'équation de Schrödinger, qui permet de prédire l'évolution de tels systèmes avec une extrême précision. Pour des systèmes physiques plus grands, l'équation contient des termes qui conduisent à l'émergence spontanée de l'unicité macroscopique. Plusieurs possibilités pour ces termes ont déjà été suggérées, mais la forme complète de la théorie est toujours l'objet de recherches. Après tout cette situation n'est pas tellement pire que celle de l'interprétation standard où l'on ne peut rien dire du tout du processus de réduction du vecteur d'état ! De plus, le prix à payer pour cette simplification du cadre conceptuel général serait l'introduction d'équa-

tions mathématiques plus compliquées, contenant le processus de réduction. On peut espérer qu'un jour des expériences nous permettent de savoir si ce point de vue est correct.

### K-3. Systèmes quantiques ouverts en mécanique quantique standard

On peut également introduire des termes stochastiques dans l'équation de Schrödinger sans aucun objectif fondamental ou d'interprétation, juste afin d'obtenir une méthode de calcul commode [679–681]. Ces termes permettent d'obtenir l'évolution temporelle d'un opérateur densité décrivant un sous-système (trace partielle), dans le cadre d'une équation de Schrödinger du système total qui reste strictement linéaire et inchangée. La méthode remplace une équation pilote pour l'opérateur de trace partielle par le calcul de l'évolution d'une série de vecteurs d'état, qui sont soumis à des perturbations aléatoires pouvant introduire des modifications soudaines ressemblant à des sauts quantiques. Chaque évolution temporelle d'un vecteur d'état fournit une trajectoire quantique individuelle.

Dans certains cas il se trouve que cette méthode est très efficace en termes d'économies de temps de calcul. Elle a donc été appliquée à toute une série de situations intéressantes, en particulier en optique quantique. On l'appelle parfois "méthode des trajectoires quantiques", ou alors "fonctions d'onde de Monte-Carlo", ou enfin "simulation des sauts quantiques" : pour une revue, voir [682]. Dans la limite des sauts infinitésimaux, elle devient la "méthode de la diffusion des états quantiques" [683, 684].

### K-4. Dynamique de Schrödinger attractive

Il a également été proposé de combiner les idées de la dynamique de Schrödinger modifiée avec celles de la théorie dBB afin d'obtenir une version de la mécanique quantique qui cumule les avantages des deux points de vue [685]. Les positions bohmiennes sont toujours présentes dans les équations dynamiques : elles sont pilotées par la fonction d'onde (comme dans la théorie dBB), mais elles réagissent également sur elle (ce qui ne se produit pas dans le cadre de la théorie dBB). Leur effet est de créer une distribution de densité dans l'espace qui attire constamment la fonction d'onde. Comme cette distribution suit les positions bohmiennes, pour chaque réalisation de l'expérience elle sélectionne un seul résultat, comme le font les positions, et sélectionne donc une seule branche du vecteur d'état.

Considérons un système physique constitué de $N$ particules identiques. Le modèle proposé consiste à introduire l'équation de Schrödinger modifiée suivante pour le vecteur d'état normalisé $\left|\overline{\Phi}\left(t\right)\right\rangle$ :

$$i\hbar\frac{d}{dt}\left|\overline{\Phi}\left(t\right)\right\rangle = \left[H\left(t\right)+\overline{H}_{L}\left(t\right)\right]\left|\overline{\Phi}\left(t\right)\right\rangle \tag{XI-45}$$

où $H(t)$ est l'hamiltonien habituel, et où $\overline{H}_L(t)$ est l'opérateur (anti-hermitien) donné par :

$$\overline{H}_L(t) = i\hbar\gamma_L \int d^3r \ \left[\Psi^\dagger(\mathbf{r})\,\Psi(\mathbf{r}) - D_\Phi(\mathbf{r},t)\right] N_B(\mathbf{r},t) \tag{XI-46}$$

Dans cette équation, $\gamma_L$ est un paramètre libre du modèle, $\Psi(\mathbf{r})$ est l'opérateur champ des particules identiques, et $D_\Phi(\mathbf{r})$ est la densité locale quantique standard :

$$D_\Phi(\mathbf{r},t) = \left\langle \overline{\Phi}(t)\right| \Psi^\dagger(\mathbf{r})\,\Psi(\mathbf{r}) \left|\overline{\Phi}(t)\right\rangle \tag{XI-47}$$

Nous introduisons également une quantité $N_B(\mathbf{r},t)$ qui reflète le nombre de positions bohmiennes $\mathbf{q}_n$ se trouvant à une distance du point $\mathbf{r}$ comparable à une disance $\alpha_L$ :

$$N_B(\mathbf{r},t) = \sum_{n=1}^{N} e^{-(\mathbf{r}-\mathbf{q}_n)^2/(a_L)^2} \tag{XI-48}$$

où $\alpha_L$ est le deuxième paramètre libre du modèle. La densité spatiale bohmienne moyennée est alors définie par :

$$n_B(\mathbf{r},t) = \frac{N_B(\mathbf{r},t)}{(a_0)^3} \tag{XI-49}$$

L'équation (XI-45) est non linéaire puisque $D_\Phi(\mathbf{r}')$ dépend du vecteur d'état $\left|\overline{\Phi}\right\rangle$. L'appendice L fournit plus de détails sur les propriétés de ce modèle.

Comme dans les théories GRW et CSL, les deux paramètres $\gamma_L$ et $\alpha_L$ sont choisis de façon à n'avoir qu'un effet totalement négligeable pour des systèmes microscopiques, mais à entraîner une disparition rapide de toute superposition d'états quantiques correspondant à des densités macroscopiquement distinctes dans l'espace. La dynamique de ce processus est très différente de celles de GRW ou de CSL, puisqu'elle est déterministe ; le caractère aléatoire du résultat de mesure n'est qu'une conséquence du fait que les positions bohmiennes initiales sont tirées au hasard. La forme du terme attractif ajouté à l'équation de Schrödinger conserve automatiquement la symétrie d'échange du vecteur d'état de particules identiques.

Les difficultés provenant de l'existence des ondes vides qui subsistent pour toujours sont alors supprimées. En théorie dBB, les positions des particules fournissent une description directe de la réalité physique. Ici, elles ne jouent que le rôle de variables mathématiques aléatoires qui permettent de calculer l'évolution stochastique de la distribution de densité dans l'espace. Cette distribution n'est pilotée qu'indirectement par la fonction d'onde, par l'intermédiaire des positions qui, elles, sont pilotées directement. La notion de particules physiques ponctuelles disparaît au profit d'une distribution de densité $n_B(\mathbf{r},t)$ dans l'espace, semblable à celle d'un fluide, que l'on peut voir comme fournissant la description physique la plus proche de la réalité.

Une autre spécificité du modèle est que chaque particule n'est pas constamment soumise à une perturbation aléatoire très rapide qui tend à la localiser. Seul un effet plus progressif et moyenné dans l'espace est supposé ; dans un solide par exemple, nous montrons dans l'Appendice L que l'attraction ne se produit que dans l'ensemble du volume du solide, de sorte que le processus de localisation se fait sur une distance bien plus grande. En d'autres termes, le processus de localisation n'est pas seulement déterministe, mais aussi spatialement plus doux, ce qui atténue beaucoup les effets de chauffage prédits par les théories GRW/CSL, par exemple à l'intérieur d'un solide. En fait, le processus de localisation se produit surtout à la surface du solide, avec un effet semblable à une force de cohésion supplémentaire.

Dans l'appendice L, nous montrons que ce modèle n'introduit que très peu de modifications à la dynamique habituelle, sauf dans une situation particulière : le moment où un branchement se produit dans le vecteur d'état pour le conduire vers une superposition quantique d'états où un objet macroscopique est localisé dans des régions différentes de l'espace. En effet, dans chaque branche de la superposition les particules qui constituent l'objet doivent occuper la même région de l'espace si l'objet est maintenu comme un tout par des forces de cohésion entre ses particules. Comme les positions bohmiennes ne peuvent pas "quitter la fonction d'onde"[51] il s'ensuit que, lors d'une réalisation de l'expérience, les positions bohmiennes doivent également rester toutes regroupées ensemble. Toutes ces positions créent alors une forte attraction dans la région de l'espace associée à une seule composante de la fonction d'onde, de sorte que le terme attractif projette la fonction d'onde dans cette région ; ce processus est très efficace si l'objet contient un très grand nombre de particules. Lors d'une mesure, le pointeur de l'appareil peut jouer le rôle de l'objet macroscopique, de sorte que cette localisation spatiale introduit exactement ce qui est nécessaire pour obtenir une réduction dynamique du vecteur d'état reproduisant le postulat de von Neumann. Par le même mécanisme, on obtient immédiatement l'unicité de la position de tout objet macroscopique que des forces cohésives maintiennent ensemble (absence de chats de Schrödinger). Mais des objets macroscopiques qui n'ont pas de cohésion, comme des gaz condensés de Bose-Einstein, peuvent parfaitement rester dans des superpositions quantiques de positions différentes. Dans un monde qui serait fait uniquement de substances sans aucune cohésion interne, par exemple des gaz, la projection du vecteur d'état ne se produirait pas, ou alors serait extrêmement lente ; les chats de Schrödinger purement gazeux pourraient durer très longtemps avant d'être réduits !

[51] Plus précisément, l'ensemble des positions bohmiennes définit un point de l'espace des configurations où la fonction d'onde ne doit pas s'annuler.

## L. Interprétation transactionnelle

L'interprétation transactionnelle de la mécanique quantique considère également les états quantiques (ou les fonctions d'onde associées) comme réels, plutôt que comme une représentation mathématique d'une information sur un système physique. Cette interprétation a été proposée par Cramer en 1986 [686] à partir d'un travail qu'il avait fait antérieurement en 1980 [687] sur le rôle possible des ondes avancées et retardées dans des situations EPR. En électromagnétisme classique, il est bien connu que des ondes avancées (se propageant dans la direction du futur vers le passé) sont des solutions des équations de Maxwell, au même titre que les ondes retardées habituelles (du passé vers le futur). En mécanique quantique non relativiste, l'équation différentielle de Schrödinger est du premier ordre en temps, de sorte qu'elle ne présente pas ce double type de solutions pour une énergie donnée ; en mécanique quantique relativiste cependant, on utilise des équations du second ordre en temps, de sorte que dans ce cas également les ondes avancées cohabitent avec les ondes retardées. En mécanique quantique transactionnelle, cette possibilité est utilisée pour décrire l'échange microscopique d'un quantum entre un émetteur dans le présent et un absorbeur dans le futur en termes d'échange d'ondes retardées et avancées.

Cet échange est appelé une "transaction" – Cramer utilise également l'image d'une "poignée de main" entre les deux participants de ce processus quantique. L'émetteur produit une onde retardée, que Cramer appelle "onde proposée", qui se propage jusqu'à l'absorbeur, ce qui lui fait alors émettre une onde avancée "de confirmation", qui remonte le temps pour revenir sur l'émetteur et réagir sur lui. Le cycle se répète jusqu'à ce qu'un régime d'onde stationnaire soit atteint, dans lequel une interférence destructive annule l'onde hors de l'intervalle de temps de la transaction (interférence destructive entre les deux ondes retardées ou entre les deux ondes avancées). Tout ce processus a une étendue finie dans l'espace et le temps, de sorte qu'en relativité il n'obéit pas à la définition habituelle d'un événement relativiste (point dans l'espace-temps). En ce qui concerne la réduction du vecteur d'état, elle non plus ne se produit pas à un instant donné précis ; elle dure durant toute la transaction, dans un processus symétrique entre émission et absorption. La théorie est explicitement non locale et n'a donc aucune difficulté à expliquer des corrélations du type Bell [687].

L'élégance mathématique de ce point de vue le rend fort séduisant. Il reste cependant relativement peu utilisé par les physiciens, probablement parce qu'il demande de renoncer à des idées intuitives comme celle du passé influençant le futur, et non l'inverse, ce que beaucoup peuvent considérer comme un prix trop élevé à payer pour mieux comprendre la mécanique quantique.

## M. Interprétation d'Everett

Un point de vue maintenant fameux a été proposé en 1957 par Everett [688], qui l'a nommé "interprétation de l'état relatif", mais on trouve aussi d'autres dénominations dans la littérature : "interprétation des mondes multiples" (en anglais "many-worlds interpretation" ou MWI [689]), "fonction d'onde universelle", ou encore "Univers à branches multiples" (le mot "branches" fait ici référence aux ramifications du vecteur d'état de l'Univers, que nous discutons plus bas). Ces noms désignent différentes versions d'une même famille d'interprétations, parfois proches, parfois significativement différentes. Une caractéristique commune est cependant que toute contradiction éventuelle entre les deux postulats d'évolution du vecteur d'état est éliminée par une méthode simple et efficace : le second postulat est tout simplement supprimé.

### M-1. Aucune limite pour l'équation de Schrödinger

Dans l'interprétation d'Everett, l'équation de Schrödinger est prise encore plus au sérieux que dans toute autre interprétation. Au lieu d'essayer d'expliquer comment, dans une séquence de mesures, chacune d'entre elles donne un résultat bien défini, on préfère considérer que des résultats uniques et bien définis n'apparaissent jamais : à chaque mesure, tous les résultats possibles sont simultanément réalisés et observés ! La chaîne de von Neumann n'est alors jamais brisée, son arbre de possibilités restant libre de développer ses branches jusqu'à l'infini.

Everett considère le système total composite constitué par le système quantique observé, l'appareil de mesure et les observateurs, etc. après une mesure. Pour décrire cette réunion de sous-systèmes corrélés, il écrit [688] : "il n'existe rien de tel qu'un état unique pour un sous-système. Les systèmes n'ont pas d'état qui soit indépendant du reste du système... On peut choisir arbitrairement un état pour un sous-système et en déduire un état relatif pour le reste" – ce qui ressemble fort à une description de l'intrication quantique, un concept bien connu. Mais la nouveauté est qu'un observateur est simplement considéré comme un système qui doit être traité sur le même plan que l'environnement, microscopique ou macroscopique. "Comme modèle pour les observateurs nous pouvons, si nous le souhaitons, considérer des machines automatiques, munies de capteurs sensoriels et couplées à des instruments qui enregistrent les perceptions passées de l'observateur ainsi que la configuration propre de la machine". Everett ajoute que "les données de perception en cours, ainsi que la configuration de la machine, sont immédiatement enregistrées dans la mémoire, de sorte que toutes les actions de la machine à un instant donné peuvent être considérées comme des fonctions du seul contenu de la mémoire"... ; tout ce que l'observateur retient des expériences passées

est conservé dans cette mémoire (bande magnétique, compteur, ou même configuration de cellules nerveuses du cerveau). A partir de là, Everett en conclut que "il n'existe pas un état unique de l'observateur ; ... au cours de chacune des observations successives (ou interactions), l'état de l'observateur se ramifie en états différents... Toutes les branches existent simultanément dans la superposition après une séquence d'observations, quelle qu'elle soit". Il vérifie alors que les expériences de l'observateur contenues dans sa mémoire sont "en plein accord avec les prévisions de la formulation standard de la mécanique quantique en termes d'observateur externe". Dans une lettre à L.D. Raub [690], il écrit que cette interprétation est "la seule approche complètement cohérente pour expliquer à la fois le contenu de la mécanique quantique et la façon dont le monde nous apparaît".

Considérons par exemple le système physique composé d'un (ou plusieurs) systèmes microscopiques étudiés, d'un appareil de mesure et d'un observateur, et supposons que cet ensemble soit isolé du reste de l'Univers. Le vecteur d'état de cet ensemble représente alors fidèlement la réalité elle-même, et non pas notre connaissance de cette réalité. Lors des mesures successives, le vecteur d'état se ramifie entre toutes les branches correspondant aux différentes séries de résultats possibles, sans jamais effectuer de choix entre elles ; toutes sont considérées comme réelles après une mesure. L'observateur lui-même prend part à ce processus de ramification, son cerveau se trouvant capturé dans un état intriqué avec les appareils de mesure ; il se trouve à la fois dans plusieurs états où il a enregistré des résultats différents (on parle parfois de "many-mind interpretation"). En d'autres termes, l'observateur lui-même joue le rôle du chat de Schrödinger dans le paradoxe historique. Cependant il lui est impossible de prendre conscience de plusieurs résultats à la fois ; chaque "composante de l'observateur" n'a aucune relation avec toutes les autres et les vecteurs d'états qui leur correspondent (d'où le nom d'interprétation "de l'état relatif").

L'émergence d'une unicité macroscopique dans une expérience est alors vue comme une illusion, une conséquence des limitations intrinsèques à l'esprit humain et de ses facultés d'introspection. Puisque le système total évolue de façon parfaitement régulière et déterministe, l'aléatoire ne se produit donc que dans l'esprit de l'observateur lui-même, et résulte de la façon dont il peut stocker et consulter les résultats dans sa mémoire. Indépendamment des observateurs, rien ne vient mettre une limite à la puissance prédictive déterministe de l'équation de Schrödinger. Dans l'absolu, le processus aléatoire que nous appelons habituellement "mesure quantique" n'existe pas !

La "fonction d'onde universelle" est la fonction d'onde de l'Univers, ramifiée en de très nombreuses branches, en particulier toutes celles créées par des expériences de mesure quantique sur des systèmes microscopiques donnant lieu à plusieurs résultats possibles ; une ramification d'une branche peut également se produire sous l'effet d'un processus physique d'interaction

qui ne provient pas d'une mesure[52]. Les différentes branches associées à des situations macroscopiquement différentes, par exemple à des positions différentes des pointeurs des appareils de mesures et à leurs conséquences, sont indépendantes. En effet, aucun hamiltonien d'interaction n'a d'éléments de matrice entre des états où un nombre macroscopique de particules sont dans des états différents ; elles ne peuvent pas donner lieu à des effets d'interférence, car cela demanderait d'agir de façon cohérente sur l'état d'un nombre beaucoup trop grand de systèmes quantiques élémentaires. C'est pourquoi l'on considère parfois ces branches comme des "mondes" différents existant en parallèle, ce qui est l'origine de l'appellation "interprétation des mondes multiples" ; d'autres préfèrent considérer que le monde est toujours unique, dans une superposition d'états macroscopiques très différents – on l'appelle parfois "multiverse" [691]. Quoi qu'il en soit, l'Univers est ainsi dans un état quantique unique, mais ses sous-systèmes, y compris les observateurs, sont à la fois dans de nombreux états qui peuvent être très différents.

### M-2. Développement logique de l'interprétation

Tandis que l'interprétation de Copenhague demande de postuler l'existence d'un monde classique qui permet à des observateurs extérieurs d'effectuer des mesures et d'en enregistrer les résultats, dans l'interprétation d'Everett les observateurs ne sont ni externes ni classiques ; bien évidemment, le postulat de réduction du vecteur d'état disparaît également. De plus, la règle des probabilités de Born n'est plus un postulat supplémentaire, mais doit être déduite du principe de superposition linéaire et de l'évolution de Schrödinger. Il faut alors expliquer, dans le cadre du formalisme de l'espace des états et de l'équation de Schrödinger linéaire, pourquoi :

(i) comme nous l'avons déjà noté, l'observateur pris dans les ramifications du vecteur d'état ne peut pas s'en rendre compte, mais pense avoir enregistré un seul résultat lorsqu'il scrute sa mémoire pour prendre conscience de la mesure qu'il a effectuée dans le passé. De plus, des observateurs différents de la même expérience sont toujours en accord lorsqu'ils comparent entre eux les résultats obtenus.

(ii) quand il répète la même expérience et enregistre les résultats, chaque observateur perçoit des fréquences d'occurrence de chacun des résultats possibles qui reproduisent bien la règle habituelle des probabilités de Born.

(iii) et définir exactement la base de l'espace des états dans laquelle les

[52]Quand l'ami de Wigner (§ C du Chapitre II) communique le résultat qu'il a obtenu à l'observateur extérieur au laboratoire, par exemple en lui donnant un coup de téléphone, un branchement supplémentaire se produit ; l'observateur extérieur devient intriqué avec les branches créées par l'expérience quantique, alors qu'il ne l'était pas avant d'en connaître le résultat. Il existe une relation entre les ramifications du vecteur d'état et le flux d'information.

propriétés précédentes s'appliquent, et les conditions dans lesquelles les ramifications du vecteur d'état se produisent pour les observateurs.

Nous passons maintenant en revue successivement ces trois points.

#### M-2-a. Perception des résultats

Le point (i) est un postulat concernant les capacités d'enregistrement en mémoire et d'introspection de l'esprit humain. Même s'ils appartiennent à un Univers parfaitement déterministe, lorsqu'ils effectuent des expériences quantiques, les observateurs ont une perception aléatoire des résultats qu'ils ont obtenus et mémorisés. Une composante essentielle de la théorie est que, dans chacun de ses états, l'observateur ne peut avoir accès qu'à l'état de sa mémoire dans la branche du vecteur d'état correspondante, sans aucune influence de toutes les autres. De même, lorsqu'il échange des informations avec d'autres observateurs concernant les résultats des mesures, il n'a accès qu'à une branche unique associée avec un seul contenu bien défini de leurs registres mémoire. Tout groupe d'observateurs se scinde donc en quelque sorte en un grand nombre de composantes totalement indépendantes, sans aucune communication possible entre elles.

Ce point de vue n'est pas nécessairement facile à assimiler ; il n'est pas surprenant qu'il ait été critiqué par plusieurs auteurs. Par exemple, Peres écrit (§ 12.1 de [388]), en parlant de cette famille d'interprétations : "Aucune n'est satisfaisante parce qu'elles remplacent simplement le caractère arbitraire du postulat de réduction par l'hypothèse d'une absence de communication" (entre branches du vecteur d'état) ; voir également les Refs. [692] et [693].

#### M-2-b. Règle de Born

Etablir (ii) demande que, sans faire intervenir des observations extérieures, on fasse émerger la notion de probabilité à partir de considérations sur la structure mathématique du vecteur d'état intriqué, et ensuite que les valeurs des probabilités soient obtenues [694, 695]. L'équation de Schrödinger est linéaire et n'attribue en elle-même aucune signification particulière aux carrés des normes des différentes composantes du vecteur d'état, qu'il faut donc relier aux fréquences d'occurrence des différentes séries de résultats possibles. Une situation intéressante est celle où la même expérience est répétée de nombreuses fois, ce qui fait apparaître de nombreuses branches dans le vecteur d'état, associées à toutes les séquences possibles de résultats ; l'objectif est alors de montrer que, dans la plupart des cas, l'observateur se trouve dans une branche où la fréquence relative des résultats reproduit la règle de Born. La difficulté est, bien sûr, de donner un sens précis aux mots "dans la plupart des cas" ; il faut pour cela introduire une notion de probabilité, c'est-à-dire une mesure (au sens mathématique du terme) associée à

chacune des différentes "trajectoires" des observateurs et de leurs mémoires. Une première remarque est qu'il semble naturel de choisir comme mesure la norme habituelle de Lebesgue, car elle conserve la probabilité totale. Everett propose alors un raisonnement plus précis. Il suppose que la probabilité associée à chaque branche est une fonction de sa seule norme[53], et que cette probabilité possède une propriété d'additivité (si l'on regroupe les résultats de mesure en sous-ensembles, la probabilité est toujours la somme des probabilités des sous-ensembles). Il montre alors que seule la norme usuelle possède cette propriété. En conséquence, la mesure associée à toute séquence particulière de résultats stockés dans une mémoire est donc donnée par le carré de la norme[54], et l'on retrouve la règle de Born. Voir également les raisonnements exposés dans les pages 71–78 et 183–215 de la Réf. [689].

Nous allons présenter ici une version simplifiée de l'argument. Nous supposons que les systèmes microscopiques identiques à mesurer $S_1$, $S_2$,...,$S_N$ sont $N$ spins 1/2, tous initialement dans la même superposition $|\varphi_0\rangle$ de deux états $|+\rangle$ et $|-\rangle$ :

$$|\varphi_0\rangle = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle \tag{XI-50}$$

avec la condition de normalisation :

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{XI-51}$$

De plus, avant que commencent les expériences, le système total comprend également $N$ registres mémoire $R_1$, $R_2$, ...$R_N$ qui sont tous initialement dans le même état quantique $|M_0\rangle$. La fonction du registre mémoire $R_1$ est d'enregistrer le résultats de la mesure effectuée sur $S_1$, celle ce $R_2$ d'enregistrer le résultat correspondant à $S_2$, etc. L'état quantique initial du système total est :

$$|\Psi_0\rangle = |S_1 : \varphi_0\rangle\,|S_2 : \varphi_0\rangle\,...\,|N : \varphi_0\rangle \otimes |R_1 : M_0\rangle\,|R_2 : M_0\rangle\,...\,|R_N : M_0\rangle \tag{XI-52}$$

Une fois que les mesures sont effectuées, chaque registre mémoire atteint un état $|M_+\rangle$ si le résultat est $+$, un état $|M_-\rangle$ si le résultat est $-$. L'état quantique du système total est alors :

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle = {} & [\alpha\,|S_1 : +\rangle\,|R_1 : M_+\rangle + \beta\,|S_1 : -\rangle\,|R_1 : M_-\rangle] \\ & \otimes [\alpha\,|S_2 : +\rangle\,|R_2 : M_+\rangle + \beta\,|S_2 : -\rangle\,|R_2 : M_-\rangle] \otimes ... \\ & ... \otimes [\alpha\,|S_N : +\rangle\,|R_N : M_+\rangle + \beta\,|S_N : -\rangle\,|R_N : M_-\rangle]\end{aligned} \tag{XI-53}$$

[53] Ce n'est pas une hypothèse anodine ; par exemple, cela exclut toute théorie où un paramètre additionel quelconque interviendrait dans les probabilités.

[54] Ces considérations sont reliées au théorème de Gleason (§ D-3), découvert indépendamment et publié presque simultanément.

Prenons maintenant en compte toutes les séquences de mesure où le résultat + est obtenu $N_+$ fois alors que le résultat − est obtenu $N_-$ fois (avec évidemment $N_+ + N_- = N$). Dans le ket intriqué (XI-53), le nombre $n(N_+, N_-)$ de composantes contenant ces résultats est :

$$n(N_+, N_-) = \frac{N!}{N_+! N_-!} \tag{XI-54}$$

et chacune de ces composantes a un carré de la norme égal à $|\alpha|^{2N_+} |\beta|^{2N_-}$. Le total de norme au carré associé aux résultats $N_+$ et $N_-$ est donc :

$$Q(N_+, N_-) = \frac{N!}{N_+! N_-!} |\alpha|^{2N_+} |\beta|^{2N_-} \tag{XI-55}$$

qui n'est autre qu'une distribution binomiale habituelle. Comme :

$$\frac{Q(N_+ + 1, N_- - 1)}{Q(N_+, N_-)} = \frac{N_- \ |\alpha|^2}{N_+ \ |\beta|^2} \tag{XI-56}$$

on voit facilement que $Q(N_+, N_-)$ est maximal quand :

$$\frac{N_+}{N_-} \simeq \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} \tag{XI-57}$$

De plus, lorsque $N$ est très grand, on sait que cette distribution est étroitement centrée autour de son maximum (la largeur relative de cette distribution varie en $1/\sqrt{N}$).

Bien évidemment, si nous désirons établir la règle de Born dans le cadre de l'interprétation d'Everett, ce serait un raisonnement circulaire de supposer que les normes que nous avons calculées sont égales aux probabilités recherchées. Mais nous pouvons faire un postulat plus faible : nous pouvons supposer, par exemple, que les événements pour lesquels la norme est inférieure à un petit nombre $\varepsilon$ ne se produisent jamais ; ce nombre peut être aussi petit que l'on veut, $10^{-20}$ par exemple. Alors, comme la distribution binomiale devient de plus en plus étroite lorsque le nombre $N$ de mesures augmente, tous les événements qui ne sont pas rejetés par cette règle satisfont la relation (XI-57) avec une précision qui augmente (Fig. XI.5) ; dans la limite d'un nombre infini de mesures, ils la satisfont exactement.

Le résultat de cette analyse est que la règle de Born a été rétablie, au prix d'un faible postulat destiné à introduire les normes dans le raisonnement. Il reste que nous n'avons discuté qu'une version simplifiée, avec seulement deux résultats de mesure possibles (elle peut toutefois être généralisée sans grande difficulté, juste avec une légère complication des notations). La démonstration n'est valable qu'à la limite $N \to \infty$, alors qu'un raisonnement plus général devrait prendre en compte une obtention de la règle de Born pour de petites

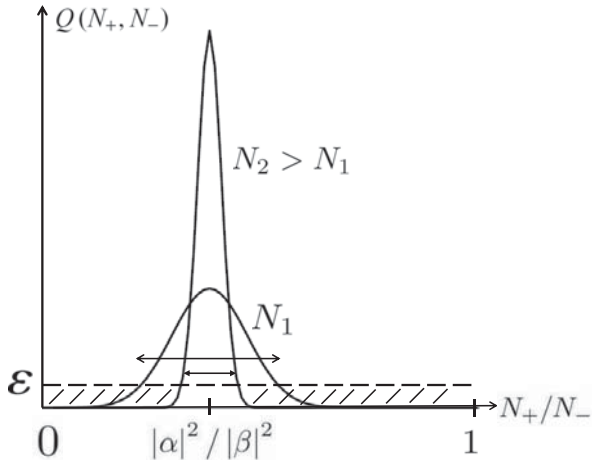


FIGURE *XI.5 – Variations du total du carré de la norme* $Q(N_+, N_-)$ *associé à une séquence de* $N_+$ *résultats* $+$ *and* $N_-$ *résultats* $-$*, en fonction du rapport* $N_+/N_-$ *et à* $N = N_+ + N_-$ *constant ; la courbe du bas, la plus large, correspond à* $N = N_1$ *; la courbe du haut, plus étroite, correspond à une valeur plus grande* $N = N_2$*. Si l'on postule que les résultats correspondant à* $Q(N_+, N_-) < \varepsilon$ *ne sont jamais observés (*$\varepsilon$ *est un nombre arbitrairement petit), alors les valeurs observées possibles du rapport* $N_+/N_-$ *sont restreintes à un domaine (schématisé par une double flèche sur la figure) qui décroît lors que* $N$ *croît. A la limite* $N \to \infty$*, le rapport est égal à* $|\alpha|^2 / |\beta|^2$*, et la règle de Born usuelle est établie.*

valeurs de $N$. On pourrait également considérer des situations où la nature des expériences change au cours de la séquence, ou par exemple où plusieurs observateurs répètent en parallèle des expériences différentes et obtiennent des résultats compatibles.

Des versions plus récentes de l'interprétation d'Everett sont plutôt formulées en termes d'information et de courant d'information (§ A-3 de ce chapitre). Par exemple, Deutsch [694] a proposé une démonstration de la règle de Born basée sur la théorie de l'information et des décisions, en combinant l'interprétation d'Everett avec la théorie des jeux ; voir également les contributions de Wallace [696] et de Saunders [697]. Zurek [446,698] a discuté les relations entre les probabilités de Born et ce qu'il appelle "environment-assisted invariance" , ou "envariance" , qu'il compare à la définition standard de Laplace des probabilités, basée sur le "principe d'indifférence" . L'envariance peut également être utilisée pour montrer l'indépendance dynamique des diverses branches du vecteur d'état. Toutefois, il n'existe pas vraiment de consensus sur le fait que la règle de Born puisse réellement être déduite de

l'interprétation d'Everett de façon économique, sans introduire d'hypothèses qui soient aussi fortes que la règle elle-même.

Quoi qu'il en soit, la notion de probabilité de la théorie d'Everett reste profondément différente de la notion usuelle de probabilité, y compris celle utilisée en mécanique quantique standard. D'habitude, la probabilité caractérise une situation d'incertitude, où l'on se trouve en présence d'une série d'événements possibles, alors qu'un seul se trouvera réalisé. Il peut aussi arriver que l'événement se soit déjà produit dans le passé (la probabilité qu'un astéroïde ait frappé la Terre il y a 65 millions d'années), mais dans tous les cas les événements en question possèdent un caractère exclusif (la collision a eu lieu, ou pas). Ici, au contraire, tous les résultats sont obtenus, de sorte qu'il n'existe plus de distinction entre ce qui s'est produit et ce qui ne s'est pas produit ; la réalité ne laisse place à aucune incertitude. De plus, dans la notion habituelle des probabiltés, c'est l'observateur qui échantillonne parmi des possibilités contenues dans un ensemble statistique qui lui est extérieur ; dans le point de vue bayésien, il attribue des probabilités à des événements qui lui sont extérieurs. En revanche, dans le point de vue d'Everett, l'observateur lui-même contient toutes les possibilités dans les diverses branches du vecteur d'état et, en un sens, c'est lui qui joue le rôle de l'ensemble statistique. Un nouveau concept de probabilités est ainsi introduit, voir par exemple les discussions des Refs. [699] et [700]. Au lieu de disparaître de la théorie comme on aurait pu s'y attendre[55], l'observateur y joue au contraire un rôle central pour engendrer des probabilités.

#### M-2-c. Points de branchement

Le point (iii) est également très important. Dans l'interprétation d'Everett, l'unicité macroscopique n'est pas une propriété du monde extérieur, mais plutôt des états quantiques de ce monde extérieur qui s'intriquent avec la base pertinente des états de la mémoire des observateurs[56]. Cette base est celle dans laquelle ils conservent une information permanente sur le passé et celle qu'ils utilisent pour échanger entre eux une information cohérente sur les résultats des expériences. Chaque observateur est toujours macroscopique, n'ayant aucun accès direct au monde microscopique : un appareil macroscopique est nécessaire pour transmettre une information microscopique

[55] Voir par exemple la citation de Rosenfeld dans le § E du Chapitre II.

[56] Considérons les sous-ensembles macroscopiques de l'Univers ayant interagi avec des observateurs. L'unicité macroscopique n'est pas une propriété intrinsèque qu'on pourrait attribuer à ces sous-ensembles ; elle correspond plutôt à une propriété perçue du fait des types de corrélations pouvant se produire entre eux et les registres mémoire des observateurs. De ce point de vue, les observateurs jouent donc un rôle au moins aussi important que dans les autres interprétations de la mécanique quantique. Par exemple, pour les parties de l'Univers qui n'ont jamais interagi avec des observateurs, l'unicité macroscopique n'a aucun sens.

qui parvienne à sa mémoire macroscopique. Ceci signifie qu'un observateur ne peut jamais s'intriquer directement avec un système microscopique, par exemple avec les deux trajectoires que peut prendre une particule unique dans un interféromètre (ce qui détruirait l'effet d'interférence), il ne le peut qu'indirectement, via un appareil de mesure qui joue le rôle d'un environnement du système observé. Dans ces conditions, il devient naturel d'invoquer la décohérence macroscopique comme critère de ramification de l'observateur [701] ; nous avons vu aux §§ C-3 du Chapitre VII et A-1-a de ce chapitre que cette décohérence empêche de toute façon l'observation d'interférence entre les diverses composantes d'une superposition cohérente, que l'observateur y soit impliqué ou pas. De façon générale, la base des "états pointeurs" apparaît comme la plus appropriée pour développer l'état intriqué de la théorie d'Everett et appliquer les propriétés (i) et (ii). C'est un point de vue assez répandu, même si la relation ainsi créée reste quelque peu indirecte : la mémoire de l'observateur et l'environnement externe sont tous deux couplés au "pointeur" (aiguille de mesure de l'appareil), mais on suppose que c'est la nature du second couplage qui détermine la base des états appropriée pour étudier la première interaction et l'intrication produite. En d'autres termes, la base pertinente pour la mémoire n'est pas déterminée par son couplage avec l'objet observé, mais par le couplage de ce dernier avec un troisième partenaire (il semblerait irréaliste de considérer que la mémoire est le seul environnement agissant sur le pointeur). Ceci revient à postuler des propriétés communes concernant les bases préférées associées aux deux couplages.

Dans la version "interprétation des mondes multiples", souvent ce sont spécifiquement les opérations de mesure qui sont considérées comme à l'origine des ramifications du vecteur d'état ; on conserve alors la notion de mesure de l'interprétation de Copenhague. Dans l'interprétation des "many-minds", la ramification se produit au niveau de la prise de conscience des observateurs ; on arrive alors à un point de vue proche de l'interprétation de Wigner faisant intervenir la prise de conscience (§§ A-1-b de ce chapitre et C du Chapitre II). Enfin, comme chaque branche du vecteur d'état met en jeu une histoire différente de l'Univers, il est aussi relativement naturel de combiner l'interprétation d'Everett avec celle des histoires décohérentes (§ G).

### M-3. Discussion

Nous discutons maintenant l'application de l'interprétation d'Everett dans quelques cas pratiques qui permettent d'en mieux comprendre le contenu. Nous rendons compte ensuite brièvement de quelques opinions critiques qui ont été exprimées sur le sujet.

#### M-3-a. Expérience EPRB, localité, variables externes

Comment apparaît une expérience EPRB dans ce point de vue ? Dans l'interprétation de Bohm, nous avons insisté sur le rôle des analyseurs de Stern et Gerlach ; dans l'interprétation de la dynamique de Schrödinger modifiée, sur l'évolution non linéaire des détecteurs et sur la décohérence. Ici nous devons mettre en avant les corrélations avec le monde extérieur qui prennent place et mettent en jeu les mémoires conscientes des deux observateurs. Le vecteur d'état va effectivement développer sa chaîne de von Neumann à travers les analyseurs et les détecteurs et, à un certain point, les observateurs dont la mémoire enregistre les résultats. Pour chaque choix des paramètres expérimentaux $a$ et $b$, quatre branches du vecteur d'état coexistent donc ; chaque branche dépend explicitement des deux paramètres, et on ne peut pas écrire mathématiquement de vecteur d'état qui soit relatif à une région de l'espace et qui ne dépendrait seulement que de $a$, ou de $b$. Or, dans l'interprétation d'Everett, le vecteur d'état fournit la représentation la plus directe de la réalité, de sorte que l'expression même d'un vecteur d'état intriqué implique automatiquement une description non locale de cette réalité. Quant aux observateurs Alice et Bob, ils sont eux-mêmes pris dans une chaîne de von Neumann où chacune des composantes dépend à la fois de $a$ et de $b$, de sorte que le choix de $a$ a une influence à distance sur ce qu'enregistre la mémoire de Bob et réciproquement. Il est donc clair que l'interprétation d'Everett implique une description intrinsèquement fortement non locale de la réalité [57].

Une question qui se pose naturellement est l'existence, ou non, de la notion de "variables externes" à la théorie dans le cadre de cette interprétation (*cf.* discussion et citation de Bell au § C-1-c du Chapitre IV). Les mémoires des observateurs sont considérées comme des registres dont le fonctionnement relève de l'équation déterministe de Schrödinger. Faut-il cependant considérer que ces observateurs conservent un libre arbitre, de sorte que les paramètres de mesure $a$ et $b$ peuvent effectivement être choisis arbitrairement, ou au contraire que ces choix sont déterministes au même titre que le fonctionnement des mémoires ? Dans le second cas, on arrive à un cadre "superdéterministe" d'où la notion de variables externes à la théorie disparaît, de sorte que la démonstration des inégalités de Bell devient impossible ; toutes les discussions que nous avons menées sur les tests expérimentaux de la localité perdent alors leur sens, les paramètres $a$ et $b$ pouvant être considérés comme des conséquences d'une cause commune fluctuante dans le passé.

[57] Cependant, si l'on considère le flux d'information se produisant lors de l'évolution de Schrödinger/Heisenberg d'un système de qubits reproduisant une expérience EPR, on est conduit à des équations qui restent locales [702]. Les auteurs de cette référence en concluent qu'une violation des inégalités de Bell remet en cause le fait qu'on puisse attribuer des variables stochastiques aux résultats des expériences, ce qui s'apparente à remettre en cause la contrafactualité (ou le réalisme EPR).

### M-3-b. Cosmologie

Nous avons vu plus haut que les différentes branches du vecteur d'état de l'Univers sont en principe indépendantes. Alors, par construction, l'interprétation d'Everett conduit à des prédictions expérimentales qui sont identiques à celles de l'interprétation standard ; en ce sens, elle n'est pas réfutable. DeWitt [16] considère même que cette interprétation est une simple conséquence du formalisme : après avoir posé la question "la solution du dilemme de l'indéterminisme pourrait-elle être un univers où les expériences fournissent en réalité tous les résultats possibles au lieu d'un seul ?" il affirme que "le formalisme mathématique de la théorie quantique est capable de fournir sa propre interprétation" – voir également un intéressant débat contradictoire [19] suscité directement par la publication de ce point de vue. Il considère également que ce point de vue est une nécessité[58] en cosmologie quantique : "L'interprétation d'Everett a été adoptée par l'auteur [Bryce DeWitt] par simple nécessité pratique : il n'en connaît aucune autre. Tout au moins, c'est la seule qu'il connaisse qui n'impose ni limitations artificielles ni métaphysique floue tout en restant capable de servir aux besoins variés de la cosmologie quantique, de la physique quantique mésoscopique, et de la discipline en chantier qu'est la physique quantique" (page 144 de [703]).

On comprend bien que prendre en compte la fonction d'onde de l'Univers soit naturel dans l'étude de cet univers comme un tout. De façon générale, l'idée d'univers multiples n'est pas étrangère à l'astrophysique et à la cosmologie. Elle a parfois été évoquée pour expliquer l'existence de la matière noire et de l'énergie noire ; dans le cadre de la théorie d'Everett, on pourrait dans ce but supposer l'existence d'une certaine interaction entre les diverses branches du vecteur d'état de l'Univers. On a également spéculé l'existence d'univers multiples dans le contexte du "principe anthropique" (on suppose que l'état de l'Univers contient de nombreuses branches où les conditions physiques sont telles que l'apparition d'êtres pensants n'est pas possible ; cependant l'humanité ne peut effectuer d'observations que dans la petite proportion de ces branches où cette apparition a été possible, donc dans des univers aux propriétés très particulières. Pour une revue des univers parallèles et des mondes multiples dans le contexte de la cosmologie, voir les articles de Tegmark [704], qui insiste sur le fait que "L'existence d'univers parallèles n'est pas une théorie, mais une prédiction de certaines théories". Il semble effectivement que la majorité des physiciens spécialistes de cosmologie quantique aient une nette préférence pour l'interprétation d'Everett [705].

[58] Il existe toutefois d'autres interprétations, comme celles qui font intervenir une dynamique de Schrödinger modifiée (§ K), qui permettent de prendre en compte le vecteur d'état de l'Univers.

#### M-3-c. Critiques

Au premier contact, l'interprétation d'Everett peut apparaître comme une belle unification dans un cadre relativement simple, ce qui la rend a priori séduisante ; mais, lors d'une étude plus approfondie, un certain nombre de physiciens considèrent qu'elle est difficile à vraiment assimiler, ce qui a conduit à des critiques.

Prenons par exemple l'expérience de "comptage de photons en temps réel" décrite au § C du Chapitre X, où l'on observe des marches horizontales séparées pas des changements soudains (sauts) du nombre de photons mesurés. Bien sûr, la solution de l'équation de Schrödinger ne présente aucune marche ou saut quantique vertical sur la courbe : c'est juste une exponentielle décroissante parfaitement continue. Dans ces conditions, comment la théorie d'Everett explique-t-elle la présence de marches horizontales séparées par des parties verticales, comme celles de la Figure X.5 ? Dans cette théorie, les marches et sauts observés n'ont aucune existence réelle, puisqu'elles n'existent pas dans le vecteur d'état total ; ce ne sont que le résultat de la perception qu'a chaque observateur des enregistrements contenus dans ses propres registres mémoire. A chaque instant $t$, chacun d'entre eux doit donc se diviser sur des composantes différentes du vecteur d'état, suivant sa perception de l'arrivée ou non d'un saut. Cette division se produit autant de fois qu'une observation est réalisée, donc a priori chaque fois qu'un atome traverse la cavité. Mais, comme les atomes eux-mêmes des objets quantiques délocalisés arrivant en flux continu, le temps où ils sont détectés résulte lui aussi d'une mesure quantique ; il est aléatoire. La division se produit donc en fait à tous les instants. Les sauts apparents ne se produisent dans les registres mémoire que dans chaque branche, et à des instants différents. L'enregistrement de la Figure X.5 ne montre pas ce qui s'est réellement produit pendant l'expérience, mais juste le contenu perceptif particulier d'un registre mémoire, parmi une infinité d'autres perceptions possibles. Ce schéma peut-il être considéré comme une description satisfaisante de l'expérience ? Devons-nous considérer que les sauts quantiques observés ne sont pas réels, mais seulement des effets perceptifs ? En tout cas, on obtient ainsi une description bien différente de celle que donnent habituellement les physiciens de l'acquisition automatique de résultats expérimentaux. L'interprétation d'Everett semble augmenter la distance entre théorie et expérience en physique.

Quant à Bell, il écrit dans [706] : "l'élimination d'éléments arbitraires et de caractère peu essentiel de la théorie d'Everett nous ramène aux concepts de De Broglie, tout en les éclairant". Effectivement, alors que l'on considère souvent l'interprétation d'Everett comme l'exacte opposée de celle de De Broglie et Bohm, souvent vue comme plus naïve, les deux sont en fait assez similaires. En effet, l'ensemble des ondes vides bohmiennes, avec l'onde non vide, reconstruit exactement le même vecteur d'état que dans l'interprétation d'Everett.

De plus, quand un observateur d'Everett examine le contenu de sa propre mémoire après avoir effectué une série d'expériences, il a accès à une branche unique du vecteur d'état prise parmi toutes celles offertes par ses ramifications lors des mesures. Or cette branche peut tout aussi bien être définie par une trajectoire bohmienne dans l'espace des configurations ; lors de chaque mesure, la trajectoire indique directement quelle branche a été sélectionnée par le point dans l'espace des phases pour "surfer" sur elle. On pourrait donc dire que la théorie dBB n'est donc rien d'autre que la théorie d'Everett à laquelle on a ajouté un indicateur (les positions) pour désigner la branche du vecteur d'état qui doit être prise en considération. La seule différence est que la série de ramifications du vecteur d'état d'Everett ne donne qu'une vue floue de la trajectoire, alors qu'elle est définie avec une précision parfaite en théorie de Bohm. Mais cette différence reste sans conséquence pratique : dans les deux cas, l'observateur a accès à la même séquence de résultats, rien de plus. Dans [55], Bell ajoute : "cette multiplication des univers... ne remplit aucune fonction utile dans la théorie, et peut tout simplement être abandonnée sans répercussions"[59].

Peres l'appelle "une théorie bizarre" [388] qu'il considère comme peu économique (voir citation ci-dessus, § M-2). Leggett discute cette interprétation dans les termes suivants [105] : "Les branches de la superposition dont nous ne sommes pas conscients sont considérées comme 'tout aussi réelles', bien que ce que ces mots, visiblement de l'anglais, sont supposés signifier ... ne soit pas très clair". Une question qui se pose est ce qu'il faut attendre d'une théorie physique ; doit-elle expliquer la façon dont nous percevons les résultats des expériences, et si oui de quelle nature devrait être une telle explication ? Comme l'accent est mis, non sur les propriétés physiques en elles-mêmes, mais plutôt sur les effets qu'elles produisent sur nos mémoires, des notions comme celles de perception (la Ref. [688] parle de la "trajectoire de la configuration de la mémoire") proches des neurosciences (les propriétés de l'introspection) commencent à jouer un rôle dans la théorie. Ce qui est clair, en tous cas, est que l'interprétation d'Everett est esthétiquement séduisante mais reste par certains aspects profondément troublante pour l'esprit. La population humaine est faite de milliards d'individus qui, probablement, sont tous en train d'effectuer des mesures sans même s'en rendre compte à chaque instant – devons-nous imaginer une réalité physique de l'Univers qui se ramifie constamment et exponentiellement avec une rapidité qui défie l'imagination ?

[59] Si l'on supprime à la main toutes les branches d'univers sauf une, on arrive à une interprétation très proche de l'interprétation pragmatique discutée au § A-1-a de ce chapitre.

## Conclusion

La mécanique quantique est, avec la relativité, l'essence de l'immense révolution conceptuelle de la physique du XX$^{e}$ siècle. Les progrès, tant théoriques qu'expérimentaux, ont été extraordinaires. De nouvelles percées se sont constamment produites, allant de la pure théorie à des applications très concrètes ; elles ont engendré des milliers de dispositifs et d'appareils qu'il n'était même pas possible de concevoir avant la mécanique quantique. On parle parfois de "seconde révolution quantique" pour caractériser la floraison d'idées nouvelles et d'expériences qui sont apparues au cours des dernières décennies dans le cadre général de la mécanique quantique. De plus, notre compréhension actuelle de l'Univers fait intervenir la mécanique quantique, presque à chaque étape.

Ceci dit, dans quelle mesure comprenons-nous véritablement cette théorie merveilleuse ? Nous comprenons fort bien ses méthodes, et nous savons utiliser son formalisme pour faire des prédictions dans un nombre immense de situations, même dans des cas qui sont extrêmement compliqués. De fait, la mécanique quantique a fourni bien des prédictions contre-intuitives et surprenantes qui, initialement, semblaient difficiles à croire, mais qui se sont trouvées parfaitement vérifiées par les expériences – même si parfois les vérifications sont venues bien plus tard. Une illustration frappante est l'observation de la condensation de Bose-Einstein dans des gaz dilués, prédite par Einstein en 1925 [707], mais observée seulement en 1995 [708, 709]. Le phénomène se produit à des températures extrêmement basses (bien plus basses que celle du rayonnement cosmique fossile) de sorte que, très probablement, il ne s'était jamais produit dans toute l'histoire de l'Univers avant 1995 ! Il était juste dans les limbes, attendant patiemment, caché dans les équations de la mécanique quantique, jusqu'au jour où il a été réalisé. C'est une belle illustration de la puissance prédictive extraordinaire de la physique en général et de la mécanique quantique en particulier. Heinrich Hertz, qui joua un rôle tellement crucial dans la compréhension des ondes électromagnétiques au XIX$^{e}$ siècle (ondes hertziennes) a remarqué que, parfois, les équations de la physique sont "plus intelligentes" que la personne qui les a inventées : "Il est impossible d'étudier cette étonnante théorie sans ressentir parfois l'impression que les formules mathématiques ont leur vie propre, étant plus intelligentes que nous et que leur inventeur lui-même, de sorte qu'elles nous fournissent plus que ce qui a initialement été mis en elles" [710]. La remarque s'applique sans nul doute aux équations de la mécanique quantique (en particulier, au principe de superposition) : elles contiennent probablement encore plus de substance que leurs inventeurs ne le pensaient, par exemple en termes de types inattendus de corrélations, d'intrication, etc. Il est véritablement incroyable de voir que, dans tous les cas actuellement connus, les équations ont prédit des résultats corrects.

Mais, conceptuellement, si la question est de savoir si nous comprenons vraiment cette théorie, la réponse est moins évidente, comme l'illustre bien la variété des interprétations proposées par les physiciens. Certes, l'équation de Schrödinger atteint à la perfection l'objectif initial qui a motivé l'introduction de la mécanique quantique : elle explique la stabilité des atomes, molécules, et de la matière qui nous entoure en général, ce qui est impossible dans le cadre de la mécanique classique. Mais, emportée par ses succès innombrables, la même équation semble vouloir aller trop loin lorsqu'elle étend ses superpositions linéaires jusqu'au monde macroscopique. Elle remet alors en question l'unicité de nos observations et l'existence même d'un monde classique à notre échelle. Certaines interprétations (Everett par exemple) considèrent que cette unicité n'est pas réelle, mais juste une illusion due à la façon dont nos mémoires enregistrent les événements. D'autres proposent de modifier l'équation de Schrödinger pour supprimer ces superpositions linéaires macroscopiques qui posent problème, et font de la fonction d'onde une onde réelle qui se propage dans l'espace des configurations. D'autres encore (Bohm par exemple) introduisent des variables supplémentaires pour résoudre le problème de l'unicité macroscopique. Dans ce contexte, un enjeu important est de savoir si la forme actuelle de la théorie est complète, ou incomplète comme le pensait Einstein. Si elle l'est, il ne sera jamais possible dans l'avenir de décrire les propriétés d'une particule unique mieux que par une fonction d'onde ; c'est la position des partisans de l'interprétation standard. Si elle ne l'est pas, les générations futures seront probablement capables d'aller plus loin et d'introduire une description plus puissante.

Nous avons vu à quel point l'argument EPR est semblable au raisonnement de Gregor Mendel , qui à partir d'observations effectuées entre 1854 et 1863 l'a conduit à la découverte de composants spécifiques, les gènes (le mot n'est en fait apparu que plus tard, en 1909). Ces gènes, qu'il était impossible de voir directement, se sont révélés correspondre à des composants microscopiques cachés au sein des plantes qu'il étudiait. Dans de tels cas, on induit l'existence d'éléments de réalité microscopiques à partir d'observations macroscopiques. Mendel a été capable d'en déduire des règles auxquelles les gènes obéissent lorsqu'ils se combinent pour donner lieu à une nouvelle génération de plantes, mais bien évidemment il lui était totalement impossible d'avoir la moindre idée de leur nature à un niveau microscopique (ou même, s'ils étaient microscopiques ou macroscopiques, mais trop petits pour être vus avec les techniques disponibles à l'époque). Il a fallu presque un siècle avant que O.T. Avery et al. (1944) puissent montrer que les objets en question étaient contenus dans des molécules d'ADN ; plus tard (1953) R. Franklin, F. Crick et J. Watson ont mis en évidence la subtilité de la structure microscopique de ces objets, les gènes correspondant à des dispositions élaborées de bases nucléiques cachées au milieu de la double hélice de molécules d'ADN. Nous savons donc maintenant que, en un sens, plutôt que des objets micro-

scopiques simples, les gènes sont des arrangements de tels objets, et que toute la machine biologique qui les lit va très au-delà de tout ce que l'on pouvait imaginer à l'époque de Mendel. De même, si la mécanique quantique est un jour complétée par des variables supplémentaires, ces variables ne seront probablement pas un prolongement simple d'autres variables que nous utilisons déjà en physique, mais de nature réellement différente. Bien évidemment, ceci n'est à l'heure actuelle que spéculation, et rien ne garantit que les histoires de la biologie et de la physique soient parallèles !

Une comparaison naturelle qui vient à l'esprit est avec la relativité restreinte, car ni la mécanique quantique ni la relativité ne sont intuitives ; l'expérience prouve que toutes deux, lorsqu'on les découvre, demandent beaucoup de réflexion pour être assimilées. Mais la similarité ne va pas plus loin : en relativité, plus on traite de problèmes relativistes, plus les concepts deviennent clairs (à un certain point, on acquiert le sentiment qu'elle est une sorte de nécessité logique !) ; on peut difficilement en dire autant de la mécanique quantique, qui ne perd jamais son mystère. Toutefois, parmi toutes les constructions de l'esprit humain, on peut considérer que la mécanique quantique est la plus couronnée de succès de toutes puisque, malgré tous les efforts des physiciens depuis des décennies pour lui trouver des limites de validité (comme ils le font pour toutes les autres théories), et un nombre immense de spéculations, personne n'a pour le moment réussi à trouver le moindre signe clair de l'existence de ces limites. Le futur nous dira si c'est possible, les surprises ne sont jamais à exclure !

# Chapitre XII

# Annexe : Outils mathématiques de base de la mécanique quantique

Ce chapitre en annexe rappelle et résume le formalisme mathématique de base utilisé en mécanique quantique, avec une courte bibliographie séparée placée directement à la fin. C'est donc plutôt un complément destiné aux lecteurs pour lesquels ce qui a été rappelé au passage au cours de l'ouvrage ne serait pas suffisant ; chacun pourra ainsi s'y reporter en cours de lecture, pour en savoir un peu plus sur les outils mathématiques utilisés. Un certain nombre de résultats sont énoncés sans que les démonstrations soient explicitées ; on les trouvera par exemple dans les Chapitres II et IV de la Ref. $[XII-1]$ (ce chapitre possède sa propre liste de références situées à la page 459, distinctes de celles de la liste générale, et reconnaissables par le fait que le renvoi commence par $[XII-]$ ). Il existe de nombreux ouvrages de mécanique quantique où son formalisme général est présenté de façon plus complète, comme dans le Chapitre VII de la Ref. $[XII-2]$, le Chapitre 3 de la Ref. $[XII-3]$, ou encore le Chapitre 2 de la Ref. $[XII-4]$.

Nous commençons par résumer le cadre général et le formalisme quantique s'appliquant à un système physique quelconque (§ A), en utilisant la notation de Dirac ; nous étudions ensuite comment ce formalisme traite la réunion de plusieurs systèmes physiques (§ B) ; enfin nous traitons quelques cas particuliers simples (§ C), comme celui d'une particule unique dans un potentiel extérieur, avec ou sans spin ; le lecteur peu enclin à une présentation générale et préférant raisonner en termes de fonctions d'onde pourra commencer directement par ce paragraphe s'il le désire.

## A. Système physique général

Le formalisme général de la mécanique quantique s'applique à tous les systèmes physiques, qu'ils comprennent une seule particule ou au contraire de nombreuses particules de natures diverses, un ou plusieurs champs, etc.

### A-1. Espace des états quantiques

En mécanique quantique, l'état à chaque instant d'un système physique est défini par un vecteur d'état qui, en notation de Dirac, est noté $|\Psi\rangle$, ou $|\Psi(t)\rangle$ si l'on désire expliciter la dépendance en temps. Ce vecteur $|\Psi\rangle$ appartient à un espace vectoriel des états $\mathcal{E}$ complexe, qui peut avoir une structure plus ou moins compliquée selon le système considéré ; en notation de Dirac, on appelle souvent "kets" les vecteurs de $\mathcal{E}$. Nous verrons plus bas (§ A-3) comment on peut calculer les propriétés physiques du système à partir de $|\Psi\rangle$. L'espace $\mathcal{E}$ est appelé, soit "espace des états", soit également "espace de Hilbert" pour des raisons historiques.

Par définition d'un espace vectoriel complexe, toute combinaison linéaire avec des coefficients complexes quelconques $\alpha$, $\beta$, ... de vecteurs $|\Psi_1\rangle$, $|\Psi_2\rangle$, ... appartenant à $\mathcal{E}$ :

$$\alpha\,|\Psi_1\rangle + \beta\,|\Psi_2\rangle + ... \tag{XII-1}$$

est un autre vecteur $|\Psi\rangle$ appartenant au même espace. Le "principe de superposition" indique que toute combinaison linéaire de vecteurs d'état donne également un autre vecteur d'état possible pour le système physique considéré ; ce principe a de nombreuses conséquences physiques dont plusieurs sont discutées dans cet ouvrage.

Dans cet espace on définit le produit scalaire de deux vecteurs d'état ; le produit scalaire du vecteur $|\Psi\rangle$ par le vecteur $|\Phi\rangle$ est un nombre en général complexe que l'on écrit :

$$\langle\Phi\,|\Psi\rangle \tag{XII-2}$$

Ce nombre dépend linéairement de $|\Psi\rangle$ (il est multiplié par $\lambda$ si l'on multiplie $|\Psi\rangle$ par $\lambda$) et antilinéairement de $|\Phi\rangle$ (il est multiplié par le complexe conjugué $\mu^*$ de $\mu$ si l'on multiplie $|\Phi\rangle$ par $\mu$). En notation de Dirac, on appelle souvent "bra" l'objet mathématique $\langle\Phi|$.

Une base $\{|u_i\rangle\}$ de $\mathcal{E}$ est un ensemble de vecteurs $|u_i\rangle$ qui permet d'écrire tout vecteur de $\mathcal{E}$ selon la décomposition linéaire :

$$|\Psi\rangle = \sum_i x_i\ |u_i\rangle \tag{XII-3}$$

et de façon unique ; les $x_i$ sont appelés les composantes de $|\Psi\rangle$ dans la base correspondante.

Si la dimension de l'espace des états est finie et égale à $P$, le nombre de vecteurs $|u_i\rangle$ (et donc de termes dans cette somme) est nécessairement

égal à $P$. La base $\{|u_i\rangle\}$ est orthonormée si les produits scalaires entre ses vecteurs satisfont aux relations :

$$\langle u_i \,|u_j\rangle = \delta_{i,j} \tag{XII-4}$$

où $\delta_{i,j}$ est le delta de Kronecker. Avec une base orthonormée, on montre facilement que les composantes $x_i$ apparaissant dans (XII-3) sont données par :

$$x_i = \langle u_i \,|\Psi\rangle \tag{XII-5}$$

de sorte que :

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{P} \langle u_i \,|\Psi\rangle \;\; |u_i\rangle \tag{XII-6}$$

On a également :

$$\langle \Psi \,|\Psi\rangle = \sum_{i}^{P} |x_i|^2 \qquad \langle \Phi \,|\Psi\rangle = \sum_{i}^{P} y_i^* \; x_i \tag{XII-7}$$

où les $y_i$ sont les composantes du ket $|\Phi\rangle$.

Si la dimension de l'espace des états est infinie, seuls les kets normalisables représentent un état physique, c'est-à-dire ceux tels que :

$$\sum_{i} |x_i|^2 = \text{ nombre fini} \tag{XII-8}$$

Certaines "bases"[1] sont, non seulement infinies, mais également continues, ce qui signifie que les sommes discrètes de (XII-3), (XII-6) et (XII-7) sont toutes remplacées par des intégrales ; il faut également dans (XII-4) remplacer le delta de Kronecker par une distribution delta de Dirac.

### A-2. Opérateurs

On définit également l'action d'opérateurs linéaires dans l'espace des états. Un opérateur $A$ est linéaire lorsque l'action de $A$ sur le vecteur $\alpha\,|\Psi\rangle + \beta\,|\Phi\rangle$, où $\alpha$ et $\beta$ sont des constantes complexes, est donnée par :

$$A\,[\alpha\,|\Psi\rangle + \beta\,|\Phi\rangle] = \alpha A\,|\Psi\rangle + \beta A\,|\Phi\rangle \tag{XII-9}$$

Dans une base finie quelconque, l'opérateur $A$ peut s'écrire comme une matrice $P \times P$, dont les éléments de matrice sont notés $A_{i,j}$ ; les colonnes de cette matrice contiennent les composantes des transformés des vecteurs de

[1] Les vecteurs de bases continues ne sont pas normalisables et n'appartiennent donc pas véritablement à $\mathcal{E}$, ce qui explique les guillemets ; voir par exemple la discussion du § A-3 de la Ref. $[XII-1]$.

base sous l'action de $A$. Dans une base orthonormée $\{|u_i\rangle\}$, les éléments de matrice $A_{i,j}$ sont donnés par le produit scalaire de $A\,|u_j\rangle$ par $|u_i\rangle$ :

$$A_{i,j} = \langle u_i|\, A\,|u_j\rangle \tag{XII-10}$$

On peut définir aisément le produit d'un opérateur par une constante complexe $\alpha$, la somme d'opérateurs, ou plus généralement la combinaison linéaire $\alpha A + \beta B$ de deux opérateurs $A$ et $B$ par :

$$[\alpha A + \beta B]\,|\Psi\rangle = \alpha\,(A\,|\Psi\rangle) + \beta\,(B\,|\Psi\rangle) \tag{XII-11}$$

#### A-2-a. Produit, commutateur, valeurs propres

Le produit de deux opérateurs $A$ et $B$ est défini par son action sur un ket quelconque $|\Psi\rangle$ :

$$AB\,\big|\Psi\big\rangle = A\,\big|\Psi'\big\rangle \quad \text{où :} \qquad \big|\Psi'\big\rangle = B\,\big|\Psi\big\rangle \tag{XII-12}$$

Le produit $AB$ correspond donc simplement à l'action de l'opérateur $B$ suivie de celle de $A$. La matrice représentant l'opérateur produit $C = AB$ est simplement donnée par le produit des matrices associées à $A$ et $B$, avec la règle habituelle de multiplication des matrices (multiplication des lignes de la matrice de gauche par les colonnes de la matrice de droite). L'opérateur produit $AB$ est en général distinct de l'opérateur produit dans l'ordre inverse $BA$ ; on appelle commutateur de $A$ et $B$ l'opérateur noté $[A, B]$ et défini par :

$$[A, B] = AB - BA \tag{XII-13}$$

Si ce commutateur est nul, on dit que $A$ et $B$ commutent.

Les vecteurs propres $|a_k\rangle$ de $A$ associés aux valeurs propres $a_k$ sont définis par le fait que l'action de $A$ sur ces vecteurs propres est une simple multiplication par le nombre $a_k$ :

$$A\,|a_k\rangle = a_k\,|a_k\rangle \tag{XII-14}$$

Une façon d'obtenir les valeurs propres et les vecteurs propres de $A$ est de procéder à la diagonalisation de la matrice des coefficients $A_{i,j}$ ; pour certaines matrices, la diagonalisation complète n'est d'ailleurs pas toujours possible. Si une valeur propre donne lieu à plusieurs vecteurs propres qui ne sont pas proportionnels, on dit qu'elle est "dégénérée".

#### A-2-b. Opérateurs hermitiques et unitaires

(i) On associe à tout opérateur $A$ un opérateur hermitique conjugué $A^\dagger$ dont les éléments de matrice sont les complexes conjugués de ceux de $A$, avec inversion des indices de lignes et colonnes :

$$\langle u_i|\, A^\dagger\,|u_j\rangle = \langle u_j|\, A\,|u_i\rangle^* \tag{XII-15}$$

Un opérateur $A$ est hermitique s'il est égal à son propre hermitique conjugué, $A = A^\dagger$, c'est-à-dire si tous ses éléments de matrice satisfont les relations[2] :

$$A_{i,j} = [A_{j,i}]^* \tag{XII-16}$$

(en d'autres termes, les éléments de matrice qui sont symétriques par rapport à la première diagonale de la matrice sont complexes conjugués). On peut montrer qu'un opérateur hermitique est toujours diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont réelles (ce qui n'implique pas qu'elles soient toutes distinctes : certaines peuvent être dégénérées).

(ii) Un opérateur linéaire $U$ est dit unitaire si le produit de son hermitique conjugué par $U$ donne l'opérateur identité :

$$U^\dagger U = 1 \tag{XII-17}$$

Considérons deux kets quelconques $|\Phi\rangle$ et $|\Psi\rangle$ de l'espace des états et l'action de $U$ sur ces kets :

$$\left|\Phi'\right\rangle = U\,|\Phi\rangle \qquad \text{et} \qquad \left|\Psi'\right\rangle = U\,|\Psi\rangle \tag{XII-18}$$

La relation (XII-17) montre que :

$$\left\langle\Phi'\,\middle|\,\Psi'\right\rangle = \langle\Phi|\,U^\dagger U\,|\Psi\rangle = \langle\Phi\,|\Psi\rangle \tag{XII-19}$$

Ce résultat signifie que l'action d'un opérateur unitaire ne change pas le produit scalaire (et donc pas non plus la norme d'un ket). Ainsi, un opérateur unitaire transforme une base orthonormée quelconque en une autre base orthonormée de l'espace des états. Inversement, tout changement de base orthonormée définit un opérateur unitaire. Cette propriété peut être utilisée comme une autre définition possible des opérateurs unitaires.

La matrice associée à un opérateur unitaire est appelée une matrice unitaire. Ses colonnes contiennent les composantes des transformés $U\,|u_i\rangle$ des vecteurs de base dans cette même base. L'unitarité d'une matrice peut facilement être vérifiée en examinant successivement les couples de colonnes $i$ et $j$, en prenant le complexe conjugué de la première colonne, et en calculant le produit ligne par ligne ; le produit doit être un delta de Kronecker $\delta_{i,j}$ quel que soit le choix de $i$ et $j$.

Un opérateur unitaire peut toujours être diagonalisé dans une base orthogonale, comme un opérateur hermitique. Ses valeurs propres sont toutes de la forme $e^{ia}$, où $a$ est un nombre réel. Une conséquence est que $U$ peut toujours être écrit sous la forme $U = e^{iA}$, où $A$ est un opérateur hermitique ;

[2] On montre que, si cette relation est satisfaite dans la base $\{|u_i\rangle\}$, elle l'est également dans toute autre base orthonormée.

les opérateurs unitaires sont, en quelque sorte, les exponentielles complexes des opérateurs hermitiques.

Il est facile de montrer à partir de (XII-17) que le produit d'un nombre quelconque d'opérateurs unitaires est un autre opérateur unitaire ; les opérateurs unitaires peuvent s'enchaîner sans perdre l'unitarité. Toutefois, deux opérateurs unitaires $U_1$ et $U_2$ ne commutent pas en général.

#### A-2-c. Trace d'un opérateur

La trace d'un opérateur est un nombre, la somme de ses éléments de matrice diagonaux :

$$Tr\{A\} = \sum_i A_{ii} \tag{XII-20}$$

On montre que la valeur de la trace est indépendante de la base choisie pour la calculer. De plus, on montre que les opérateurs peuvent être permutés de façon circulaire sous la trace ; pour trois opérateurs $A$, $B$ et $C$ quelconques :

$$Tr\{ABC\} = Tr\{BCA\} = Tr\{CAB\} \tag{XII-21}$$

### A-3. Probabilités

Les opérateurs hermitiques jouent un rôle particulièrement important en mécanique quantique, car toute grandeur physique qu'on peut mesurer sur le système (comme son énergie, sa quantité de mouvement, son moment angulaire, etc.) correspond à un opérateur hermitique agissant dans son espace des états $\mathcal{E}$.

Nous avons vu que, lorsque $A$ est hermitique, il est "diagonalisable". Ceci signifie qu'on peut trouver une base de vecteurs de $\mathcal{E}$ qui sont tous des vecteurs propres $|a_k\rangle$ de $A$ associés aux valeurs propres réelles $a_k$ ; l'opérateur est alors représenté dans cette base par une matrice diagonale (dont tous les éléments sont nuls, sauf les éléments diagonaux qui sont les $a_k$).

Un postulat fondamental de la mécanique quantique est la règle des probabilités de Born. Elle a été rappelée au Chapitre I (§ B-1-c) mais, pour la cohérence de ce chapitre annexe, nous la rappelons brièvement ici. La règle dit que, lorsque la grandeur associée à l'opérateur $A$ est mesurée sur un système physique décrit par l'état normalisé $|\Psi\rangle$ :

(i) les seuls résultats possibles sont les valeurs propres $a_k$ ;

(ii) la probabilité $\mathcal{P}(a_k)$ de trouver un résultat particulier $a_k$ est donnée par le carré du module du produit scalaire de $|\Psi\rangle$ par le vecteur propre normé correspondant :

$$\mathcal{P}(a_k) = |\langle a_k\,|\Psi\rangle|^2 \tag{XII-22}$$

Pour simplifier, nous avons supposé qu'un seul vecteur propre correspond à la valeur propre $a_k$ (valeur propre non dégénérée) ; si plusieurs vecteurs propres distincts lui correspondent, il faut ajouter les probabilités (XII-22)

associées à tous les vecteurs propres orthonormés associés à $a_k$, comme dans l'équation (I-4).

Si l'on dispose d'un ensemble de systèmes préparés dans le même état $|\Psi\rangle$, et si l'on effectue un grand nombre de mesures de la grandeur physique associée à l'opérateur $A$, on obtient en général des valeurs différentes à chaque mesure, mais on peut aussi en déduire une valeur moyenne qu'on note $\langle A\rangle$. A partir de la règle de Born, un calcul simple montre que :

$$\langle A\rangle = \sum_k a_k \, \mathcal{P}(a_k) = \langle\Psi| \, A \, |\Psi\rangle \tag{XII-23}$$

Considérons l'opérateur :

$$P_\Phi = |\Phi\rangle \, \langle\Phi| \tag{XII-24}$$

où $|\Phi\rangle$ est supposé normé ($\langle\Phi \, |\Phi\rangle = 1$). Son action sur un ket quelconque $|\Psi\rangle$ est :

$$P_\Phi \, |\Psi\rangle = |\Phi\rangle \, \langle\Phi \, |\Psi\rangle = c \, |\Phi\rangle \tag{XII-25}$$

où $c = \langle\Phi \, |\Psi\rangle$ est un nombre. Tout ket est donc transformé par action de $P_\Phi$ en un ket proportionnel à $|\Phi\rangle$ ; ceci indique que $P$ est le projecteur sur l'état $|\Phi\rangle$, satisfaisant à la relation des projecteurs $P^2 = P$. Notons maintenant $P(a_k)$ le projecteur sur le vecteur propre $|a_k\rangle$ :

$$P(a_k) = |a_k\rangle \, \langle a_k| \tag{XII-26}$$

lorsque $a_k$ est non dégénérée ; si elle est dégénérée, $P(a_k)$ est défini comme la somme des projecteurs sur un ensemble de vecteurs propres orthonormés correspondant à cette même valeur propre. L'application de la règle de Born pour les probabilités montre que la probabilité d'obtenir le résultat $a_k$ est alors donnée par :

$$\mathcal{P}(a_k) = \langle\Psi| \, P(a_k) \, |\Psi\rangle = \langle P(a_k)\rangle \tag{XII-27}$$

### A-4. Evolution dans le temps

Jusqu'ici nous n'avons considéré que les propriétés du système physique à un seul instant. Lorsque son évolution dans le temps est prise en compte, le vecteur d'état devient un vecteur $|\Psi(t)\rangle$ dépendant du temps, dont l'évolution est donnée par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \, |\Psi(t)\rangle = H(t) \, |\Psi(t)\rangle \tag{XII-28}$$

où $H(t)$ est l'opérateur hamiltonien à l'instant $t$ (opérateur associé à l'énergie du système) et où $\hbar$ est la constante de Planck $h$ divisée par $2\pi$. Comme cette équation est une équation différentielle du premier ordre en temps, elle

permet de calculer l'évolution temporelle du vecteur d'état à partir d'une valeur initiale quelconque, et conduit à une évolution continue. L'opérateur $H(t)$ est hermitique. Bien sûr, selon le système physique considéré, il peut prendre des formes très diverses, parfois très compliquées, de sorte qu'on ne sait pas nécessairement résoudre exactement l'équation (XII-28) ; cependant elle s'applique toujours.

L'évolution de Schrödinger ne modifie pas la norme du vecteur d'état :

$$i\hbar\frac{d}{dt}\langle\Psi(t)\,|\Psi(t)\rangle = \langle\Psi(t)|\left[H(t)-H^{\dagger}(t)\right]|\Psi(t)\rangle = 0 \qquad \text{(XII-29)}$$

ce qui signifie que la solution $|\Psi(t)\rangle$ à l'instant $t$ de l'équation garde la même norme que l'état initial $|\Psi(t_0)\rangle$, quel que soit ce dernier. De la même façon, on montre immédiatement que le produit scalaire $\langle\Psi_1(t)\,|\Psi_2(t)\rangle$ de deux solutions différentes de l'équation ne varie pas dans le temps, quelles que soient les valeurs initiales de ces solutions à l'instant $t_0$. En d'autres termes, la propagation dans le temps de $t_0$ à $t$ correspond à une évolution unitaire (§ A-2-b), ce qui définit un opérateur unitaire $U(t,t_0)$ :

$$|\Psi(t)\rangle = U(t,t_0)\,|\Psi(t_0)\rangle \qquad \text{(XII-30)}$$

L'équation de Schrödinger (XII-28) devient alors :

$$i\hbar\frac{d}{dt}U(t,t_0) = H(t)\;U(t,t_0) \qquad \text{(XII-31)}$$

avec :

$$U(t_0,t_0) = 1 \qquad \text{(XII-32)}$$

De plus, l'opérateur d'évolution $U(t,t_0)$ entre les instants $t_0$ et $t$ obéit à la relation en chaîne traduisant une évolution entre les instants $t$ et $t''$, suivie par une évolution entre les temps $t''$ et $t'$ :

$$U(t',t) = U(t',t'')\;U(t'',t) \qquad \text{(XII-33)}$$

Si l'hamiltonien $H$ est indépendant du temps, l'opérateur d'évolution est donné par une simple exponentielle :

$$U(t,t_0) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar} \qquad \text{(XII-34)}$$

Il est en effet facile de vérifier que les relations (XII-31) et (XII-32) sont alors satisfaites.

### A-5. Points de vue de Schrödinger et de Heisenberg

Les équations d'évolution temporelle que nous avons écrites ci-dessus appartiennent à ce que l'on appelle souvent le point de vue de Schrödinger, où

le vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ dépend du temps. Nous pouvons toutefois supprimer cette dépendance temporelle en appliquant à $|\Psi(t)\rangle$ l'inverse de la transformation unitaire $U(t,t_0)$. On introduit ainsi le vecteur d'état $|\Psi_H\rangle$ dans le point de vue de Heisenberg par :

$$|\Psi_H(t)\rangle = U^{-1}(t,t_0)\,|\Psi(t)\rangle \tag{XII-35}$$

qui est effectivement indépendant du temps, puisque :

$$|\Psi_H(t)\rangle = U^{-1}(t,t_0)U(t,t_0)\,|\Psi(t_0)\rangle = |\Psi(t_0)\rangle \tag{XII-36}$$

Nous pouvons donc simplifier la notation $|\Psi_H(t)\rangle$ en $|\Psi_H\rangle$. De même, tout opérateur $A$ dans le point de vue de Schrödinger devient dans celui de Heisenberg un opérateur dépendant du temps $A_H\,(t,t_0)$ défini par :

$$A_H\,(t,t_0) = U^{-1}(t,t_0)\;A\;U(t,t_0) \tag{XII-37}$$

Appliquer une transformation unitaire à la fois sur le vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ et les opérateurs ne change pas les valeurs moyennes de ces opérateurs, puisque :

$$\begin{aligned}\langle\Psi_H|\,A_H\,(t,t_0)\,|\Psi_H\rangle &= \langle\Psi(t)|\,U(t,t_0)\;U^{-1}(t,t_0)\;A\;U(t,t_0)\;U^{-1}(t,t_0)\,|\Psi(t)\rangle \\ &= \langle\Psi(t)|\,A\,|\Psi(t)\rangle\end{aligned} \tag{XII-38}$$

En particulier, si nous choisissons $A = P\,(a_k)$ selon la définition (XII-26), nous voyons que la probabilité d'observer un résultat $a_k$ lors d'une mesure de $A$ peut être obtenue de la même façon dans les points de vue de Heisenberg et de Schrödinger. On a donc le choix entre un point de vue où la dépendance en temps est contenue dans le vecteur d'état, et un autre où il reste parfaitement constant mais où la dépendance en temps est transposée aux observables $A$.

### A-6. Opérateur densité

Des expressions comme (XII-22), (XII-23) et (XII-27) ne sont pas linéaires par rapport au vecteur d'état $|\Psi\rangle$. On peut cependant obtenir des expressions linéaires en fonction d'un opérateur appelé "opérateur densité" $\rho$, qui remplace $|\Psi\rangle$.

#### A-6-a. Définition

L'opérateur densité associé à un vecteur d'état normé $|\Psi\rangle$ est le projecteur sur cet état, défini par :

$$\rho = |\Psi\rangle\,\langle\Psi| \tag{XII-39}$$

C'est un opérateur de trace unité[3] :

$$Tr\{\rho\} = 1 \tag{XII-40}$$

et un opérateur hermitique :

$$\rho = \rho^\dagger \tag{XII-41}$$

On peut alors remplacer les expressions (XII-22) et (XII-23) par :

$$\mathcal{P}(a_k) = Tr\{P(a_k)\ \rho\} \tag{XII-42}$$

et :

$$\langle A\rangle = Tr\{A\rho\} \tag{XII-43}$$

L'intérêt de ces expressions est d'être linéaires, ce qui peut permettre une combinaison commode entre les notions de probabilité classique et de probabilité quantique. Supposons en effet que l'état $|\Psi\rangle$ d'un système physique ne soit pas connu, mais que l'on sache qu'il a une probabilité $p_1$ de se trouver dans l'état normé $|\Psi_1\rangle$, une probabilité $p_2$ de se trouver dans l'état normé $|\Psi_2\rangle$,... une probabilité $p_n$ de se trouver dans l'état normé $|\Psi_n\rangle$. Si l'on définit maintenant l'opérateur densité $\rho$ comme la somme des opérateurs densité associés à chacun des états, pondérée par ces probabilités :

$$\rho = \sum_n p_n\ |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n| \tag{XII-44}$$

avec :

$$0 \le p_n \le 1 \qquad ; \qquad \sum_n p_n = 1 \tag{XII-45}$$

les formules (XII-40) à (XII-43) restent valables. Par exemple, la trace (XII-40), calculée dans une base orthonormée quelconque $\{|u_i\rangle\}$, découle de la normalisation des $|\Psi_n\rangle$ et des $p_n$ :

$$Tr\{\rho\} = \sum_i \sum_n p_n\ |\langle\Psi_n\,|u_i\rangle|^2 = \sum_n p_n = 1 \tag{XII-46}$$

#### A-6-b. Etats purs et mélanges statistiques

L'opérateur densité est un opérateur hermitique, défini positif (ou, plus précisément, non négatif) ; chacun de ses éléments diagonaux satisfait :

$$0 \le \langle\Phi|\,\rho\,|\Phi\rangle \le 1 \tag{XII-47}$$

[3] C'est une conséquence de la normalisation de $|\Psi\rangle$ car le calcul de la trace dans une base orthonormée quelconque $\{|u_i\rangle\}$ donne $Tr\{|\Psi\rangle\langle\Psi|\} = \sum_i \langle u_i\,|\Psi\rangle\langle\Psi\,|u_i\rangle$, qui est égal à $\langle\Psi\,|\Psi\rangle = 1$.

quel que soit le ket normé $|\Phi\rangle$. Il suffit pour le voir de remplacer $\rho$ par sa définition (XII-44), d'utiliser l'inégalité de Schwarz, et enfin de prendre en compte la relation (XII-45). C'est donc un opérateur toujours diagonalisable, dont on note $|\theta_m\rangle$ les vecteurs propres et $q_m$ les valeurs propres associées ; ceci permet d'écrire $\rho$ sous la forme :

$$\rho = \sum_m q_m \ |\theta_m\rangle \langle\theta_m| \tag{XII-48}$$

Comme $\langle\theta_m| \rho |\theta_m\rangle = q_m$ est compris entre 0 et 1 – relation (XII-47) – on a :

$$0 \leq q_m \leq 1 \tag{XII-49}$$

Chacune des valeurs propres $q_m$ de $\rho$ est donc comprise entre 0 et 1, et leur somme donne la trace de $\rho$, égale à 1 :

$$\sum_m q_m = \sum \langle\theta_m| \rho |\theta_m\rangle = \sum_{m,n} p_n \ |\langle\Psi_n \ |\theta_m\rangle|^2 = \sum_n p_n = 1 \tag{XII-50}$$

On peut donc interpréter les valeurs propres de $\rho$ comme des probabilités d'occupation des états $|\theta_m\rangle$ ; on retrouve alors une forme semblable à (XII-44), avec toutefois des projecteurs sur des états propres qui sont toujours orthogonaux. De plus, si l'on élève (XII-48) au carré, on obtient :

$$\rho^2 = \sum_m (q_m)^2 \ |\theta_m\rangle \langle\theta_m| \tag{XII-51}$$

On distingue alors deux cas pour l'opérateur densité :

### $\alpha$. *Etat pur*

Si une seule de ses valeurs propres $q_m$ est égale à 1, toutes les autres étant nulles, et un seul terme joue un rôle dans la sommation sur $m$ de (XII-48) ; $\rho$ est donc le projecteur sur un état quantique unique, son premier vecteur propre qu'on peut renommer $|\Psi\rangle$. Nous sommes alors dans le cas où le système est décrit par un "état pur" $|\Psi\rangle$, comme en (XII-39) ; cette description correspond à l'information maximale que l'on puisse donner sur un système physique dans le cadre de la mécanique quantique. Compte tenu de (XII-51), et comme $1^2 = 1$ et $0^2 = 0$, on vérifie que $\rho^2 = \rho$ ; en termes d'opérateur densité on peut caractériser un état pur, soit par cette égalité entre $\rho$ et son carré, soit par la relation :

$$Tr\left\{\rho^2\right\} = Tr\left\{\rho\right\} = 1 \tag{XII-52}$$

*β. Mélange statistique*

Si plusieurs valeurs propres $q_m$ sont non nulles, il n'est plus possible de décrire le système par un état $|\Psi\rangle$ unique ; il faut lui associer plusieurs états pondérés par des probabilités dont la valeur n'est ni 0, ni 1, mais intermédiaire. On dit alors que l'opérateur densité $\rho$ décrit un "mélange statistique". Contrairement au cas précédent, la description quantique d'un système par $\rho$ n'est pas la plus précise possible compatible avec la mécanique quantique ; elle peut même être très imprécise si de nombreux états $|\theta_m\rangle$ sont associés à des probabilités $q_m$ égales ou comparables. Comme, pour tout nombre $q$ compris entre 0 et 1 on a $q^2 < q$, on voit sur (XII-51) que l'opérateur densité n'est pas égal à son carré ($\rho^2 \neq \rho$). Une autre façon de caractériser un mélange statistique est la relation :

$$Tr\left\{\rho^2\right\} < Tr\left\{\rho\right\} = 1 \tag{XII-53}$$

#### A-6-c. Evolution temporelle

Lorsque dans (XII-44) les $|\Psi_n\rangle$ deviennent des fonctions du temps $|\Psi_n(t)\rangle$ qui évoluent selon l'équation de Schrödinger, l'opérateur densité $\rho$ devient également une fonction du temps (les kets évoluent mais les probabilités $p_n$ elles-mêmes, qui définissent le tirage au sort initial de l'état du système, restent constantes). En y reportant (XII-28) et l'équation associée pour l'évolution temporelle du bra $\langle\Psi_n(t)|$, on obtient l'équation d'évolution de l'opérateur densité :

$$i\hbar\frac{d\rho(t)}{dt} = [H(t), \rho(t)] \tag{XII-54}$$

où $[H(t), \rho(t)]$ est le commutateur de l'hamiltonien $H(t)$ et de $\rho(t)$. Cette équation est souvent appelée "équation de von Neumann".

Le raisonnement est aussi valable si l'on part de la décomposition (XII-48) de $\rho$ sur ses vecteurs propres ; on voit ainsi que les valeurs propres de $\rho$, sa trace ainsi que celle de $\rho^2$, restent constantes au cours de l'évolution temporelle.

#### A-6-d. Entropie statistique

L'entropie statistique (ou entropie de von Neumann) $S$ associée à un opérateur densité quelconque $\rho$ est définie par :

$$S = -k_B Tr\left\{\rho\ \ln\rho\right\} \tag{XII-55}$$

où $k_B$ est la constante de Boltzmann de la mécanique statistique (et de la thermodynamique) et où ln désigne le logarithme népérien (dans le domaine de l'information quantique, on prend souvent $k_B = 1$ et l'on préfère le logarithme de base 2, mais cela ne change rien d'essentiel). La formule (XII-48)

permet d'écrire :

$$S = -k_B \sum_m q_m \ln q_m \tag{XII-56}$$

Pour un opérateur densité décrivant un état pur, toutes les valeurs propres sont nulles, sauf une qui vaut 1 ; on a donc $S = 0$. En revanche, pour un mélange statistique, les relations (XII-49) entraînent[4] que $S > 0$ ; par exemple si le système a des probabilités égales d'être dans deux états orthogonaux, deux valeurs propres de $\rho$ sont égales à $1/2$ et $S = 2 \ln 2$ (ou simplement 2 si l'on a choisi les logarithmes de base 2). La valeur de $S$ caractérise donc l'écart entre la description quantique donnée par $\rho$ et une description optimale par état pur, la plus précise possible en mécanique quantique.

Nous avons vu que les probabilités $q_m$ restent constantes au cours de l'évolution temporelle de $\rho$ selon (XII-54) ; l'évolution hamiltonienne d'un opérateur densité conserve donc son entropie : $dS/dt = 0$.

### A-7. Un cas simple : le spin 1/2

L'espace des états le plus simple est un espace à 2 dimensions (à part le cas trivial d'un espace à une seule dimension, qui est de peu d'intérêt puisque le système ne pourrait jamais changer d'état physique). C'est celui que l'on rencontre dans l'étude d'une particule de spin 1/2 dont la fonction d'onde orbitale est fixée (§ C-2) ; on note alors habituellement les deux états de base $|+\rangle$ et $|-\rangle$ qui correspondent, comme nous le verrons plus bas, à deux états propres de la composante du spin le long de l'axe $Oz$. L'état le plus général s'écrit alors :

$$|\Psi\rangle = \alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle \tag{XII-57}$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont deux nombres complexes quelconques, soumis à la condition $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ si $|\Psi\rangle$ est normé ; ce ket est associé au vecteur colonne :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \tag{XII-58}$$

Les trois composantes $S_{x,y,z}$ du spin selon les trois directions $Ox$, $Oy$ et $Oz$ sont associées à trois opérateurs, dont l'action sur ce vecteur colonne (XII-58) est caractérisée par les trois "matrices de Pauli" $\sigma_x$, $\sigma_y$ et $\sigma_z$ définies par[5] :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{XII-59}$$

[4] La fonction $-x \ln x$ est positive si $0 < x < 1$.

[5] Plus précisément, les trois composantes du spin correspondent à ces trois matrices de Pauli multipliées par la constante $\hbar/2$ ; c'est pourquoi nous employons le mot "associées" et pas "égales".

Un calcul simple montre que les carrés des matrices de Pauli sont tous égaux à la matrice unité :

$$[\sigma_x]^2 = [\sigma_y]^2 = [\sigma_z]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{XII-60}$$

Les relations de commutation des matrices de Pauli sont :

$$[\sigma_x, \sigma_y] \equiv \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x = 2i\sigma_z \tag{XII-61}$$

mais ces matrices anti-commutent :

$$[\sigma_x, \sigma_y]_+ \equiv \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x = 0 \tag{XII-62}$$

(dans les deux cas, deux autres relations peuvent être obtenues par permutation circulaire des opérateurs $\sigma_x$, $\sigma_y$ et $\sigma_z$).

La matrice de l'opérateur densité $\rho$ correspondant à l'état $|\Psi\rangle$ s'écrit :

$$\rho = \begin{pmatrix} \alpha^*\alpha & \beta^*\alpha \\ \alpha^*\beta & \beta^*\beta \end{pmatrix} \tag{XII-63}$$

qui correspond donc à un état pur (on peut facilement vérifier que $\rho^2 = \rho$ si $|\Psi\rangle$ est normé). On montre que l'opérateur densité le plus général (cas pur ou mélange statistique) s'écrit :

$$\rho = \frac{1}{2}\left[1 + a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \mathbf{M}\cdot\sigma\right] \tag{XII-64}$$

où le vecteur $\mathbf{M}$, de composantes $a$, $b$ et $c$ sur les trois axes $Ox$, $Oy$ et $Oz$, est appelé "vecteur de Bloch" ; sa longueur est égale à 1 si l'état est pur, inférieur à 1 pour un mélange statistique ($\rho^2 \neq \rho$). Le Chapitre IV de la Ref. $[XII-1]$ donne plus d'exemples de calculs quantiques dans un espace des états de spin de dimension 2.

## B. Réunion de plusieurs systèmes physiques

Considérons deux systèmes physiques quantiques 1 et 2, l'un d'espace des états $\mathcal{F}$ dont les vecteurs d'état sont notés $|\Phi\rangle$, l'autre d'espace des états $\mathcal{G}$ dont les vecteurs d'état sont notés $|\Xi\rangle$ ; chacun d'entre eux peut être considéré comme un sous-système d'un système physique total plus grand les incluant tous les deux, dont l'espace des états sera appelé $\mathcal{E}$.

### B-1. Produit tensoriel

Supposons que l'ensemble des vecteurs $\{|u_i\rangle\}$ constituent une base de $\mathcal{F}$, de sorte que tout vecteur $|\Phi\rangle$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire :

$$|\Phi\rangle = \sum_i x_i\,|u_i\rangle \tag{XII-65}$$

où les $x_i$ sont les composantes (complexes) de $|\Phi\rangle$ dans cette base. De même, les vecteurs $\{|v_j\rangle\}$ constituent une base de $\mathcal{G}$ de sorte que l'on peut écrire :

$$|\Xi\rangle = \sum_j y_j \, |v_j\rangle \tag{XII-66}$$

L'espace des états $\mathcal{E}$ du système physique constitué de la réunion des deux systèmes précédents est engendré par les vecteurs où l'on définit l'état individuel de l'un et l'autre sous-système, les "produits tensoriels" qui s'écrivent :

$$|1 : u_i\rangle \otimes |2 : v_j\rangle \tag{XII-67}$$

Nous emploierons souvent pour ces kets des notations simplifiées, supposant que le premier état désigne toujours implicitement celui du système physique 1 :

$$|1 : u_i\rangle \otimes |2 : v_j\rangle \equiv |1 : u_i; 2 : v_j\rangle \equiv |u_i, v_j\rangle \tag{XII-68}$$

Si $K$ est la dimension de $\mathcal{F}$ (donc le nombre de valeurs distinctes que peut prendre l'indice $i$) et $Q$ celle de $\mathcal{G}$ (nombre de valeurs distinctes que peut prendre l'indice $j$), le nombre de vecteurs produits distincts est $R = KQ$, qui détermine également la dimension de $\mathcal{E}$. Un état quelconque $|\Psi\rangle$ de $\mathcal{E}$ s'écrira donc :

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{Q} z_{i,j} \, |u_i, v_j\rangle \tag{XII-69}$$

où les nombres complexes $z_{i,j}$ sont ses $KQ$ composantes. L'espace $\mathcal{E}$ est le produit tensoriel de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{G}$ :

$$\mathcal{E} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \tag{XII-70}$$

Dans le cas particulier où toutes les composantes $z_{i,j}$ de $|\Psi\rangle$ dans (XII-69) peuvent s'écrire comme des produits :

$$z_{i,j} = x_i \, y_j \tag{XII-71}$$

le vecteur $|\Psi\rangle$ est un produit tensoriel :

$$|\Psi\rangle = |\Phi\rangle \otimes |\Xi\rangle \tag{XII-72}$$

Ce cas correspond à celui où les deux systèmes quantiques n'ont aucune corrélation[6]. Mais ce n'est qu'un cas particulier : en général, il faut utiliser la relation (XII-69), qui ne se factorise pas. Nous discutons au Chapitre VII le lien entre cette expression générale et la notion d'intrication quantique.

[6]De façon similaire, en probabilités classiques, une distribution de deux variables aléatoires qui est un produit correspond à des variables incorrélées.

Nous avons traité explicitement le cas de deux systèmes physiques qui sont réunis en un seul, par exemple un système composé de deux particules (*cf.* § C-3). Bien entendu, l'opération s'étend à un nombre quelconque de particules : l'espace des états $\mathcal{E}$ d'un système physique composé de $N$ particules d'espaces des états individuels $\mathcal{F}_i$ $(i = 1, 2, ..N)$ est le produit tensoriel de tous ces espaces :

$$\mathcal{E} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes ... \otimes \mathcal{F}_N \tag{XII-73}$$

et l'on généralise de même la relation (XII-69).

Remarque : pour simplifier, nous avons raisonné en supposant que les espaces des états individuels $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ont des dimensions finies $P$ et $Q$, mais le raisonnement se généralise également au cas où l'une de ces dimensions est infinie, ou les deux. Par exemple, dans le cas de la particule de spin $1/2$ discuté plus bas (§ C-2-b), l'espace des états orbitaux (associé à la position) a une dimension infinie, alors que celui des état de spin a une dimension 2 ; le résultat est alors, bien sûr, que la dimension de l'espace des états total (produit tensoriel) est également infinie.

### B-2. Ensemble de spins 1/2

Le cas le plus simple est celui où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont tous deux les espaces des états de spins $1/2$, de dimension 2 chacun. L'espace des états total $\mathcal{E}$ est alors de dimension 4, avec une base fournie par les vecteurs :

$$|1:+;2:+\rangle\,, \quad |1:+;2:-\rangle\,, \quad |1:-;2:+\rangle \text{ et } \quad |1:-;2:-\rangle \tag{XII-74}$$

où par exemple $|1:+;2:-\rangle$ désigne l'état où la composante sur $Oz$ du premier spin est égale à $+\hbar/2$, celle du second spin à $-\hbar/2$. Pour simplifier, nous noterons ces 4 vecteurs sans expliciter la numérotation des particules sous la forme :

$$|+,+\rangle \qquad |+,-\rangle \qquad |-,+\rangle \qquad |-,-\rangle \tag{XII-75}$$

Le vecteur d'état le plus général de $\mathcal{E}$ est donc une combinaison linéaire complexe quelconque de ces 4 vecteurs.

Un état particulier de cet espace qui apparaît dans de nombreux exemples est l'état dit "singulet" (ou "singlet" en anglais) :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|+,-\rangle - |-,+\rangle\right] \tag{XII-76}$$

Cet état a la particularité d'être invariant par rotation : il garde exactement la même forme si, au lieu d'un axe de référence selon $Oz$ pour caractériser les composantes des deux spins, on choisit une autre direction $Ou$ quelconque. On vérifie aisément que les deux spins y sont totalement anti-corrélés : si

la composante de l'un sur un axe quelconque est trouvée positive, celle de l'autre sur un axe parallèle est nécessairement négative (en fait, opposée). Cette propriété est essentielle pour la discussion du § A-1 du Chapitre IV.

Pour $N$ spins 1/2, on procède de même. Leur espace des états est le produit tensoriel de tous les espaces des spins individuels, de dimension $2^N$ et engendré par les $2^N$ vecteurs :

$$|\pm, \pm, \pm, ..., \pm\rangle \tag{XII-77}$$

Un état particulier qui généralise (XII-76) est l'état souvent appelé "état GHZ", ou état "par tout ou rien" :

$$|\Psi\rangle = \Big[\alpha\,|+,+,+,...,+\rangle + \beta\,|-,-,-,...,-\rangle\Big] \tag{XII-78}$$

(où $\alpha$ et $\beta$ sont deux nombres complexes dont la somme des modules au carré vaut 1). Cet état est remarquable du fait qu'il contient uniquement deux composantes où tous les spins passent d'un état individuel vers un état orthogonal ; il possède d'ailleurs des propriétés quantiques très marquées, qui seront discutées aux §§ A du Chapitre VI. Il ne doit pas être confondu avec un état produit, où tous les spins sont non corrélés, qui s'écrit :

$$|\Psi\rangle = \Big[\alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle\Big]\ \Big[\alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle\Big] ... \Big[\alpha\,|+\rangle + \beta\,|-\rangle\Big] \tag{XII-79}$$

et qui, au contraire, possède des propriétés plus proches de celles d'un état classique.

### B-3. Traces partielles

L'opérateur densité se prête à un calcul commode de "trace partielle". Considérons un système physique composé de la réunion de deux autres, 1 et 2. Si les systèmes sont non corrélés, chacun dans des états individuels $|\Phi(1)\rangle$ et $|\Xi(2)\rangle$, l'état du système total est donné par :

$$|\Psi(1,2)\rangle = |\Phi(1)\rangle \otimes |\Xi(2)\rangle \tag{XII-80}$$

de sorte que l'opérateur densité de ce système est simplement le produit des projecteurs sur les états $|\Phi(1)\rangle$ et $|\Xi(2)\rangle$ :

$$\rho_{12}(1,2) = |\Psi(1,2)\rangle\,\langle\Psi(1,2)| = |\Phi(1)\rangle\,\langle\Phi(1)| \otimes |\Xi(2)\rangle\,\langle\Xi(2)| = \rho_1(1)\rho_1(2) \tag{XII-81}$$

Les 3 systèmes, total et partiels, sont alors dans des états purs.

Mais si $|\Psi(1,2)\rangle$ n'est pas un produit (si les deux sous-systèmes sont intriqués), la situation est plus compliquée. On peut partir de la matrice densité totale :

$$\rho_{12} = |\Psi(1,2)\rangle\,\langle\Psi(1,2)| \tag{XII-82}$$

et effectuer une opération dite de "trace partielle" qui transforme $\rho$ en un opérateur densité $\rho_1$ agissant uniquement dans l'espace des états du premier système :

$$\rho_1 = Tr_2 \{\rho_{12}\} \tag{XII-83}$$

Les éléments de matrice de $\rho_1$ sont définis[7] par :

$$\langle u_i| \rho_1 |u_j\rangle = \sum_k \langle u_i, v_k| \rho_{12} |u_j, v_k\rangle \tag{XII-84}$$

Cette trace partielle permet de calculer toutes les probabilités et valeurs moyennes associées aux mesures portant uniquement sur le premier sous-système, car :

$$Tr \{A(1)\ \rho\} = Tr_1 \{A(1)\ \rho_1\} \tag{XII-85}$$

où $A(1) \equiv A(1) \otimes I(2)$ est un opérateur quelconque n'agissant que dans l'espace des états du premier sous-système (on note $I(2)$ l'opérateur identité dans l'espace du sous-système 2). Le membre de droite de cette équation contient une trace qui est prise uniquement dans l'espace des états du sous-système 1. Bien évidemment, on définit de même une seconde trace partielle $\rho_2$ qui concerne uniquement les propriétés du second sous-système.

Une propriété spécifique de la mécanique quantique est que, même si le système total est connu au mieux (il est décrit par un état pur), ses sous-systèmes ne sont en général pas dans ce cas : ils sont décrits par des mélanges statistiques, donc avec une précision qui n'est pas maximale. Un exemple classique est donné par deux spins dans l'état singulet (XII-76), pour lequel le système total est dans un état pur ; si l'on calcule la trace partielle sur l'un quelconque des spins, on obtient les matrices des spins individuels :

$$\rho_1(1) = \rho_2(2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \tag{XII-86}$$

Ainsi l'état de chacun des spins est totalement inconnu : il a autant de chances d'être l'état $|+\rangle$ que l'état $|-\rangle$ ou, de fait, d'être n'importe quelle combinaison linéaire de ces états[8]. Ainsi, même lorsque le système total est connu au mieux dans le cadre de la mécanique quantique, dans ce cas strictement aucune information n'est disponible sur les deux sous-systèmes, une situation qui n'a aucun équivalent en mécanique classique (pour une discussion plus détaillée de cette situation inhabituelle, remarquée en particulier par Schrödinger, voir le § A du Chapitre VII).

[7] L'opérateur densité partiel $\rho_1$ est indépendant de la base $\{|u_i, v_j\rangle\}$ choisie pour le définir. On montre en effet à partir de (XII-84) que, dans une autre base $\{|u'_q, v'_l\rangle\}$, on a $\langle u'_q| \rho_1 |u'_r\rangle = \sum_l \langle u'_q, v'_l| \rho_{12} |u'_r, v'_l\rangle$.

[8] La matrice est proportionnelle à la matrice unité, qui garde la même expression dans n'importe quelle base.

## C. Particules dans un potentiel

Appliquons maintenant le formalisme général précédent à quelques cas simples.

### C-1. Une seule particule

En mécanique classique, on définit la position d'une particule ponctuelle par la donnée des trois composantes de sa position $\mathbf{r}$ à l'instant $t$. L'impulsion $\mathbf{p}$ de la particule est le vecteur dont les trois composantes sont les moments conjugués de celles de $\mathbf{r}$, soit :

$$\mathbf{p} = m\frac{d}{dt}\mathbf{r} \tag{XII-87}$$

où $m$ est la masse de la particule. L'état dynamique instantané de la particule est défini par la donnée simultanée de sa position $\mathbf{r}$ et de son impulsion $\mathbf{p}$, soit 6 grandeurs scalaires si la particule se déplace dans l'espace habituel à 3 dimensions.

Lorsque la particule est soumise à l'action d'un potentiel $V(\mathbf{r})$, l'évolution de l'état de la particule peut être obtenue à partir de l'hamiltonien $\mathcal{H}$, qui est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle $\mathcal{V}$ :

$$\mathcal{H}(\mathbf{r},\mathbf{p};t) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathcal{V}(\mathbf{r},t) \tag{XII-88}$$

#### C-1-a. Fonction d'onde

En mécanique quantique, l'état de la particule à un instant donné n'est plus décrit par sa position et son impulsion, mais par un vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ appartenant à un espace des états $\mathcal{E}_{\mathbf{r}}$ dont une "base" continue (*cf.* note 1) est donnée par l'ensemble des kets $|\mathbf{r}\rangle$ où la particule occupe la position $\mathbf{r}$. Selon (XII-5), les composantes de $|\Psi\rangle$ dans cette base sont alors données par la fonction dépendant de $\mathbf{r}$ :

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \langle \mathbf{r}\,|\Psi(t)\rangle \tag{XII-89}$$

avec, selon (XII-6) :

$$|\Psi(t)\rangle = \int d^3r\ \Psi(\mathbf{r},t)\ \ |\mathbf{r}\rangle \tag{XII-90}$$

La fonction complexe $\Psi(\mathbf{r},t)$ est appelée "fonction d'onde" de la particule. Cette dernière pouvant s'étendre dans tout un domaine de l'espace, la position n'est plus une variable ayant une valeur parfaitement définie à un instant donné. La mécanique quantique indique seulement que la probabilité de trouver à l'instant $t$ la particule dans un volume $D$ de l'espace est donnée par :

$$\mathcal{P} = \int_D d^3r\ \ |\Psi(\mathbf{r},t)|^2 \tag{XII-91}$$

En d'autres termes, $|\Psi(\mathbf{r})|^2$ donne la densité de probabilité $n(\mathbf{r})$ associée à la variable position de la particule :

$$n(\mathbf{r};t) = |\Psi(\mathbf{r},t)|^2 \tag{XII-92}$$

La condition de normalisation de la probabilité totale impose que l'intégrale soit égale à 1 lorsque $D$ couvre tout l'espace :

$$\int d^3r \ |\Psi(\mathbf{r},t)|^2 = \int d^3r \ n(\mathbf{r},t) = 1 \tag{XII-93}$$

Cette condition est bien sûr essentielle pour pouvoir interpréter $n(\mathbf{r})$ comme densité de probabilité. Si une fonction d'onde ne donne pas la valeur 1 pour l'intégrale de son module au carré, on dit qu'elle n'est pas normalisée, mais il suffit alors de la diviser par la racine carrée de cette intégrale pour la normaliser. Cependant, cette opération n'est possible que si l'intégrale dans tout l'espace converge ; seules sont normalisables les fonctions "de carré sommable", condition essentielle pour qu'une fonction soit acceptable comme fonction d'onde.

La probabilité de trouver l'impulsion dans un certain domaine est donnée par une formule semblable à (XII-91) : la densité de probabilité correspondante $\overline{n}(\mathbf{p})$ est donnée par $\left|\overline{\Psi}(\mathbf{p})\right|^2$, où $\overline{\Psi}(\mathbf{p})$ est la transformée de Fourier de $\Psi(\mathbf{r})$.

#### C-1-b. Equation de Schrödinger, courant de probabilité

L'évolution temporelle de la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{r},t)$ est donnée par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\mathbf{r},t) + V(\mathbf{r},t)\ \Psi(\mathbf{r},t) \tag{XII-94}$$

A partir de la fonction d'onde, on peut définir un courant de probabilité :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = \frac{\hbar}{2im}\left\{\Psi^*(\mathbf{r},t)\nabla\Psi(\mathbf{r},t) - \Psi(\mathbf{r},t)\nabla\Psi^*(\mathbf{r},t)\right\} \tag{XII-95}$$

et, en utilisant (XII-94), démontrer l'équation de conservation locale de la probabilité :

$$\frac{\partial}{\partial t}n(\mathbf{r},t) + \nabla\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = 0 \tag{XII-96}$$

Intégrée sur tout l'espace, cette relation permet de vérifier que la norme d'une fonction d'onde reste constante au cours du temps : si elle est initialement normalisée par (XII-93), l'équation de Schrödinger conserve cette normalisation au cours du temps.

## C-2. Spin, expérience de Stern et Gerlach

Le formalisme que nous venons de décrire ne s'applique qu'aux particules sans spin, qu'on appelle également particules de spin zéro. Examinons maintenant ce qu'il devient pour les particules de spin non nul, ce qui nous permettra de mieux comprendre l'origine de l'espace des états à deux dimensions introduit au § A-7.

### C-2-a. Introduction du spin

A la période de l'apparition de la mécanique quantique, l'étude des raies spectrales des atomes a conduit les physiciens à comprendre assez rapidement qu'une particule comme l'électron doit posséder un degré de liberté supplémentaire, en plus de ceux associés à sa seule position dans l'espace – cette idée fut émise par Uhlenbeck et Goudsmit en 1925, Ref. [$XII-5$]. Le degré de liberté supplémentaire est appelé "spin" ; il correspond à une rotation interne de la particule (rotation sur elle-même). Le spin ne peut toutefois être expliqué par une image classique : un objet classique ne peut tourner sur lui-même que s'il possède une extension spatiale, alors qu'en mécanique quantique le spin existe même pour une particule ponctuelle (comme l'électron par exemple).

Peu auparavant (1922), Stern et Gerlach (Ref. [$XII-6$]) avaient réalisé une expérience permettant de mettre en évidence très directement l'existence d'une rotation interne de particules quantiques comme des atomes ; dans leur cas il s'agissait d'atomes d'Argent dont le spin provient en particulier des électrons qu'ils contiennent. L'expérience est schématisée d'une façon très simplifiée sur la Figure XII.1. Un jet de particules (jet atomique) est issu d'une source S et se propage vers une région B où un aimant crée un champ magnétique avec un fort gradient le long d'une direction $Oz$. Comme les particules portent un moment magnétique proportionnel à leur spin, donc colinéaire, ce moment magnétique subit de la part du gradient local une force, qui a pour effet de dévier les particules d'une façon qui dépend de la composante de leur spin le long de $Oz$. La position des particules est ensuite enregistrée sur un écran E.

Dans le cadre de la mécanique classique, on s'attendrait à ce que les spins aient initialement une orientation aléatoire, uniformément répartie dans toutes les directions de l'espace ; cette composante, obtenue par projection du vecteur, devrait donc varier continûment entre des valeurs extrêmes – en d'autres termes, on devrait observer un continuum de déviations possibles de la particule, et donc une tache large sur l'écran. Or la surprise est de constater que, au lieu de cela, on observe deux taches bien séparées, correspondant à deux sortes de déviations : une dans la direction de $Oz$, une opposée. On interprète ce résultat en considérant que la composante de chaque spin le long de $Oz$ ne peut prendre que deux valeurs discrètes (qui se trouvent être

égales à $\pm\hbar/2$) : c'est ce que l'on appelle quantification du spin, directement observée expérimentalement avec ce dispositif.

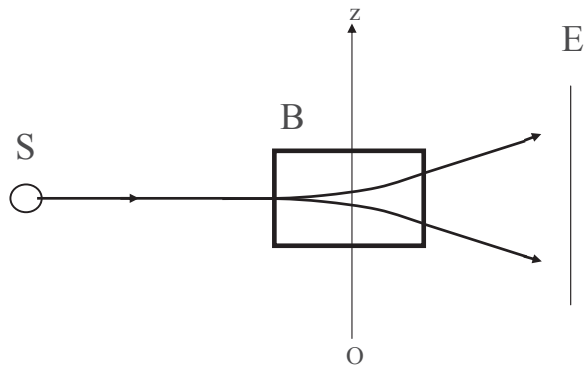


FIGURE *XII.1 – Schéma de principe de l'expérience de Stern et Gerlach. Une source S émet un jet de particules (atomes d'Argent) qui se propagent vers une région B où elles sont soumises à un fort gradient de champ magnétique créé par un aimant (non représenté sur la figure) dans la direction Oz. La force exercée par ce gradient sur le moment magnétique de la particule, qui est parallèle à son spin, dépend donc de la direction de ce dernier ; la particule est ainsi déviée d'une façon qui dépend de la composante sur Oz de son spin.*
*On s'attendrait en mécanique classique à observer un continuum de déviations possibles pour les particules, puisque cette composante peut prendre des valeurs variant continûment dans tout un intervalle). Mais on n'observe que deux types d'impacts sur l'écran E, correspondant à deux déviations possibles. Ceci indique que la composante du spin sur la direction du gradient ne peut prendre que deux valeurs discrètes – on dit qu'elle est quantifiée. En physique classique, il n'existe pas de vecteur dont la composante sur un axe quelconque ne puisse prendre que l'une parmi deux valeurs constantes. L'expérience met donc en évidence à la fois l'existence du spin et son caractère complètement non classique.*

Dans cette expérience, la direction $Oz$ ne correspond à aucune direction particulière pour la source S. C'est donc que la composante du spin ne peut prendre que l'une parmi deux valeurs données opposées, et ceci quelle que soit la direction d'analyse. Bien sûr, en physique classique, une telle situation est tout à fait impossible : il n'existe aucune grandeur vectorielle dont le module de la composante sur un axe de direction quelconque reste toujours le même. C'est une nouvelle illustration du fait que le spin est de nature purement quantique, sans équivalent classique. Pour une discussion plus détaillée de l'expérience de Stern et Gerlach, et en particulier de mesures de la composante du spin sur des directions variées, voir par exemple le § A du Chapitre IV de la Ref. $[XII-1]$.

De fait, la mécanique quantique n'impose pas que les valeurs discrètes des composantes du spin soient nécessairement au nombre de deux : leur nombre est donné par $2s+1$, où $s$ est un nombre demi-entier quelconque [9]. Le cas que nous avons décrit correspond donc à $s = 1/2$, et c'est pourquoi l'on parle de "particule de spin 1/2" ; c'est celui de l'électron par exemple, ainsi que d'un grand nombre de particules comme le proton, le neutron, etc. (mais pas le photon).

#### C-2-b. Espace des états

Pour une particule de spin 1/2, le formalisme de la mécanique quantique non relativiste introduit, non pas une fonction d'onde, mais deux : une par composante du spin. On choisit un axe de référence fixe, appelé "direction de quantification", qu'on appelle $Oz$, et l'on définit deux fonctions d'onde $\Psi_\pm(\mathbf{r})$, où l'indice $\pm$ correspond au signe de la composante du spin sur $Oz$. Pour une particule de spin $s$ quelconque, ce seront $2s+1$ fonctions d'onde qui seront définies, mais pour simplifier nous nous limiterons ici au cas $s = 1/2$.

Le fait d'introduire deux fonctions $\Psi_\pm(\mathbf{r})$ (au lieu d'une seule) revient à doubler le nombre de composantes du vecteur d'état $|\Psi\rangle$, donc du nombre de vecteurs de base pour l'espace des états. Ainsi l'on remplace maintenant (XII-90) par :

$$|\Psi(t)\rangle = \int d^3r \ \Big[\Psi_+(\mathbf{r};t) \ |\mathbf{r},+\rangle + \Psi_-(\mathbf{r};t) \ |\mathbf{r},-\rangle\Big] \qquad \text{(XII-97)}$$

où $|\mathbf{r},+\rangle$ désigne le vecteur où la particule est localisée au point $\mathbf{r}$ avec une composante positive du spin le long de $Oz$, alors que $|\mathbf{r},-\rangle$ est l'état correspondant avec une composante négative.

On appelle parfois "spineur" l'ensemble des deux composantes de $|\Psi\rangle$, que l'on regroupe dans une matrice colonne comme celles d'un vecteur dans un espace à deux dimensions :

$$\begin{pmatrix} \Psi_+(\mathbf{r}) \\ \Psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \qquad \text{(XII-98)}$$

[9] Un nombre demi-entier est par définition un nombre dont le double est entier.

L'application des trois matrices de Pauli (XII-59) au vecteur colonne (XII-98) définit (après multiplication par un facteur $\hbar/2$) celles des opérateurs $S_{x,y,z}$ associées aux trois composantes du spin. Nous voyons ainsi apparaître une structure de l'espace des états qui inclut la juxtaposition des propriétés de spin (espace de dimension 2 étudié au § A-7) et celles de la variable orbitale de position $\mathbf{r}$ (espace de dimension infinie), et fournit une bonne illustration de la notion d'espace des états "produit tensoriel" (§ B-1).

### C-3. Plusieurs particules

Supposons maintenant que le système étudié soit constitué de plusieurs particules.

En mécanique classique, l'évolution d'un système de $N$ particules de positions $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$,..., $\mathbf{r}_N$ et de masses $m_1$, $m_2$,..., $m_N$ fait intervenir l'hamiltonien :

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}\,; t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + \mathcal{V}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N; t) \qquad \text{(XII-99)}$$

où le potentiel $\mathcal{V}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N)$ est la somme du potentiel extérieur auquel sont soumises les particules et de leur potentiel d'interaction mutuelle.

En mécanique quantique, pour un ensemble de $N$ particules sans spin, la fonction d'onde à une seule particule $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{t})$ devient une fonction d'onde $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N; t)$ qui dépend de l'ensemble des positions $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N$ de toutes les particules :

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N; t) = \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N \,|\Psi(t)\rangle$$

La fonction :

$$n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N; t) = |\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N; t)|^2 \qquad \text{(XII-100)}$$

généralise (XII-92) et donne la densité de probabilité de trouver la première particule au point $\mathbf{r}_1$, la seconde au point $\mathbf{r}_2$, ... la dernière au point $\mathbf{r}_N$. Pour que $\Psi$ soit une fonction d'onde physiquement acceptable, il faut que l'intégrale de $n$ dans tout l'espace des configurations (à $3N$ dimensions) soit finie, et permette donc la normalisation de $\Psi$.

L'introduction de la notion de produit tensoriel est naturelle en termes de fonctions d'onde. Pour deux particules, on sait qu'une fonction $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ peut être décomposée comme une somme de produits de fonctions de $\mathbf{r}_1$ par des fonctions de $\mathbf{r}_2$ :

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\mu} \sum_{\nu} \phi_\mu(\mathbf{r}_1)\, \phi_\nu(\mathbf{r}_2) \qquad \text{(XII-101)}$$

(où les sommes peuvent éventuellement être infinies, ou même continues de sorte qu'elles deviennent des intégrales sur $\mu$ et $\nu$) : l'espace des fonctions

d'onde à deux particules $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ est le produit tensoriel des espaces des fonctions d'onde individuelles. Cette notion se généralise à $N$ particules, dont les fonctions d'onde s'écrivent :

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N) = \sum_{\mu} \sum_{\nu} ... \sum_{\xi} \phi_\mu(\mathbf{r}_1)\ \phi_\nu(\mathbf{r}_2)\ ...\ \phi_\xi(\mathbf{r}_N) \qquad \text{(XII-102)}$$

et appartiennent à l'espace produit tensoriel de $N$ espaces de fonctions d'onde individuelles.

L'équation de Schrödinger est une généralisation de (XII-94), et s'écrit :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N; t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N; t) + V(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N; t)\ \Psi(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N; t) \qquad \text{(XII-103)}$$

où, comme en mécanique classique, le potentiel $V$ peut comprendre une part due au potentiel extérieur agissant séparément sur chaque particule, ainsi qu'une part d'interaction entre elles (généralement la somme d'interactions binaires entre particules). On peut aisément définir un courant de probabilité $\mathbf{J}$ dans un espace à $3N$ dimensions (espace des configurations) afin de généraliser les relations (XII-95) et (XII-96) et obtenir ainsi une relation de conservation multi-dimensionnelle.

Si les $N$ particules ont des spins $1/2$, la fonction d'onde se divise en $2^N$ composantes, repérées par $N$ indices valant $\pm$ :

$$\Psi_{\pm,\pm,...,\pm}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N; t) \qquad \text{(XII-104)}$$

mais, à part ce changement, l'idée générale reste la même : l'espace des états du système de l'ensemble des particules est le produit tensoriel des espaces des états des particules individuelles.

Remarque : la quantification des systèmes physiques n'est pas limitée à celle des particules matérielles, mais s'applique également aux champs ; pour une introduction voir par exemple les Refs. $[XII-7]$ et $[XII-8]$.

**Références**

$[XII-1]$ C. Cohen-Tannoudji, B. Diu et F. Laloë, *Mécanique quantique*, Hermann (1973 et 1977) ; *Quantum mechanics*, Wiley (1977).

$[XII-2]$ A. Messiah, *Mécanique quantique*, Dunod (1962).

$[XII-3]$ A. Peres, *Quantum theory, concepts and methods*, Kluwer Academic Press (1995).

$[XII-4]$ M. Le Bellac, *Physique quantique*, Savoirs Actuels, EDP Sciences (2003).

[$XII-5$] G.E. Uhlenbeck et S. Goudsmit, *Naturwissenschaften* **47,** 953 (1925) ; *Nature* **117**, 264 (1926). Pour une intéressante description historique de la façon dont la découverte du spin a été faite, voir :

http ://www.ilorentz.org/history/spin/goudsmit.html.

[$XII-6$] W. Gerlach et O. Stern, "Der experimentelle Nachweiss der Richtungsquantelung im Magnetfeld", *Zeit. Phys.* **9**, 349-355 (1922).

[$XII-7$] L. Schiff, *Quantum mechanics*, McGraw Hill (1955).

[$XII-8$] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Gryndberg, *Photons et atomes*, Savoirs Actuels, EDP Sciences (1987).

# Appendice A : Contenu “mental” du vecteur d’état

(i) Un article relativement récent (1999) de Englert, Scully et Walther [109] fournit une illustration intéressante du débat sur le statut du vecteur d’état, en particulier du fait de la formulation choisie par les auteurs. Se plaçant dans le cadre de la théorie standard, ils écrivent en effet : “(On) serait dans une impasse si l’on considérait la réduction du vecteur d’état comme un processus physique, plutôt que d’accepter l’idée qu’elle n’est en fait qu’un processus purement mental”. Ils plaident ensuite pour une “interprétation minimalistique du vecteur d’état” et ajoutent en guise d’avertissement général qu’il est dangereux d’aller au-delà (le “caveat de Van Kampen”[1]) – mais ne disent pas très précisément ce que sont ces dangers. Il est intéressant de pousser un peu plus loin la discussion dans cette direction : si le vecteur d’état peut évoluer selon un “processus purement mental”, quelles en sont les conséquences pour lui-même ? Il semble alors inévitable qu’il contienne des éléments qui sont mentaux (subjectifs), au lieu d’être reliés à une réalité extérieure (objective). L’évolution de Schrödinger, qui concerne le même vecteur d’état, est-elle alors réelle, et dans quelle mesure ? Comme elle dépend de paramètres extérieurs décrits par des grandeurs classiques, il est naturel de lui attribuer le même statut de réalité. Devons-nous alors considérer que le vecteur d’état est hybride, combinant des éléments décrivant la réalité extérieure, au moins en partie, et d’autres qui sont purement mentaux, le tout dans un seul et même objet mathématique[2] ? Dans cette optique, la réduction du vecteur d’état correspondrait probablement aux moments où le vecteur d’état acquiert soudainement plus de contenu mental (puisqu’elle résulte d’un processus purement mental) alors que l’évolution de Schrödinger correspondrait, en revanche, à des périodes où le contenu mental serait constant.

[1] “Toute personne qui attribuera au vecteur d’état plus de signification que nécessaire sera considérée comme responsable des conséquences” [108].

[2] En soi, ce ne serait pas nécesairement choquant. Une distribution statistique classique pour un ensemble de systèmes dépendant du temps peut parfois effectivement combiner une évolution réelle avec des éléments associés à notre connaissance initiale imparfaite du système.

Cette vue hybride du vecteur d'état n'est cependant guère compatible avec le point de vue standard où son rôle est de décrire la préparation d'un système physique. Une préparation peut être réalisée par l'observation d'un résultat de mesure impliquant une réduction, par exemple la sélection des atomes à la sortie d'un aimant de Stern et Gerlach ; s'il s'agit d'un processus purement mental, le vecteur d'état ainsi obtenu devrait possèder la même propriété. Le vecteur d'état n'aurait alors plus aucune composante réelle.

Mais, nous l'avons noté au § C-2 du Chapitre XI, la majorité des physiciens considèrent que, au moins quelquefois, la fonction d'onde contient des éléments de réalité, en donnant quelques exemples (état BCS des électrons dans un supraconducteur, liaisons moléculaires, etc.). On considère généralement que l'évolution de Schrödinger contient à la fois l'évolution des propriétés physiques que la mécanique quantique attribue au système (observables qui admettent $|\Psi\rangle$ comme vecteur propre) et celle des probabilités (pour toutes les autres observables) qui représentent notre connaissance du système et peuvent donc être vues comme mentales. C'est probablement pourquoi la notion de "processus purement mental" n'est pas souvent mise en avant par les partisans de l'interprétation standard (sauf peut-être par Wigner, *cf.* § A-1-b du Chapitre XI). Par exemple Peres, dans la citation de [44] du § B-3-b au Chapitre I ne parle jamais d'esprits humains, mais seulement de préparations et d'expériences sur des systèmes physiques.

(ii) Une autre illustration nous est fournie par une note de Fuchs et Peres [110] : "La théorie quantique n'a besoin d'aucune interprétation", d'autant plus que cette note a suscité de nombreuses réactions d'auteurs exprimant des points de vue divers. Elle va encore plus loin que la Ref. [109] puisque ces auteurs prennent explicitement la position selon laquelle le vecteur d'état n'est pas absolu, mais dépend de l'observateur[3]. Après avoir écrit que "La théorie quantique ne décrit pas la réalité physique. Ce qu'elle fait est de fournir un algorithme permettant de calculer des *probabilités* d'événements macroscopiques qui sont les conséquences de nos inventions expérimentales", ils ajoutent "une fonction d'onde n'est qu'une expression mathématique destinée à évaluer des probabilités et dépend de celui qui fait ce calcul". Vue de cette façon, la fonction d'onde devient vraiment similaire à une distribution de probabilité classique qui, de toute évidence, dépend des connaissances de l'observateur sur le système. Cependant (§ B-3-a du Chapitre I), associer plusieurs états quantiques différents à un seul système physique n'est pas possible au sein de l'interprétation standard de la mécanique quantique (mis à part, bien sûr, un facteur de phase trivial) ; en revanche, l'interprétation relationnelle (§ C-1 du Chapitre XI) prend en compte cette possibilité.

[3]Comme au § B-3-a du Chapitre I, nous supposons que les observateurs utilisent le même référentiel galiléen. Sinon, ils utilisent évidemment des vecteurs d'état différents pour décrire le même système, pour des raisons triviales (les mêmes qu'en mécanique classique).

# Appendice B : Inégalités de Bell et théories locales non déterministes

Dans les démonstrations du § A du Chapitre IV des inégalités de Bell à partir du réalisme local, nous avons supposé que les résultats des expériences sont des fonctions bien définies $A(a, \lambda)$ et $B(b, \lambda)$ dépendant des paramètres de mesure $a$ et $b$ ainsi que de la variable supplémentaire $\lambda$. C'est un prolongement naturel du théorème EPR, qui part de l'hypothèse du réalisme local et conclut à l'existence de ces fonctions, en d'autres termes qui conduit au déterminisme. Dans cet appendice nous montrons que les inégalités de Bell sont plus générales : elles peuvent se démontrer dans un cadre non déterministe si $A(a, \lambda)$ et $B(b, \lambda)$ sont remplacés par des probabilités, donc dans un contexte non déterministe, pourvu que la localité soit préservée.

## 1. La factorisation des probabilités est admise

L'idée générale de cette généralisation est simple : on peut toujours considérer des probabilités comme résultant d'un processus déterministe contrôlé par une variable supplémentaire de plus, que nous appellerons $\mu$. Ajouter cette variable ne change rien au raisonnement qui conduit aux inégalités (en fait, rien n'empêche de voir $\lambda$ comme une seule variable à plusieurs dimensions dont une composante est $\mu$).

Considérons une valeur donnée de $\lambda$. Le fait que la théorie soit non déterministe conduit mathématiquement à remplacer $A(a, \lambda)$ par deux probabilités $\mathcal{P}^A_+(a, \lambda)$ et $\mathcal{P}^A_-(a, \lambda)$, ainsi que $B(b, \lambda)$ par deux probabilités $\mathcal{P}^B_+(b, \lambda)$ et $\mathcal{P}^B_-(b, \lambda)$. Pour $a$ et $\lambda$ quelconques, nous avons :

$$\mathcal{P}^A_+(a, \lambda) + \mathcal{P}^A_-(a, \lambda) = 1 \qquad \text{(App. B-1)}$$

avec une condition semblable pour les probabilités $\mathcal{P}^B_\pm$. Nous pouvons alors introduire la variable supplémentaire $\mu$ répartie uniformément dans l'inter-

valle $[0, 1]$ ainsi que la fonction $\overline{A}(a, \lambda, \mu)$ définie par[1] :

$$\overline{A}(a, \lambda, \mu) = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad 0 \leq \mu \leq \mathcal{P}^A_+(a, \lambda) \\ -1 & \text{si} \quad \mathcal{P}^A_+(a, \lambda) < \mu \leq 1 \end{cases} \qquad \text{(App. B-2)}$$

Nous avons alors :

$$\int_0^1 d\mu \ \overline{A}(a, \lambda, \mu) = \mathcal{P}^A_+(a, \lambda) - \mathcal{P}^A_-(a, \lambda) \qquad \text{(App. B-3)}$$

ainsi que, bien sûr, une relation semblable pour la différence $\mathcal{P}^B_+(b, \lambda) - \mathcal{P}^B_-(b, \lambda)$.

Considérons maintenant deux mesures effectuées ne des régions très éloignées de l'espace avec les paramètres $a$ et $b$, et donnant des résultats aléatoires. Ce caractère aléatoire provient des fluctuations des variables supplémentaires $\lambda$, ainsi que de processus aléatoires locaux qui peuvent se produire, l'un dans la première région, l'autre dans la seconde. Pour une valeur donnée de $\lambda$, l'aléatoire est uniquement une conséquence de ces processus locaux, qui peuvent être considérés comme indépendants ; la probabilité d'apparition des deux résultats + et + (par exemple) est donc le produit :

$$\mathcal{P}^A_+(a, \lambda)\mathcal{P}^B_+(b, \lambda) \qquad \text{(App. B-4)}$$

Les trois autres possibilités (+, −), (−,+) and (−, −) donnent lieu à des égalités similaires. Supposons maintenant que nous désirions calculer la valeur moyenne du produit des deux résultats obtenus. Pour chaque valeur de $\lambda$, il s'introduit la somme des probabilités associées avec les résultats (+, +) et (−,−), à laquelle il faut retrancher la somme des probabilités associées aux résultats (+, −) et (−, +), ce qui conduit au terme :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^A_+(a, \lambda)\mathcal{P}^B_+(b, \lambda) + \mathcal{P}^A_-(a, \lambda)\mathcal{P}^B_-(b, \lambda) - \mathcal{P}^A_+(a, \lambda)\mathcal{P}^B_-(b, \lambda) - \mathcal{P}^A_-(a, \lambda)\mathcal{P}^B_+(b, \lambda) \\ = \left[\mathcal{P}^A_+(a, \lambda) - \mathcal{P}^A_-(a, \lambda)\right] \times \left[\mathcal{P}^B_+(b, \lambda) - \mathcal{P}^B_-(b, \lambda)\right] \end{aligned} \qquad \text{(App. B-5)}$$

La valeur moyenne de cette expression est obtenue par sommation sur $\lambda$ qui, d'après (App. B-3), donne l'intégrale :

$$\int d\lambda \int_0^1 d\mu \ \overline{A}(a, \lambda, \mu) \int_0^1 d\mu' \ \overline{B}(b, \lambda, \mu') \qquad \text{(App. B-6)}$$

A ce stade, nous obtenons la même expression qu'avec une théorie déterministe, avec l'intégrale d'un produit de deux fonctions égales à $\pm 1$. La seule différence est la présence de deux variables d'intégration supplémentaires $\mu$

[1] Nous utilisons la notation $\overline{A}$ pour faire la distinction avec $A$, qui a été défini dans le texte comme le résultat de l'expérience. Ici $\overline{A}$ est seulement une variable mathématique commode introduite pour exprimer les probabilités qui apparaissent dans le calcul.

et $\mu'$ : la théorie locale stochastique est donc équivalente à une théorie locale déterministe, mais avec une (ou des) variables supplémentaires en plus. Le reste du raisonnement qui conduit aux inégalités de Bell ne change pas.

La conclusion est que ces inégalités sont également valables pour des théries non déterministes, à condition que les dépendences des probabilités soient locales – si nous avions supposé que $\mathcal{P}_+^A(a,\lambda)$ dépend également de $b$, la démonstration des inégalités n'aurait pas été possible.

## 2. La factorisation est démontrée

Dans le § B-2-b du Chapitre IV, nous avons exposé une démontration de l'inégalité BCHSH dans l'esprit de l'article de Bell "La nouvelle cuisine" [166]. Nous avons également mentionné que d'autres démonstrations, légèrement différentes, sont possibles ; elles ont été proposées par Jarrett, Ballentine, Shimony et d'autres [165, 171–175]. Le point de départ commun de toutes ces approches est l'utilisation de la loi des probabilités conditionnelles (loi de Bayes). Avec la même notation que dans le § B-2-b du Chapitre IV, la probabilité d'observer les résultats $A$ et $B$ avec deux expériences éloignées et des choix $a$ et $b$ pour leurs paramètres de mesure respectifs est :

$$\mathcal{P}\left(A,B \shortmid a,b,\lambda_1,\lambda_2\right) = \mathcal{P}\left(A \shortmid B,a,b,\lambda_1,\lambda_2\right)\ \mathcal{P}\left(B \shortmid a,b,\lambda_1,\lambda_2\right) \quad \text{(App. B-7)}$$

(la probabilité d'obtenir le résultat $B$ si les valeurs $a$, $b$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ sont réalisées est multipliée par la probabilité d'obtenir $A$ si, en plus, le résultat $B$ a été obtenu). Cette forme est complètement générale, mais pas suffisante pour obtenir une inégalité de Bell (elle est d'ailleurs valable en mécanique quantique, qui viole l'inégalité BCHSH). Deux hypothèses sont alors introduites :

- Le résultat $A$ observé dans une région de l'espace ne peut pas dépendre du paramètre de mesure choisi arbitrairement dans une autre région de l'espace très éloignée, hors de son cône du passé. Jarrett [171] appelle cette condition "locality", mais on la désigne souvent par "parameter independence" (indépendance vis-à-vis des paramètres de mesure) ; Shimony [173] préfère les mots "remote context independence" (indépendance vis-à-vis du contexte éloigné). Avec cette hypothèse, dans le produit des probabilités nous pouvons supprimer la dépendance en $b$ de la première[2], ainsi que la dépendance en $a$ de la seconde. Alors :

$$\mathcal{P}\left(A,B \shortmid a,b,\lambda_1,\lambda_2\right) = \mathcal{P}\left(A \shortmid B,a,\lambda_1,\lambda_2\right)\ \mathcal{P}\left(B \shortmid b,\lambda_1,\lambda_2\right) \quad \text{(App. B-8)}$$

[2]Cette indépendance est une nécessité relativiste qui correspond à l'impossibilité de transmettre des signaux instantanés (§ D-1 du Chapitre V).

Cette forme n'est toujours pas suffisante pour obtenir une inégalité de Bell, à cause de la dépendance en $B$ du premier terme dans le produit.

- Chaque résultat de mesure peut dépendre de toutes sortes de causes possibles dans son cône du passé, mais pas du résultat obtenu hors de ce cône. En d'autres termes : les résultats $A$ et $B$ peuvent être corrélés de multiples façons du fait de la dépendence en $\lambda_1$ et $\lambda_2$ de leurs probabilités ($\lambda_1$ et $\lambda_2$ peuvent avoir des corrélations arbitraires) ; mais ensuite l'événement aléatoire final qui se produit est un événement d'espace-temps local, qui ne peut pas être influencé par un autre événement similaire se produisant à une très grande distance. Ballentine et Jarrett [172] appellent cette condition "predictive completeness", mais on utilise souvent également les mots "outcome independence" (indépendance vis-à-vis des résultats) ; Shimony parle[3] de "remote outcome independence". Nous pouvons alors supprimer la dépendance en $B$ du premier terme du produit, et écrire :

$$\mathcal{P}\left(A, B \shortmid a, b, \lambda_1, \lambda_2\right) = \mathcal{P}\left(A \shortmid a, \lambda_1, \lambda_2\right)\ \mathcal{P}\left(B \shortmid b, \lambda_1, \lambda_2\right) \quad \text{(App. B-9)}$$

Cette forme conduit à l'inégalité BCHSH, comme dans le § B-2-b-$\gamma$ du Chapitre IV : $\mathcal{P}\left(A, B \shortmid a, b\right)$ est donnée par (IV-25), les moyennes de produits sont calculées de la même façon, et l'on obtient (IV-32).

Comparons les étapes de ce raisonnement avec celui de la mécanique quantique standard. L'indépendance vis-à-vis des paramètres de mesure s'applique dans une certaine mesure à la mécanique quantique, puisqu'elle fournit une valeur de $\mathcal{P}\left(B \shortmid a, b, \lambda_1, \lambda_2\right)$ qui est indépendante[4] de $a$ (sinon, une transmission instantanée de signaux serait possible, en contradiction avec la relativité – *cf.* § D du Chapitre V). Cependant, $\mathcal{P}\left(A \shortmid B, a, b, \lambda_1, \lambda_2\right)$ n'est en général pas indépendant de $B$ et $b$. Par exemple, les équations (IV-3) et (IV-4) expriment que, pour deux spins dans un état singulet, la probabilité conditionnelle de la seconde mesure dépend à la fois de la direction choisie pour la première mesure et de son résultat. Ni l'indépendance vis-à-vis des paramètres de mesure ni celle vis-à-vis des résultats ne sont donc satisfaites, ce qui n'empêche pas la mécanique quantique de rester compatible avec la relativité [172].

Le conclusion est que la loi de Bayes des probabilités conditionnelles, combinée avec l'indépendance vis-à-vis des paramètres de mesure et des résultats,

[3] Ce qu'il appelle "locality" est la conjonction de cette condition avec la "remote context independence".

[4] En mécanique quantique, si le système est préparé dans un état pur, $\lambda_1$ et $\lambda_2$ n'apparaissent nulle part. Mais, s'il est préparé dans un mélange statistique, $\lambda_1$ et $\lambda_2$ peuvent être introduits pour décrire ce mélange.

suffit pour arriver à l'inégalité BCHSH. Une violation de cette inégalité signifie donc qu'au moins l'une de ces indépendances n'est pas satisfaite, comme c'est le cas en mécanique quantique.

# Appendice C : Une tentative pour construire une théorie quantique "séparable" (non déterministe mais locale)

Nous donnons maintenant un exemple d'une théorie non déterministe et locale qui ressemble beaucoup à la mécanique quantique, dont elle utilise le formalisme, mais reste en fait très différente. Cette théorie prend en compte le non-déterminisme de la mécanique quantique, mais donne au vecteur d'état un rôle qui est plus local que dans la théorie quantique standard. Imaginons un physicien qui a bien assimilé les règles de base de la mécanique quantique et son non-déterminisme, mais qui reste sceptique concernant la non-localité (ou la non-séparabilité ; nous avons défini ces termes au § C-3-c du Chapitre III, mais on pourra également se reporter aux Refs. [24, 55]). Ce physicien pense que, si des mesures sont effectuées dans des régions très éloignées de l'espace, il est plus naturel d'appliquer les règles de la mécanique quantique séparément dans ces régions. Pour calculer la probabilité d'un résultat de mesure quelconque, il va donc appliquer les règles de la mécanique quantique d'une façon qui est parfaitement correcte localement, mais il va aussi supposer qu'il est possible de raisonner séparément dans les deux régions de l'espace. Si par exemple les deux mesures sont effectuées dans des galaxies différentes, notre physicien applique les règles de la mécanique quantique à l'échelle galactique, mais pas intergalactique !

Comment alors traiter le processus de mesure dans la première galaxie ? Il est tout à fait naturel de supposer que le spin qu'elle contient est décrit par un vecteur d'état (ou par un opérateur densité, cela ne fait ici aucune différence) que l'on peut utiliser pour appliquer la formule standard donnant les probabilités d'obtenir chacun des résultats possibles. Il va sans dire que penser que chaque spin est décrit par un opérateur unique et fixe ne serait pas une bonne idée : évidemment, on perdrait alors toutes les corrélations possibles entre les résultats de mesures effectuées dans les deux galaxies. Une meilleure idée est donc de supposer que les opérateurs densité en question sont fonctions $\rho_1(\lambda)$ et $\rho_2(\lambda)$ d'une variable aléatoire $\lambda$, correspondant par exemple à des conditions d'émission fluctuantes des particules. La méthode est alors claire : pour chaque condition d'émission, on effectue un calcul

quantique standard dans chaque région de l'espace, et ensuite on prend la moyenne sur toutes les conditions d'émission en question. Après tout, ceci n'est autre que la méthode universelle pour calculer des corrélations dans tout le reste de la physique ! Cette méthode prend en compte le caractère non déterministe de la mécanique quantique[1], mais y introduit une notion de séparabilité dans l'espace qui est directement dans le prolongement du raisonnement EPR. Notre physicien peut par exemple supposer que les deux événements de mesure sont séparés par un intervalle relativiste du genre espace, de sorte qu'aucune relation causale ne peut les relier en aucun cas ; effectuer un calcul indépendant des deux phénomènes semble alors totalement justifié.

Si nous notons $|+(a)\rangle$ l'état propre de la mesure associé au résultat $+1$, la probabilité d'obtenir le résultat $+1$ si la première mesure est faite le long d'une direction $a$ est alors :

$$\mathcal{P}_+^A(a,\lambda) = \langle +(a)|\, \rho_1(\lambda)\, |+(a)\rangle \qquad \text{(App. C-1)}$$

De même, nous écrivons la probabilité du résultat $-1$ sous la forme :

$$\mathcal{P}_-^A(a,\lambda) = \langle -(a)|\, \rho_1(\lambda)\, |-(a)\rangle \qquad \text{(App. C-2)}$$

Si, au lieu de la direction $a$, une autre direction $a'$ est choisie, les calculs sont les mêmes et conduisent à deux fonctions $\mathcal{P}_\pm^A(a',\lambda)$. Quant aux mesures effectuées dans la deuxième région de l'espace, elles fournissent les deux fonctions $\mathcal{P}_+^B(b,\lambda)$ et $\mathcal{P}_-^B(b,\lambda)$.

Calculons maintenant la moyenne du produit des deux résultats, qui n'est autre que la moyenne sur $\lambda$ de l'expression déjà écrite en (App. B-5). Si nous définissons $\widehat{A}(\lambda)$ et $\widehat{B}(\lambda)$ par :

$$\begin{aligned} \widehat{A}(\lambda) &= \mathcal{P}_+^A(a,\lambda) - \mathcal{P}_-^A(a,\lambda) \\ \widehat{B}(\lambda) &= \mathcal{P}_+^B(b,\lambda) - \mathcal{P}_-^B(b,\lambda) \end{aligned} \qquad \text{(App. C-3)}$$

nous pouvons écrire la moyenne du produit des résultats sous la forme :

$$\int d\lambda\; n(\lambda)\; \widehat{A}(\lambda)\; \widehat{B}(\lambda) \qquad \text{(App. C-4)}$$

où $n(\lambda)$ est la densité de distribution de la variable $\lambda$. La différence avec le résultat habituel est que, ici, $\widehat{A}(\lambda)$ et $\widehat{B}(\lambda)$ ne sont pas définis comme des fonctions toujours égales à $\pm 1$.

Pour terminer la démonstration, nous avons le choix entre deux méthodes différentes :

[1] Au § B-2-b du Chapitre VIII, nous avons vu que c'est également elle qu'il faut appliquer, dans le cadre de la mécanique quantique standard, pour traiter le cas des corrélations observées par Alice et Bob lorsqu'Ève s'interpose pour mesurer la polarisation des particules.

(i) soit nous procédons comme dans l'Appendice B et introduisons une variable supplémentaire $\mu$ pour exprimer les différences de probabilités comme celles de (App. B-3) en termes de nouvelles quantités $\overline{A}(a, \lambda, \mu)$ et $\overline{B}(b, \lambda, \mu')$, toujours égales à $\pm 1$. Ceci conduit à la même expression mathématique et la même démonstration des inégalités BCHSH que ci-dessus.

(ii) soit nous introduisons les couples d'orientation $(a, b)$, $(a, b')$, $(a', b)$, $(a', b')$ pour calculer la moyenne sur $\lambda$ de l'expression :

$$\widehat{A}(\lambda)\widehat{B}(\lambda) - \widehat{A}(\lambda)\widehat{B}'(\lambda) + \widehat{A}'(\lambda)\widehat{B}(\lambda) + \widehat{A}'(\lambda)\widehat{B}'(\lambda) \qquad \text{(App. C-5)}$$

Les $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$, qui sont maintenant définis comme des différences de probabilités, ne sont plus nécessairement égaux à $\pm 1$, mais il est facile de voir qu'ils prennent des valeurs entre $+1$ et $-1$ , quelle que soit la valeur de $\lambda$. Il s'ensuit[2] que l'expression (App. C-5) est nécessairement comprise entre $\pm 2$, ce qui nous ramène au calcul du § A-2 du Chapitre IV.

Le théorème de Bell reste vrai dans un grand nombre de situations différentes. On peut cependant se demander à quel point exactement l'approche de notre physicien sceptique est devenue incorrecte et pourquoi ses résultats, du fait qu'ils satisfont aux inégalités de Bell, sont nécessairement incompatibles avec ceux de la mécanique quantique standard (pas forcément toujours, mais au moins dans certains cas) ; après tout, son raisonnement était fondé sur une utilisation du formalisme quantique habituel. En fait, ce qui a causé l'erreur était la volonté de traiter les mesures quantiques éloignées comme des événements indépendants, séparables, alors que la mécanique quantique nous impose de considérer le système des deux spins comme un tout indissociable ; au sein de ce tout, il est interdit de distinguer deux sous-systèmes. Le raisonnement quantique correct fait donc usage de vecteurs d'état (ou d'opérateurs densité) qui décrivent à la fois l'ensemble du système dans un objet mathématique unique. Cet exemple illustre donc que c'est réellement la séparabilité et/ou la localité qui sont en jeu dans une violation des inégalités de Bell, pas le déterminisme.

[2]Pour voir pourquoi, considérons pour un instant $\lambda$, $\widehat{A}$ et $\widehat{A}'$ comme fixés, ne gardant que $\widehat{B}$ et $\widehat{B}'$ comme variables. Dans l'espace de ces variables, l'expression (App. C-5) correspond à une surface plane qui, aux quatre coins du carré $\widehat{B} = \pm 1$, $\widehat{B}' = \pm 1$, prend les valeurs $\pm 2\widehat{A}$ ou $\pm 2\widehat{A}'$, qui sont comprises entre $\pm 2$ ; au centre du carré, le plan passe par l'origine. Par interpolation linéaire il est clair que, à l'intérieur du carré, la fonction donnée par (App. C-5) reste également comprise entre $\pm 2$ ; ainsi, sa valeur moyenne possède la même propriété.

# Appendice D : Probabilité maximale pour un état particulier

Dans cet appendice nous donnons plus de détails sur les calculs du § C du Chapitre VI ; l'état à deux particules correspondant à la mesure considérée en (i) est le produit tensoriel du ket (VI-40) par l'état correspondant pour le second spin :

$$\cos^2\theta\,|+,+\rangle + \sin\theta\cos\theta\,[|+,-\rangle + |-,+\rangle] + \sin^2\theta\,|-,-\rangle \qquad \text{(App. D-1)}$$

donc le produit scalaire avec le ket (VI-45) est :

$$\cos^2\theta\sin\theta - 2\sin\theta\cos^2\theta = -\sin\theta\cos^2\theta \qquad \text{(App. D-2)}$$

La probabilité requise est obtenue en divisant le carré de cette expression par la norme au carré du vecteur d'état (VI-40) :

$$\mathcal{P} = \frac{\sin^2\theta\cos^4\theta}{2\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{\sin^2\theta\left(1-\sin^2\theta\right)^2}{2-\sin^2\theta} \qquad \text{(App. D-3)}$$

Un tracé de cette fonction montre qu'elle a un maximum qui vaut approximativement 0.09 comme indiqué dans le Chapitre VI.

# Appendice E : Influence d'une sélection des paires observées

Dans la démonstration du théorème de Bell, nous avons supposé que toutes les paires de particules émises par la source sont effectivement détectées, quelles que soient les valeurs choisies pour les paramètres de mesure $a$ et $b$ ; dans le cadre du réalisme local, les inégalités de Bell sont alors satisfaites, ce qui implique qu'il est impossible de reproduire la dépendance en $a$ et $b$ (IV-10) du taux de corrélation prédit par la mécanique quantique (puisque celle-ci autorise des violations des inégalités de Bell). Dans cet appendice, nous examinons ce qui se produit lorsque le processus de détection introduit une sélection dans l'ensemble des paires émises ; dans un premier temps (§ 1), nous supposons que cette sélection est indépendante de $a$ et $b$, dans un second (§ 2) nous levons cette restriction. Dans ce dernier cas, nous verrons qu'il devient alors effectivement possible de reproduire n'importe quelle variation de la fonction de corrélation en fonction de $a$ et $b$, y compris la prédiction (IV-10) en $\cos(a-b)$ de la mécanique quantique, tout en restant dans le cadre du réalisme local. C'est l'origine du "loophole" discuté au § C-1-a du Chapitre IV.

## 1. Sélection indépendante des paramètres de mesure

Notre premier modèle est le suivant :

(i) Nous supposons l'existence d'un processus de sélection indépendant du choix des paramètres $a$ et $b$ des expériences. On peut par exemple supposer que les particules sont émises par la source de façon aléatoire dans toutes les directions, et que seules les particules qui sont émises dans un petit angle solide peuvent atteindre les analyseurs et les détecteurs. Pour chaque particule, nous caractérisons cette direction d'émission par une variable aléatoire $\omega$. La première particule est donc détectée seulement si la variable aléatoire $\omega_1$ tombe dans un domaine angulaire $D_\lambda(\Omega_1)$ correspondant à un cône dont

le sommet est sur la source et dont la base est le pourtour du diaphragme d'entrée du détecteur :

$$\omega_1 \in D_1(\Omega_1) \qquad \text{(App. E-1)}$$

Si la condition n'est pas satisfaite, la particule est perdue. De même, la seconde particule est détectée seulement si sa variable aléatoire $\omega_2$ tombe dans le domaine $D_\lambda(\Omega_2)$, perdue sinon. Ce type de sélection angulaire se produit en pratique dans toutes les expériences où la dimension limitée des détecteurs impose une sévère limitation angulaire ; les deux domaines seront alors de petits domaines en $\omega$, de tailles $d\Omega_{1,2}$ et centrés autour des valeurs $\omega_{\text{det}\,1,2}$.

(ii) Les particules qui ont passé avec succès la sélection précédente et arrivent donc sur l'analyseur et le détecteur donnent un résultat qui dépend d'une variable aléatoire $\lambda_1$ pour la première, $\lambda_2$ pour la seconde. Comme au § A-2 du Chapitre IV, ces résultats dépendent également du paramètre local choisi pour la mesure ; ils sont notés $A(a, \lambda_1) = \pm 1$ pour la première particule, $B(b, \lambda_2)$ pour la seconde (nous supposons l'existence de détecteurs à deux voies, comme dans une expérience EPRB). Pour les particules qui n'ont pas passé la sélection (i), on peut par convention leur attribuer le résultat de mesure 0.

L'ensemble des $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\omega_1$, $\omega_2$, peuvent être groupés formellement en un paramètre unique $\Lambda$ avec plusieurs composantes (un vecteur dans un espace à plusieurs dimensions) ; chaque paire est alors caractérisée par une valeur donnée de $\Lambda$, qui détermine si la paire sera détectée ou non par les appareils de mesure et quels résultats elle fournira. Supposons maintenant que la source émette les paires de particules de façon aléatoire. Les valeurs de $\Lambda$ sont alors associées à une distribution de probabilité $\rho(\Lambda)$, avec la condition de normalisation :

$$\int d\Lambda\ \rho(\Lambda) \ = \ \int d\lambda_1 \int d\lambda_2 \int d\omega_1 \int d\omega_2\ \rho(\lambda_1, \lambda_2, \omega_1, \omega_2) = 1 \quad \text{(App. E-2)}$$

La valeur moyenne du produit des résultats des deux mesures est alors :

$$\langle AB \rangle = \int d\lambda_1 \int d\lambda_2 \int_{D_1(\Omega_1)} d\omega_1 \int_{D_2(\Omega_2)} d\omega_2\ \rho(\Lambda)\ A(a, \lambda_1)\ B(b, \lambda_2) \qquad \text{(App. E-3)}$$

qui, si les tailles des domaines $d\Omega_{1,2}$ centrés autour des valeurs $\omega_{\text{det}\,1,2}$ sont petites, est également donnée par :

$$\langle AB \rangle \simeq d\Omega_1 d\Omega_2 \int d\lambda_1 \int d\lambda_2\ \rho(\lambda_1, \lambda_2, \omega_{\text{det}\,1}, \omega_{\text{det}\,2})\ A(a, \lambda_1)\ B(b, \lambda_2) \qquad \text{(App. E-4)}$$

Ces deux relations sont exactement du type de celles qui relèvent du théorème de Bell et permettent de démontrer les inégalités correspondantes, par

exemple l'inégalité BCHSH donnée en (IV-9). On peut cependant remarquer que, si la sélection est efficace, la plupart des particules donnent le résultat zéro et ne contribuent donc pas à la valeur moyenne ; l'expression (App. E-4) est alors nécessairement très petite (elle contient le produit $d\Omega_1 d\Omega_2$ qui lui-même est très petit) ; il n'est alors pas surprenant que la somme de quatre valeurs moyennes ne puisse jamais atteindre la valeur $\pm 2$. En mécanique quantique, les probabilités de détection de paires de particules sont également proportionnelles au produit $d\Omega_1 d\Omega_2$, donc très petites ; il n'y a alors aucun espoir de violer les inégalités en dépassant $\pm 2$, de sorte que la situation n'est pas très intéressante.

Cependant, on peut prendre un autre point de vue : au lieu de normaliser les valeurs moyennes sur l'ensemble des paires émises, normaliser sur l'ensemble des paires détectées. On remplace alors la normalisation (App. E-2) par :

$$\int d\lambda_1 \int d\lambda_2 \int_{D_1(\Omega_1)} d\omega_1 \int_{D_2(\Omega_2)} d\omega_2 \ \rho(\lambda_1, \lambda_2, \omega_1, \omega_2) = 1 \qquad \text{(App. E-5)}$$

soit :

$$d\Omega_1 d\Omega_2 \int d\lambda_1 \int d\lambda_2 \ \rho(\lambda_1, \lambda_2, \omega_{\text{det}\,1}, \omega_{\text{det}\,2}) \simeq 1 \qquad \text{(App. E-6)}$$

Ce changement de normalisation introduit dans $\rho$ un facteur en $1/d\Omega_1 d\Omega_2$ qui s'élimine avec celui de la valeur moyenne (App. E-4) ; la forte réduction des valeurs moyennes due à la sélection des paires ne se produit plus, et on retombe alors tout simplement dans un cas exactement équivalent à celui où cette sélection n'existait pas. La combinaison BCHSH de quatre valeurs moyennes peut alors atteindre les valeurs $\pm 2$. En mécanique quantique, comme le petit facteur des angles solides a maintenant disparu, on retrouve la seule dépendance en $\cos(a - b)$ en fonction des paramètres de mesure $a$ et $b$, qui conduit à une violation de l'inégalité de Bell.

## 2. Sélection dépendante des paramètres de mesure

Nous remplaçons maintenant l'hypothèse (i) ci-dessus par une condition plus générale, n'excluant plus une dépendance en fonction des paramètres de mesure :

Il existe maintenant une condition de sélection qui dépend des paramètres expérimentaux $a$ et $b$ : par exemple, après avoir été émises, et lorsqu'elles se rapprochent des analyseurs, les particules sont soumises à un processus physique (une absorption par exemple) qui en fait disparaître une proportion, d'une façon qui dépend du paramètre $a$ pour la première particule, $b$ pour la

seconde. La condition de non-absorption pour la première particule devient alors :

$$\omega_1 \in D_1(a) \qquad \text{(App. E-7)}$$

et celle pour la seconde particule est semblable. Si $a$ et $b$ sont des angles, nous pouvons par exemple écrire la condition de non-absorption des particules sous la forme :

$$a - \Delta a < \omega_1 < a + \Delta a \quad ; \quad b - \Delta b < \omega_2 < a + \Delta b \qquad \text{(App. E-8)}$$

où $\Delta a$ et $\Delta b$ sont de petits angles donnés. On peut alors remplacer avec une bonne approximation $\rho(\lambda_1, \lambda_2, \omega_1, \omega_2)$ par $\rho(\lambda_1, \lambda_2, a, b)$, et la relation (App. E-4) est alors remplacée par :

$$\langle AB \rangle \simeq \Delta a \ \Delta b \int d\lambda_1 \int d\lambda_2 \ \rho(\lambda_1, \lambda_2, a, b) \ A(a, \lambda_1) \ B(b, \lambda_2) \qquad \text{(App. E-9)}$$

A ce stade, il devient clair que le modèle permet une souplesse bien plus grande que ci-dessus pour reproduire des dépendances en $a$ et $b$ arbitraires ; nous sommes en effet libres de choisir la distribution positive $\rho(\Lambda)$ à notre gré, en particulier sa dépendance par rapport aux variables $\omega_1$ et $\omega_2$ qui, alors, introduit dans (App. E-9) une dépendance de $\rho$ en $a$ et $b$.

Pour voir de façon mathématiquement précise pourquoi, simplifions encore le modèle, en supposant par exemple que les domaines $D_1^{\pm}$ de la variable $\lambda_1$ où $A(a, \lambda_1) = \pm 1$ sont indépendants de $a$, et une hypothèse semblable pour l'autre particule ; c'est certes un cas extrême, puisque $\lambda$ ne joue plus aucun rôle direct, toute la dépendance étant reportée dans celle de $\rho$ en $a$ et $b$, mais il permet toutefois de reproduire la mécanique quantique. En effet, on a alors :

$$\langle AB \rangle \simeq \Delta a \ \Delta b \ [I_{+,+} + I_{-,-} - I_{+,-} - I_{-,+}] \qquad \text{(App. E-10)}$$

avec :

$$I_{\pm,\pm} = \int_{D_1^{\pm}} d\lambda_1 \int_{D_2^{\pm}} d\lambda_2 \ \rho(\lambda_1, \lambda_2, a, b) \qquad \text{(App. E-11)}$$

Ces quatre intégrales sont évidemment proportionnelles aux probabilités des quatre résultats de mesure $(\pm, \pm)$, dont l'expression quantique a été donnée en (IV-3) et (IV-4). En choisissant arbitrairement la dépendance de $\rho$ en $\omega_1$ et $\omega_2$, donc de $\rho(\lambda_1, \lambda_2, a, b)$ en $a$ et $b$, nous pouvons obtenir n'importe quelle dépendance des quatre probabilités par rapport aux paramètres de mesure, tout en restant dans le cadre d'un modèle réaliste et local. Il suffit par exemple de choisir une distribution $\rho$ constante (en fonction de $\lambda_1$ et $\lambda_2$) dans les quatre domaines $D_{1,2}^{\pm}$, et de donner à $\rho$ une valeur proportionnelle à la probabilité choisie pour réaliser l'accord des dépendances en $a$ et $b$ recherché.

On reproduit ainsi les prédictions d'une théorie arbitraire[1], la seule condition étant qu'elle fournisse des probabilités positives pour toutes les valeurs de $a$ et $b$.

Quelle est l'interprétation physique de ce résultat ? Nous avons simplement supposé que, pour chaque valeur des paramètres $a$ et $b$, une sélection étroite des particules détectées était effectuée. A chaque changement (non infinitésimal) des paramètres, l'expérience détecte des échantillons des paires pratiquement différents, de sorte qu'il suffit d'attribuer à ces classes de paires des propriétés arbitraires pour reproduire toutes les dépendances possibles en $a$ et $b$, y compris celles de la mécanique quantique. Ce sont toutefois uniquement les variations relatives en fonction de $a$ et $b$ qui sont reproduites par ce modèle, et non les valeurs absolues des taux de coïncidence. Il existe en fait un compromis entre précision et efficacité de détection : plus les $\Delta a$ et $\Delta b$ sont petits, mieux l'équation (App. E-9) peut approcher une variation quelconque, mais le prix à payer est que de plus en plus de paires sont laissées de côté (non détectées).

La conclusion est que la validité des inégalités de Bell est étroitement associée avec une hypothèse de détection de toutes les paires d'un échantillon bien défini, indépendant de $a$ et $b$. Si, à chaque fois qu'on change les paramètres de mesure, on change la catégorie des paires détectées, aucune limite de type Bell ne peut exister pour la dépendance des taux de corrélation en fonction des paramètres de mesure $a$ et $b$.

[1] La Ref. [206] donne quelques exemples concrets de processus de sélection des paires dépendant des paramètres de mesure qui conduisent à des violations artificielles des inégalités BCHSH ; dans son § 3-3, elle montre que la sélection peut conduire à dépasser la borne de Cirelson et, dans le § 3-4, qu'on peut obtenir la violation maximale mathématiquement possible, même avec des paires de spins non corrélés.

# Appendice F : Impossibilité d'une transmission superluminale de messages

## 1. Introduction

Dans les schémas d'expériences EPR, l'application du postulat de réduction projette instantanément la seconde particule sur un état propre correspondant à l'axe de quantification imposé par la première mesure. S'il était possible de parfaitement déterminer cet état, une transmission de messages plus rapide que la vitesse de la lumière serait possible : connaissant cet état, le second expérimentateur pourrait calculer la direction de quantification à laquelle il correspond, et donc connaître la direction choisie par le premier expérimentateur[1], même si tous deux sont dans deux galaxies lointaines très distantes l'une de l'autre. Cette possibilité pourrait être mise en œuvre pour construire une sorte de télégraphe, qui s'affranchirait totalement de toute limitation relativiste imposant un délai minimal de transmission (proportionnel à la distance couverte). Mais nous avons vu au § B-1 qu'il est impossible de déterminer complètement un état quantique à partir d'une seule réalisation de cet état. En effet, une seule réalisation ne permet qu'une seule mesure qui, sauf cas très particulier, perturbe l'état de sorte qu'une seconde mesure sur le même état n'est pas possible ; la première mesure ne donne pas, et de loin, suffisamment d'information pour complètement connaître l'état quantique – voir la discussion du § B du Chapitre VIII. Le télégraphe superluminal envisagé ne fonctionnerait donc pas.

Si l'utilisation directe d'une seule particule n'est pas possible pour envoyer le message, ne pourrions-nous pas reproduire son état en de multiples copies, et utiliser ces copies pour recevoir un message ? Supposons en effet pour un instant qu'un clonage parfait des états quantiques soit possible – plus précisément que soit possible la reproduction multiple (avec de nombreuses

[1] Ce qui est discuté ici est l'envoi de messages via le choix des paramètres de mesure, qui sont librement choisis par les expérimentateurs. En revanche, les résultats des expériences ne sont pas choisis par eux, mais aléatoires ; même s'ils sont corrélés entre les deux régions de l'espace, ils ne peuvent être utilisés directement comme signaux transportant des messages.

particules) de l'état inconnu d'une particule unique[2]. L'application du processus de clonage à la seconde particule d'une paire EPR permettrait alors d'effectuer un nombre arbitraire de copies à l'identique de son état ; dans une seconde étape, on pourrait alors réaliser une série de mesures sur chacune de ces copies, et ainsi progressivement déterminer l'état inconnu avec une précision arbitraire. Mais nous avons également vu au § A du Chapitre VIII que la mécanique quantique ne permet pas une telle duplication fidèle des états [367, 368] ; si l'on pense par exemple à utiliser l'émission stimulée pour cloner l'état de polarisation d'un photon unique en de multiples copies, la présence de l'émission spontanée introduit du bruit dans le processus et empêche la recopie exacte.

Tout ceci ne résout cependant pas complètement la question générale : même sans cloner des états quantiques ni mesurer parfaitement un état, donc en se contentant d'utiliser seulement l'information fournie par une seule mesure dans chaque région de l'espace, il n'est en rien évident que la réduction instantanée du vecteur d'état ne puisse pas être utilisée pour une communication plus rapide que la lumière. Après tout, il est également possible de répéter l'expérience de nombreuses fois avec des paires de particules indépendantes, et de chercher à extraire une information statistique des résultats des mesures. Or nous savons que les corrélations EPR sont très particulières et présentent des propriétés très inattendues, comme l'illustrent les violations des inégalités de Bell. Pourquoi ne pas imaginer qu'en utilisant des schémas EPR généralisés (plus de deux systèmes intriqués, systèmes délocalisés, etc.) il soit possible d'inventer des schémas d'expériences autorisant la communication superluminale de messages ? Nous allons maintenant montrer de façon générale que de tels schémas n'existent pas ; nous donnerons la preuve d'impossibilité dans le cas de deux particules (ou deux régions de l'espace), mais sa généralisation à un nombre plus grand de systèmes dans un nombre arbitraire de régions de l'espace différentes est directe.

## 2. Un premier schéma

Nous supposons donc qu'initialement deux observateurs éloignés ont accès à un ensemble de paires de particules corrélées deux à deux, qui se sont déjà propagées depuis leur source commune : la première vers la galaxie $A$ où se trouve Alice, la seconde vers la galaxie $B$ où se trouve Bob. Chaque paire est

[2] L'opération de "clonage" ne doit pas être confondue avec la préparation d'une série de particules dans le même état quantique choisi par l'expérimentateur : une telle opération est réalisée par exemple en envoyant de nombreuses particules de spin 1/2 à travers le même aimant de Stern et Gerlach jouant le rôle de filtre polarisant. Ce qui est théoriquement impossible est de dupliquer parfaitement un état quantique arbitraire et inconnu.

dans un état d'intrication quantique arbitraire ; nous la décrivons de façon générale par un opérateur densité avant la mesure $\rho(t_0)$. Une fois que les particules sont très éloignées, elles ne peuvent interagir, de sorte que leur hamiltonien est simplement la somme $H_1 + H_2$ de ceux de deux particules isolées. Alice choisit alors un paramètre de mesure $a$ ou, plus généralement, une observable locale $O_A(1)$ à mesurer ; le second observateur, Bob, est lui aussi libre de choisir n'importe quelle observable locale $O_B(2)$, et peut utiliser autant de particules que nécessaire pour mesurer la fréquence d'apparition de chaque résultat. La question est alors de savoir si le second observateur peut extraire une information quelconque concernant le choix de $O_A$ à partir d'une observation statistique quelconque des résultats qu'il observe en mesurant les différents $O_B$.

La relation (XI-9) nous donne la probabilité de l'événement où Alice observe un résultat $m$ à l'instant $t_1$ et Bob un résultat $n$ à l'instant $t_2$ :

$$\mathcal{P}(m,t_1;n,t_2) = Tr\left\{\widehat{P}_{O_B}(n,t_2)\ \widehat{P}_{O_A}(m,t_1)\ \rho(t_0)\ \widehat{P}_{O_A}(m,t_1)\ \widehat{P}_{O_B}(n,t_2)\right\} \qquad \text{(App. F-1)}$$

où $\widehat{P}_{O_A}(m,t_1)$ est, en point de vue de Heisenberg, le projecteur sur les états propres correspondant à la mesure d'Alice, et $\widehat{P}_{O_B}(n,t_2)$ le projecteur correspondant pour Bob. Mais Bob n'a pas connaissance des résultats obtenus par Alice, de sorte que la probabilité des événements qu'il observe est la somme de (App. F-1) sur $m$ (§ D-1 du Chapitre V) :

$$\mathcal{P}_B(n,t_2) = \sum_m \mathcal{P}(m,t_1;n,t_2) \qquad \text{(App. F-2)}$$

Pour calculer cette somme, nous commençons par remarquer que les deux projecteurs $\widehat{P}_{O_A}(m,t_1)$ et $\widehat{P}_{O_B}(n,t_2)$ commutent entre eux : ils correspondent en effet à des opérateurs agissant sur des particules différentes, et évoluent en point de vue de Heisenberg sous l'influence d'hamiltoniens indépendants $H_1$ et $H_2$. Dans le membre de droite de (App. F-1), considérons l'avant-dernier opérateur $\widehat{P}_{O_A}(m,t_1)$, que nous pouvons amener en dernière position. Ensuite, à cause de l'invariance par permutation des opérateurs sous la trace, nous pouvons le faire passer en toute première position, juste avant le premier $\widehat{P}_{O_B}(n,t_2)$, ou encore juste après puisqu'il commute avec cet opérateur. Comme le carré du projecteur $\widehat{P}_{O_A}(m,t_1)$ est égal au projecteur lui-même, pour finir nous avons ainsi simplement fait disparaître l'un des opérateurs $\widehat{P}_{O_A}(m,t_1)$ de (App. F-1). Il ne nous reste maintenant qu'à effectuer la sommation sur $m$. Comme :

$$\sum_m \widehat{P}_{O_A}(m,t_1) = 1 \qquad \text{(App. F-3)}$$

nous obtenons pour finir :

$$\mathcal{P}_B(n,t_2) = Tr\left\{\widehat{P}_{O_B}(n,t_2)\ \rho(t_0)\ \widehat{P}_{O_B}(n,t_2)\right\} \qquad \text{(App. F-4)}$$

On constate alors que, dans cette probabilité, toute dépendance en fonction du choix de l'opérateur $O_A$ effectué par Alice a simplement disparu. Ainsi, en mesurant les probabilités des résultats des mesures locales qu'il peut effectuer, Bob n'a aucun moyen de pouvoir en déduire le choix de l'opérateur $O_A$ effectué par Alice.

La démonstration se généralise aisément au cas où Alice et Bob effectuent, non pas une seule mesure, mais plusieurs à des instants différents[3]. Il s'ensuit que, de façon générale, le second observateur reçoit exactement la même information, de façon totalement indépendante des décisions prises par le premier observateur ; même le fait qu'Alice ait effectué ou non des mesures est indétectable dans la galaxie de Bob. Aucune communication plus rapide que la vitesse de la lumière n'est ainsi possible.

## 3. Généralisation

On pourrait objecter qu'il n'est pas nécessaire de supposer que la particule 1 se trouve dans la région de l'espace $A$ et la particule 2 dans la région $B$ : si chacune des particules se trouve à la fois dans les deux régions, n'est-il pas possible d'imaginer des cas où les probabilités concernant Bob dépendent du choix des mesures effectuées par Alice ? En fait, cette situation n'est pas réellement différente de la précédente car, cette fois encore, tous les opérateurs correspondant aux mesures effectuées dans le région $A$ commutent avec tous ceux associés aux mesures effectuées dans la région $B$. En théorie des champs, cette propriété découle du fait que des opérateurs champs en des points d'espace-temps séparés par des intervalles du genre espace commutent. En théorie plus élémentaire, si Alice peut détecter les deux particules, on peut écrire l'opérateur de mesure qui lui correspond comme une somme d'opérateurs agissant sur les deux particules :

$$O_{Alice} = P_A(1)O_A(1)P_A(1) + P_A(2)O_A(2)P_A(2) \qquad \text{(App. F-5)}$$

où $P_A(1,2)$ est le projecteur sur tous les états de la particule 1, 2 sur tous les états localisés dans la région $A$ ; le premier terme correspond au cas où

[3] On procède comme plus haut, en commençant pas le dernier projecteur associé à une mesure effectuée par Alice ; on le fait passer en dernier dans la trace, puis en premier par permutation circulaire, puis on le regroupe avec son analogue en un seul projecteur. La sommation de ce projecteur résiduel sur les résultats correspondants donne alors 1. Puis on procède de même pour le second projecteur associé à la seconde mesure effectuée par Alice, etc. A la fin des sommations sur les $m$, on obtient une probabilité d'où toute dépendance par rapport au choix des $O_A$ a disparu.

Bien sûr, le cas intéressant est celui où les intervalles de temps entre les mesures sont plus courts que le temps de propagation de la lumière entre les deux régions de l'espace. Sinon, les particules auraient théoriquement le temps de se propager entre elles, de sorte que la comparaison avec la relativité perdrait son intérêt.

Alice détecte la particule 1, le second à celui ou c'est la particule 2. De façon similaire, la mesure effectuée par Bob correspond à l'opérateur :

$$O_{Bob} = P_B(1)O_B(1)P_B(1) + P_B(2)O_B(2)P_B(2) \qquad \text{(App. F-6)}$$

Il n'est alors pas difficile de vérifier que $O_{Alice}$ et $O_{Bob}$ commutent. En effet, dans le produit entre ces deux opérateurs les termes en $P_AP_B$ s'annulent lorsque les deux projecteurs contiennent la même particule ; il ne subsiste donc que la somme de deux termes :

$$P_A(1)O_A(1)P_A(1) \times P_B(2)O_B(2)P_B(2) \qquad \text{(App. F-7)}$$

et celui où les numéros des deux particules sont échangés. Ceci correspond au fait que, si les deux opérateurs effectuent chacun une mesure sur une particule, c'est soit la particule 1 qui est dans la région $A$ et la particule 2 qui est dans le région $B$, soit l'inverse, mais les deux particules ne peuvent pas se trouver du même côté. On voit alors immédiatement qu'il est possible d'intervertir l'ordre des facteurs dans (App. F-7) sans changer le résultat, de sorte que les deux opérateurs $O_{Alice}$ et $O_{Bob}$ commutent. Cette commutation nous permet donc d'appliquer la démonstration précédente et d'obtenir le même résultat : l'information disponible dans une région de l'espace est totalement indépendante de la nature de la mesure qui est effectuée dans l'autre. L'envoi de messages superluminaux est donc impossible, et la mécanique quantique n'est pas contradictoire avec la relativité !

# Appendice G : Mesures quantiques à des instants différents

Dans cet appendice nous nous intéressons aux probabilités associées à plusieurs mesures effectuées sur le même système quantique à des instants différents. Nous commençons par démontrer la relation (XI-7), que nous avons utilisée dans le § A-2 du Chapitre XI sans justification, afin d'en déduire la règle de Wigner (XI-9) à partir du postulat de réduction du vecteur d'état (§ B-2 du Chapitre I). Inversement, ce postulat peut être déduit comme une conséquence d'une règle de Born généralisée au cas de plusieurs mesures effectuées à des instants différents. Dans une seconde partie de l'appendice, nous discutons cette déduction avec un raisonnement qui fait intervenir le couplage du système avec l'environnement des appareils de mesure.

## 1. Formule de Wigner

Pour voir comment (XI-7) peut être démontré, commençons par calculer la probabilité pour que la première mesure donne le résultat $m$ au temps $t_1$. La règle de Born habituelle (I-6) indique que cette probabilité est donnée par le carré de la norme du ket $|\Psi_m(t_1)\rangle$ défini en (XI-3) :

$$\mathcal{P}_1(m,t_1) = \langle \Psi_m(t_1) \, | \Psi_m(t_1) \rangle \qquad \text{(App. G-1)}$$

que nous pouvons également exprimer sous la forme d'une trace :

$$\mathcal{P}_1(m,t_1) = Tr \left\{ |\Psi_m(t_1)\rangle \, \langle \Psi_m(t_1)| \right\} \qquad \text{(App. G-2)}$$

comme le montre immédiatement la définition de la trace dans une base orthonormée quelconque. Evaluons alors la probabilité conditionnelle $\mathcal{Q}_{N/M}$ pour que, si le résultat $m$ a été obtenu, la seconde mesure donne le résultat $n$. Après la première mesure, la relation (I-8) permet d'écrire le vecteur d'état normalisé sous la forme :

$$\left| \Psi'_m(t_1) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle \Psi_m(t_1) \, | \Psi_m(t_1) \rangle}} \left| \Psi_m(t_1) \right\rangle \qquad \text{(App. G-3)}$$

qui, après évolution entre les instants $t_1$ et $t_2$, n'est autre que le ket $|\Psi_m(t_2)\rangle$ écrit en (XI-4) et (XI-5), divisé par la racine carrée de $\langle\Psi_m(t_1)\,|\Psi_m(t_1)\rangle$. Le même raisonnement que ci-dessus donne alors la probabilité conditionnelle sous la forme :

$$\mathcal{Q}_{N/M}(m,t_1;n,t_2)=\frac{1}{\langle\Psi_m(t_1)\,|\Psi_m(t_1)\rangle}\,\langle\Psi_{m,n}(t_2)\,|\Psi_{m,n}(t_2)\rangle \qquad \text{(App. G-4)}$$

où $|\Psi_{m,n}(t_2)\rangle$ est défini par (XI-6). Nous en déduisons la probabilité d'obtenir la séquence des résultats $m$ et $n$ :

$$\mathcal{P}_1(m,t_1;n,t_2)=\mathcal{P}_1(m,t_1)\times\mathcal{Q}_{N/M}(m,t_1;n,t_2)=\langle\Psi_{m,n}(t_2)\,|\Psi_{m,n}(t_2)\rangle \qquad \text{(App. G-5)}$$

(dans le numérateur et le dénominateur deux facteurs $\langle\Psi_m(t_1)\,|\Psi_m(t_1)\rangle$ s'annulent mutuellement). De façon équivalente, on peut exprimer le membre de droite de (App. G-5) comme une trace :

$$\mathcal{P}_1(m,t_1;n,t_2)=Tr\left\{|\Psi_{m,n}(t_2)\rangle\,\langle\Psi_{m,n}(t_2)|\right\} \qquad \text{(App. G-6)}$$

Par récurrence, (App. G-5) conduit à (XI-7).

Pour démontrer la formule de Wigner (XI-9), nous introduisons l'opérateur de projection dans le point de vue de Heisenberg :

$$\widehat{P}_M(m,t_1)=U^\dagger(t_1,t_0)P_M(m)U(t_1,t_0) \qquad \text{(App. G-7)}$$

où $U(t_1,t_0)$ est l'opérateur unitaire d'évolution entre les instants $t_0$ et $t_1$ (§ A-4 du Chapitre XII). Les relations (XI-3) et (XI-1) donnent, puisque $U(t_1,t_0)U^\dagger(t_1,t_0)=1$ :

$$|\Psi_m(t_1)\rangle=P_M(m)U(t_1,t_0)\,|\Psi(t_0)\rangle=U(t_1,t_0)\widehat{P}_M(m,t_1)\,|\Psi(t_0)\rangle$$

et la relation (App. G-2), puisque $P_M(m)$ est hermitique :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1(m,t_1)&=Tr\left\{U(t_1,t_0)\widehat{P}_M(m,t_1)\,|\Psi(t_0)\rangle\,\langle\Psi(t_0)|\,\widehat{P}_M(m,t_1)U^\dagger(t_1,t_0)\right\}\\&=Tr\left\{\widehat{P}_M(m,t_1)\,|\Psi(t_0)\rangle\,\langle\Psi(t_0)|\,\widehat{P}_M(m,t_1)\right\}\\&=Tr\left\{\widehat{P}_M(m,t_1)\rho(t_0)\widehat{P}_M(m,t_1)\right\}\end{aligned} \qquad \text{(App. G-8)}$$

(nous avons effectué une permutation circulaire d'opérateurs sous la trace, ce qui nous a permis de supprimer deux opérateurs d'évolution dont le produit vaut 1).

Un calcul du même type peut être mené à partir de (App. G-5). Le ket $|\Psi_{m,n}(t_2)\rangle$ est donné par :

$$\begin{aligned}&|\Psi_{m,n}(t_2)\rangle=P_N(n)\;U(t_2,t_1)\;\;|\Psi_m(t_1)\rangle\\&=P_N(n)\;U(t_2,t_1)U(t_1,t_0)U^\dagger(t_1,t_0)\;P_M(m)\;U(t_1,t_0)\,|\Psi(t_0)\rangle\end{aligned} \qquad \text{(App. G-9)}$$

où nous avons inséré la relation $U(t_1,t_0)U^\dagger(t_1,t_0) = 1$ afin de faire apparaître à nouveau le projecteur en représentation de Heisenberg $\widehat{P}_M(m,t_1)$ ; nous simplifions alors le produit $U(t_2,t_1)U(t_1,t_0)$ en $U(t_2,t_0)$ et utilisons l'unitarité de $U$ pour écrire :

$$|\Psi_{m,n}(t_2)\rangle = U(t_2,t_0)\widehat{P}_N(n,t_2)\widehat{P}_M(m,t_1)\,|\Psi(t_0)\rangle \qquad \text{(App. G-10)}$$

Pour finir, compte tenu de (App. G-6) et après une permutation circulaire d'opérateurs sous la trace (qui fait disparaître deux $U$), nous obtenons :

$$\mathcal{P}_1(m,t_1;n,t_2) = Tr\left\{\widehat{P}_N(n,t_2)\widehat{P}_M(m,t_1)\,|\Psi(t_0)\rangle\,\langle\Psi(t_0)|\,\widehat{P}_M(m,t_1)\widehat{P}_N(n,t_2)\right\} \qquad \text{(App. G-11)}$$

qui conduit à (XI-9). Par la même méthode, il est possible de généraliser cette formule à plus de deux mesures, avec des projecteurs supplémentaires des deux côtés de $\rho(t_0)$. Par linéarité, le résultat reste valable dans les cas où l'opérateur densité $\rho(t_0)$ n'est pas un projecteur (état pur) comme dans (XI-8), mais un mélange statistique.

## 2. Règle de Born généralisée

Nous adoptons maintenant une approche différente qui met l'accent sur l'intrication du système mesuré $S$ avec les appareils de mesure[1]. Une mesure associée avec l'opérateur $M$ est effectuée à l'instant $t_1$, une autre associée à l'opérateur $N$ à l'instant $t_2$, etc. (nous supposons que deux mesures sont effectuées, mais la généralisation à un nombre arbitraire de mesures ne pose aucun problème).

Initialement, à l'instant $t_0$, le système $S$ est dans l'état $\left|\Psi^S(t_0)\right\rangle$ ; les deux appareils de mesure $M$ et $N$, qui n'ont pas encore servi, sont dans les états de départ $\left|\Psi^M(t_0)\right\rangle$ et $\left|\Psi^N(t_0)\right\rangle$, et le vecteur d'état $\left|\overline{\Psi}(t_0)\right\rangle$ du système total y compris les appareils est le produit (tensoriel) :

$$\left|\overline{\Psi}(t_0)\right\rangle = \left|\Psi^S(t_0)\right\rangle \otimes \left|\Psi^M(t_0)\right\rangle \otimes \left|\Psi^N(t_0)\right\rangle \qquad \text{(App. G-12)}$$

(tous ces états sont normalisés). Nous supposons que les trois systèmes évoluent indépendamment (sans aucune interaction), excepté entre les instants $t_1$ et $t_1'$ où $S$ interagit avec le premier appareil de mesure $M$, et entre les instants $t_2$ et $t_2'$ où il interagit avec le second appareil de mesure $N$. Les deux appareils de mesure sont macroscopiques ; chacun d'entre eux comprend une aiguille de mesure (pointeur) qui, une fois la mesure effectuée, indique le résultat qu'il fournit. Ils n'interagissent jamais entre eux, mais seulement avec le système $S$.

[1] Cette approche s'impose si l'on choisit l'interprétation d'Everett (§ M du Chapitre XI).

Entre les instants $t_0$ et $t_1$ l'état de $S$ évolue de $\left|\Psi^S(t_0)\right\rangle$ vers $\left|\Psi^S(t_1)\right\rangle$ selon l'équation de Schrödinger (XI-1) et, de même, les vecteurs d'état des appareils de mesure deviennent $\left|\Psi^M(t_1)\right\rangle$ et $\left|\Psi^N(t_1)\right\rangle$.

Considérons maintenant l'effet de la première mesure. Comme dans les §§ B-2-a du Chapitre I et A-2 du Chapitre XI, nous appelons $P_M(m)$ les projecteurs sur les vecteurs propres de l'opérateur $M$, de valeurs propres $m = m_1$, $m_2$,...,$m_i$,..., et développons $\left|\Psi^S(t_1)\right\rangle$ sur ces vecteurs propres ; les relations (XI-2) et (XI-3) deviennent ici :

$$\left|\Psi^S(t_1)\right\rangle = \sum_m \left|\Psi^S_m(t_1)\right\rangle \qquad \text{(App. G-13)}$$

avec :

$$\left|\Psi^S_m(t_1)\right\rangle = P_M(m)\left|\Psi^S(t_1)\right\rangle \qquad \text{(App. G-14)}$$

S'il se trouve que $\left|\Psi^S(t_1)\right\rangle$ est un vecteur propre de $M$ avec la valeur propre $m_i$, alors un seul terme $m = m_i$ est présent dans la sommation ; le résultat de la première mesure est certain. A l'instant $t'_1$ juste après cette mesure, le premier appareil de mesure atteint un état normalisé bien défini $\left|\Psi^M_{m_i}(t'_1)\right\rangle$ où l'aiguille de mesure indique le résultat. Donc, dans ce cas particulier, juste après la mesure l'état du système total est :

$$\left|\overline{\Psi}(t'_1)\right\rangle = \left|\Psi^S_{m_i}(t'_1)\right\rangle \otimes \left|\Psi^M_{m_i}(t'_1)\right\rangle \otimes \left|\Psi^N(t'_1)\right\rangle \qquad \text{(App. G-15)}$$

En général, lorsque $\left|\Psi^S(t_1)\right\rangle$ est quelconque, la linéarité de l'équation de Schrödinger entraîne que l'état du système total juste après la première mesure est :

$$\left|\overline{\Psi}(t'_1)\right\rangle = \sum_m \left|\Psi^S_m(t'_1)\right\rangle \otimes \left|\Psi^M_m(t'_1)\right\rangle \otimes \left|\Psi^N(t'_1)\right\rangle \qquad \text{(App. G-16)}$$

Le premier appareil de mesure atteint alors un état qui dépend de la valeur propre $m$, mais pas le second, qui n'a pas encore interagi avec $S$. Notons au passage que toutes les évolutions des vecteurs d'état individuels sont décrites par des évolutions unitaires qui conservent la norme ; cependant le développement (App. G-13) contient des kets $\left|\Psi^S_m(t_1)\right\rangle$ dont la norme est en général plus petite que celle de $\left|\Psi^S(t_1)\right\rangle$.

Pour la seconde mesure, nous recommençons le même calcul. Entre les instants $t'_1$ et $t_2$, pour chaque valeur de $m$ dans (App. G-16) chaque terme dans le produit évolue indépendamment (évolution unitaire), et $\left|\overline{\Psi}(t_2)\right\rangle$ est obtenu en remplaçant $t'_1$ par $t_2$ dans (App. G-16). Les expressions analogues de (App. G-13) et (App. G-14) sont alors :

$$\left|\Psi^S_m(t_2)\right\rangle = \sum_n \left|\Psi^S_{m,n}(t_2)\right\rangle \qquad \text{(App. G-17)}$$

avec :

$$\left|\Psi^S_{m,n}(t_2)\right\rangle = P_N(n)\left|\Psi^S_m(t_2)\right\rangle \qquad \text{(App. G-18)}$$

La seconde mesure corrèle l'état du second appareil de mesure à celui du système $S$. Pour finir, l'état de l'ensemble du système à l'instant $t'_2$ après la seconde mesure est :

$$\left|\overline{\Psi}(t'_2)\right\rangle = \sum_m \sum_n \left|\Psi^S_{m,n}(t'_2)\right\rangle \otimes \left|\Psi^M_m(t'_2)\right\rangle \otimes \left|\Psi^N_n(t'_2)\right\rangle \qquad \text{(App. G-19)}$$

Ce vecteur d'état contient une superposition cohérente de diverses composantes associées à toutes les paires possibles $(m, n)$ de résultats de mesures ; dans chacune de ces composantes, l'état des appareils de mesure a enregistré les résultats.

C'est à ce stade que nous pouvons introduire une "règle de Born généralisée" et postuler que la probabilité d'obtenir les résultats $(m, n)$ est donnée par le carré de la norme de chacune de ces composantes. Nous avons déjà remarqué que, tant que les trois sous-systèmes n'interagissent pas, la norme de chaque facteur dans une composante donnée reste constante. De fait, des changements de norme n'interviennent que pendant les interactions (les mesures) et sont contenus dans les développements (App. G-13) et (App. G-17). Comme les états des appareils de mesure dans (App. G-19) sont normalisés, la probabilité $\mathcal{P}_{m,n}$ d'un résultat quelconque $(m, n)$ est alors :

$$\mathcal{P}_{m,n} = \left\langle \Psi^S_{m,n}(t'_2) \,\middle|\, \Psi^S_{m,n}(t'_2)\right\rangle \qquad \text{(App. G-20)}$$

qui n'est autre que la norme du ket :

$$\begin{aligned} &P_N(n)U(t_2, t'_1)\left|\Psi^S_m(t'_1)\right\rangle \\ &\quad = P_N(n)U(t_2, t'_1)P_M(m)U(t_1, t_0)\left|\Psi^S(t_0)\right\rangle \end{aligned} \qquad \text{(App. G-21)}$$

Les vecteurs d'état associés aux appareils de mesure ont totalement disparu de ce résultat, qui possède une interprétation simple en termes du système $S$ seul : si l'on lit la seconde ligne de la gauche vers la droite, le système $S$ était initialement dans l'état $\left|\Psi^S(t_0)\right\rangle$, a évolué librement de l'instant $t_0$ à l'instant $t_1$, a alors subi une projection sur un état propre correspondant au résultat de mesure $m$, puis a de nouveau évolué librement de l'instant $t'_1$ à l'instant $t_2$, pour être enfin projeté sur les états propres correspondant au second résultat de mesure $n$. De plus, (App. G-20) est équivalent à la relation (XI-7) du Chapitre XI, obtenue en appliquant le postulat de réduction. A partir des probabilités d'événements combinés $(m, n)$, on peut obtenir les probabilités conditionnelles d'autres événements en utilisant les lois habituelles des probabilités. Le résultat final est que les deux méthodes conduisent exactement aux mêmes résultats pour toutes les probabilités : on peut indifféremment, soit mettre en jeu les appareils de mesure et utiliser une règle de Born généralisée, soit ne considérer que le seul système $S$ et appliquer le postulat de réduction du vecteur d'état (§ B-2-a du Chapitre I). C'est donc une simple question de goût que de choisir une des méthodes comme postulat et d'en déduire l'autre méthode, ou le contraire.

# Appendice H : Manipulation et sélection des variables supplémentaires

L'idée d'utiliser les équations hydrodynamiques (Madelung [566]) associées à l'évolution de la fonction d'onde pour guider le mouvement de variables supplémentaires (positions de particules) peut sembler très naturelle. En dynamique des fluides, des équations hydrodynamiques peuvent être obtenues en prenant la moyenne de quantités microscopiques sur les positions et les vitesses de particules ponctuelles – c'est ainsi qu'on peut obtenir les équations hydrodynamiques macroscopiques de Navier-Stokes à partir de l'équation de Boltzmann, grâce à des moyennes appropriées (méthode de Chapman-Enskog). Inversement, les variables hydrodynamiques influencent le mouvement des particules individuelles. Il existe même une certaine analogie entre le terme de guidage quantique et le terme de force dans une équation cinétique de Landau, où chaque particule est soumise à une force moyenne proportionnelle au gradient de la densité des autres. Cependant, ici nous étudierons une particule unique, de sorte que le terme de guidage ne peut pas provenir d'une interaction entre particules. De plus, nous savons dès le départ que des propriétés plutôt inhabituelles doivent être contenues dans les équations de guidage, au moins dans le cas où nous souhaitons reproduire parfaitement les prédictions de la mécanique quantique : le théorème de Bell impose que les variables supplémentaires évoluent de façon non locale dans l'espace habituel à trois dimensions (elles n'évoluent localement que dans l'espace plus grand des configurations du système, exactement comme pour le vecteur d'état). En d'autres termes, dans l'espace réel les variables supplémentaires doivent être capables de s'influencer mutuellement à des distances arbitrairement grandes. Effectivement, en théorie de Bohm la vitesse d'une particule contient une dépendance explicite par rapport à sa propre position, comme naturel, mais aussi par rapport à la position de toutes les autres particules qui sont intriquées avec la particule étudiée. En soi, ceci n'est pas un problème insurmontable : comme nous l'avons mentionné dans le § H du Chapitre XI, on peut prendre le point de vue où le fait de rendre la non-localité complètement explicite est perçu comme une qualité de la mécanique quantique de Bohm.

Mais il faut prendre des précautions chaque fois que l'on ajoute un terme non local dans les équations du mouvement : comme la relativité implique l'impossibilité de transmettre un message plus vite qu'à la vitesse de la lumière, il faut éviter tout élément dans la théorie qui entre en conflit avec ce principe. Nous devons distinguer deux cas, suivant que l'on considère les influences sur les variables supplémentaires qui sont directes (on les modifie "à la main", de façon complètement arbitraire, comme la position d'une boule de billard), ou indirectes (appliquer des champs externes modifie l'hamiltonien du système, ce qui modifie l'évolution de la fonction d'onde et, ensuite, affecte l'évolution des variables supplémentaires). Dans le second cas, on peut vérifier que le terme non local ne pose aucun problème, car il ne peut pas être utilisé pour envoyer instantanément une information via les variables supplémentaires. Il s'agit là d'un résultat général, valable simplement parce que les prédictions statistiques de la théorie de Bohm sont équivalentes à la mécanique quantique standard, qui elle-même ne permet aucune communication superluminale (§ D du Chapitre V et Appendice F). Mais supposons par exemple que nous puissions directement manipuler la variable supplémentaire associée à une particule d'une paire EPR corrélée, et de façon totalement arbitraire (même à une échelle microscopique), sans changer la fonction d'onde ; alors le terme de vitesse quantique agissant sur les variables supplémentaires de la seconde particule en serait immédiatement changé, ainsi donc que ses positions ultérieures dans l'espace ; comme cette seconde particule peut se trouver à une distance en principe arbitrairement grande, on pourrait utiliser ce phénomène pour envoyer des messages plus rapidement que la vitesse de la lumière. La conclusion est, bien sûr, qu'une telle manipulation doit être considérée comme impossible : le seul mécanisme d'évolution des variables supplémentaires doit rester leur couplage à la fonction d'onde, sans intervention humaine directe.

Si les variables supplémentaires ne peuvent pas être directement manipulées, pourrions-nous alors supposer qu'il est possible par une méthode appropriée de les filtrer dans un domaine donné, comme on le fait pour le vecteur d'état lorsque l'on sélectionne une composante selon $Oz$ à la sortie d'un aimant de Stern et Gerlach ? Si nous pouvions par exemple, pour une particule dans un état propre de la composante $Oz$ de son spin, sélectionner les valeurs d'une variable supplémentaire en choisissant celles qui donnent un résultat $+1$ dans une mesure future de la composante du spin selon $Ox$, que se produirait-il ? Si une telle sélection était possible grâce à un appareil de physique approprié, la théorie à variables supplémentaires cesserait d'être équivalente à la mécanique quantique standard, puisqu'elle introduirait du déterminisme à un endroit où la théorie standard l'exclut[1]. De plus, Valen-

[1]En théorie orthodoxe, si une particule de spin 1/2 est initialement mise dans l'état de spin $+1$ par un appareil de Stern et Gerlach orienté selon $Oz$, il devient totalement impossible de faire aucune prédiction concernant la déviation observée lorsque la particule

tini a montré [568] que, si la distribution initiale des positions de Bohm est différente de celle donnée par "l'équilibre quantique" habituel (§ H-1-b du Chapitre XI), alors l'envoi de messages plus rapides que la lumière devient possible. Donc, si l'on pouvait d'une façon ou d'une autre préparer à la main une distribution des positions de Bohm qui diffère de $|\Psi(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, ...)|^2$, par exemple une distribution plus étroite, des contradictions avec la relativité apparaîtraient immédiatement. C'est la raison pour laquelle on considère généralement que de telles préparations sont impossibles[2].

En résumé, il est nécessaire de supposer que les variables supplémentaires ne peuvent, ni être manipulées directement, ni filtrées, contrairement au vecteur d'état. Les variables supplémentaires décrivent une réalité objective, mais à un niveau différent de la réalité associée à la fonction d'onde, puisque seule cette dernière peut être influencée directement par des décisions humaines. Les variables supplémentaires sont bien visibles (les résultats des expériences) mais non contrôlables, alors que les fonctions d'onde possèdent les propriétés complémentaires. Nous avons donc deux niveaux de réalité, l'un correspondant à des champs classiques (les fonctions d'onde) qui sont expérimentalement contrôlables mais non observables, l'autre pour les positions qui sont directement observables mais non contrôlables.

De plus, lors de la création d'ondes vides dans un processus de mesure, les champs classiques se divisent à leur tour en deux sous-niveaux de réalité : une partie continue à jouer un rôle effectif de pilotage dans l'évolution de la position des particules, et une partie d'ondes vides qui ne joue plus aucun rôle pour déterminer les résultats des expériences futures. Cette seconde partie prend ainsi une sorte de statut virtuel. Si l'on considère par exemple la fonction d'onde de l'Univers, comme en théorie d'Everett elle est ramifiée en un nombre fantastique de composantes orthogonales (bien qu'ici avec un statut différent, sans relation avec les observateurs et leurs registres mémoire). Parmi toutes ces composantes, une seule joue un rôle pour piloter la position du point représentant l'Univers dans son espace des configurations gigantesque. Toutes les autres, trop loin de la position réalisée dans cet espace, resteront pour toujours dans les limbes.

En conclusion, l'interprétation de De Broglie-Bohm ne conduit pas à une description simple et directe de la réalité, semblable à celle que donne la mécanique quantique pour des particules ou des champs. En fait, cette description n'est pas immune vis-à-vis de certaines difficultés présentant une certaine analogie avec celles de la théorie quantique standard.

---

atteint ensuite un appareil de Stern et Gerlach orienté selon $Ox$.

[2]Historiquement, Bohm et Bub ont envisagé une telle possibilité [7] – voir § K-1-a du Chapitre XI. Bien évidemment, personne ne peut prédire le futur, et des révolutions conceptuelles sont toujours possibles, mais pour le moment il peut sembler plus raisonnable de conférer aux théories à variables supplémentaires toutes les propriétés qui les rendent équivalentes en termes de prédictions à la théorie standard.

# Appendice I : Corrélations et trajectoires en théorie de Bohm

Dans cet appendice, nous étudions les fonctions de corrélation à deux temps et les fonctions de corrélation à deux particules dans le cadre de la théorie dBB (§ 1). Nous montrons ensuite pourquoi les trajectoires bohmiennes sont compatibles avec les résultats de mesures de positions effectuées en des endroits différents (§ 2), y compris le cas où le pointeur macroscopique est lent (§ 3).

## 1. Corrélations de deux particules

### 1.1 Deux oscillateurs harmoniques

En mécanique quantique standard, le calcul de toute fonction de corrélation à deux temps doit inclure l'évolution du système entre les deux instants considérés ; cette évolution est décrite par l'opérateur d'évolution unitaire $U(t', t)$, comme dans la relation (XI-9), et s'effectue à partir d'un état qui dépend du résultat de la première mesure (postulat de projection). En théorie de Bohm, il est tout aussi important de prendre en compte l'effet de la première mesure, qui intrique le système étudié avec un appareil de mesure, dont les variables bohmiennes déterminent ensuite quelle onde est "pleine" ou "ondes vides" (§ H-1-d-$\alpha$ du Chapitre XI). Si on omet de le faire, on tombe immédiatement sur des contradictions avec les prédictions standard.

Par exemple, la Ref. [616] considère un oscillateur harmonique à 1 dimension qui est initialement dans un état stationnaire, et étudie la fonction de corrélation de la position aux instants $t$ et $t'$, dans le cas particulier où $t' - t$ est égal à la demi-période de l'oscillateur $2\pi/\omega$. En mécanique quantique standard, il est facile de montrer que les opérateurs de position correspondants $X(t)$ et $X(t')$ sont alors simplement opposés l'un de l'autre, de sorte que la fonction de corrélation $\langle X(t)X(t')\rangle$ est égale à $-\left\langle [X(t)]^2 \right\rangle$, donc forcément négative. En mécanique de Bohm, la particule est initialement statique

puisque la fonction d'onde est réelle. Si l'on ignore l'effet de la première mesure, la position bohmienne de la particule va rester au même endroit, ce qui correspond à une fonction de corrélation égale à $\left\langle [X(t)]^2 \right\rangle$, donc positive : on semble arriver à une contradiction. Mais si l'on tient compte de l'effet de la première mesure on trouve que, juste après la première mesure, chaque position de l'oscillateur est corrélée avec des positions différentes de l'aiguille de l'appareil de mesure. Comme la fonction d'onde n'est alors plus un produit, les mouvements des deux systèmes se corrèlent : pour chaque position de l'aiguille, la particule qui a été mesurée prend une vitesse différente. En pratique, juste après la première mesure, la distribution de position de l'oscillateur devient une fonction étroite, qui commence à osciller dans le puits de potentiel, de sorte que la fonction de corrélation de la position à deux temps devient une fonction oscillante. Le désaccord avec la fonction de corrélation quantique standard disparaît alors totalement, ainsi bien sûr que la contradiction de signe.

Un cas semblable est étudié dans la Ref. [615], avec deux oscillateurs harmoniques indépendants, initialement dans l'état :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big[ |1,0\rangle + |0,1\rangle \Big] \qquad \text{(App. I-1)}$$

où $|n,p\rangle$ désigne l'état où le premier oscillateur a le nombre quantique $n$ et le second oscillateur le nombre quantique $p$ ; pour simplifier, nous supposons que les fréquences des deux oscillateurs sont les mêmes, égales à $\omega/2\pi$. Comme les fonctions d'onde stationnaires de l'oscillateur harmonique peuvent être choisies réelles, les fonctions d'onde associées le sont également, ce qui implique qu'aucune des deux particules ne subit le moindre mouvement.

Les opérateurs de position des deux oscillateurs commutent entre eux et peuvent être mesurés, soit simultanément, soit avec un délai entre les deux mesures (on peut par exemple supposer que les deux oscillateurs sont centrés en des points différents de l'espace, de sorte que faire la distinction entre leurs deux positions ne pose aucun problème particulier). Cette commutation rend très simple le calcul standard de la fonction de corrélation des positions des deux particules. Après la mesure de la position du premier oscillateur au point $x_1^0$, l'état des deux particules est proportionnel au produit d'un état du premier oscillateur localisé autour de $x_1^0$ par un état du second oscillateur qui est une superposition cohérente :

$$\varphi_1(x_1^0)\ \varphi_0\,(x_2) + \varphi_0(x_1^0)\ \varphi_1\,(x_2) \qquad \text{(App. I-2)}$$

L'évolution ultérieure de cette superposition introduit un facteur $e^{-i\omega t}$ dans le second terme ; la fonction d'onde n'est plus réelle. Comme les deux oscillateurs sont indépendants, et comme la fonction d'onde est maintenant un produit, le calcul de la probabilité de trouver la seconde particule au point

$x_2^0$ peut être fait à partir de cette seule fonction d'onde ; on trouve facilement que cette probabilité contient en général une composante oscillant à la fréquence $\omega/2\pi$ (sauf s'il se trouve que $x_1^0$ tombe à un nœud de la fonction $\varphi_1$). Mais, d'autre part, nous avons vu que les positions de Bohm sont statiques, de sorte qu'une moyenne de leur produit sur toutes les trajectoires possibles donne un résultat constant. A nouveau, on a l'impression d'arriver à une contradiction entre les prédictions de la mécanique quantique standard et celles de la théorie de Bohm.

Mais en réalité ce n'est pas ainsi que les fonctions de corrélation doivent être calculées en théorie de Bohm : ici aussi, il faut tenir compte correctement de l'effet de la première mesure, même si les deux observables commutent, et même si elles correspondent à des systèmes indépendants (mais intriqués). La première mesure corrèle la position bohmienne de la particule avec celle d'une aiguille de mesure, ce qui crée des "ondes vides" et entraîne une dynamique modifiée du système, ce qui modifie à son tour la fonction de corrélation. Quand la particule 1 est mesurée, le système devient un système à trois corps (ou plus) comprenant les positions des deux particules et celles du pointeur de mesure. Chaque trajectoire de Bohm sélectionne une position du pointeur (par exemple celle correspondant à une mesure positive dans le volume de détection) ; pour chacune de ces trajectoires, les deux particules se déplacent ensuite guidées par une fonction d'onde qui est maintenant un produit. Les corrélations ont disparu de sorte qu'il n'y a pas à s'inquiéter de possibles effets non locaux ; les deux particules subissent alors une évolution de Schrödinger locale. Après la mesure, les positions des deux particules oscillent dans leurs puits de potentiel, d'une façon qui reproduit exactement le résultat de la mécanique quantique standard pour la fonction de corrélation.

### 1.2 Expérience EPRB

Considérons, dans le cadre d'une expérience EPRB (§ C-1 du Chapitre III), deux particules éloignées, la première de fonction d'onde $\varphi(\mathbf{r}_1)$ et la seconde de fonction d'onde $\chi(\mathbf{r}_2)$. Nous supposons de plus que ces particules ont chacune un spin 1/2 et que leurs spins sont intriqués dans un état singulet. En théorie de Bohm, il est commode d'expliciter les fonctions d'onde, de sorte que nous adoptons ici une notation mixte où ces dernières caractérisent les variables orbitales, alors que les spins sont traités comme des kets en notation de Dirac. Nous pouvons alors écrire la fonction d'onde/vecteur d'état du système de deux particules sous la forme :

$$|\Psi\rangle = \varphi(\mathbf{r}_1)\ \chi(\mathbf{r}_2)\frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\,|1:+,2:-\rangle - |1:-,2:+\rangle\Big] \qquad \text{(App. I-3)}$$

Supposons maintenant que la première particule pénètre dans un gradient de champ magnétique comme celui d'un aimant de Stern et Gerlach orienté

selon la direction $a$, qui divise la fonction d'onde $\varphi(\mathbf{r}_1)$ en deux composantes spatialement séparées $\varphi'_+(\mathbf{r}_1)$ et $\varphi'_-(\mathbf{r}_1)$. Alors $|\Psi\rangle$ devient :

$$\left|\Psi'\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi'_+(\mathbf{r}_1)\left|1:+\right\rangle_a\left|2:-\right\rangle_a - \varphi'_-(\mathbf{r}_1)\left|1:-\right\rangle_a\left|2:+\right\rangle_a\right]\chi(\mathbf{r}_2) \tag{App. I-4}$$

où les indices $a$ dans les états de spin indiquent que la direction de quantification a été choisie parallèle à la direction $a$. Dans une telle situation, la position de Bohm de la première particule doit se trouver, soit dans le paquet d'ondes $\varphi'_+(\mathbf{r}_1)$, soit dans le paquet d'ondes $\varphi'_-(\mathbf{r}_1)$. L'autre onde est nécessairement une "onde vide", qui ne joue plus aucun rôle, et que l'on peut supprimer sans conséquence. Une des composantes de (App. I-4) ayant ainsi disparu, tout se passe comme si l'état de spin de la seconde particule avait été projeté sur l'état de spin opposé à celui de la première particule. La séparation spatiale du paquet d'ondes d'une des particules est donc suffisante pour effectuer une projection de l'état des deux spins, avant même que la seconde particule ait éventuellement pénétré dans un autre gradient de champ magnétique. On obtient ainsi un mécanisme très efficace qui reproduit la projection du vecteur d'état.

### 1.3 Interférences à deux photons

Une tentative de réfutation expérimentale de la théorie de Bohm a été publiée dans les Refs. [617, 618], mettant en jeu des corrélations entre deux photons, chacun passant par une fente différente dans un écran ; la réfutation en question se base sur des calculs théoriques antérieurs visant à trouver une contradiction entre la théorie de Bohm et la mécanique quantique standard [619]. Mais, ici aussi, ce qui est réfuté n'est pas la vraie théorie de Bohm, mais une version modifiée de cette théorie. La théorie de Bohm complète est bâtie pour reproduire exactement les résultats de la mécanique quantique standard, pourvu que la même fonction d'onde soit utilisée dans les deux cas (symétrique par échange des deux bosons dans ce cas) ; de telles contradictions ne peuvent donc pas se produire. Dans le cas en question, l'hypothèse ajoutée est que les trajectoires des deux bosons sont toujours symétriques par rapport au plan de symétrie de l'expérience. Mais, dans la vraie théorie de Bohm, les positions des particules remplissent tout le volume à 6 dimensions disponible dans l'espace des configurations ; dans ce volume, des configurations de paires non symétriques sont parfaitement possibles. Une fois que le vecteur d'état est correctement symétrisé, il n'y a pas de raison d'ajouter un second postulat de symétrisation pour les positions bohmiennes elles-mêmes.

## 2. Les trajectoires bohmiennes sont cohérentes avec des mesures successives de position

Nous revenons à la question brièvement discutée dans le § H-1-d-$\beta$ du Chapitre XI, et étudions maintenant la relation entre les résultats de mesures quantiques de positions et les trajectoires bohmiennes. Nous allons voir que, si une particule est détectée par une série d'appareils situés dans des régions différentes de l'espace, c'est nécessairement que la trajectoire bohmienne est passée par ces régions ; en d'autres termes, la trajectoire est toujours en accord avec les résultats de mesures successives de la position. Des trajectoires incompatibles, ou "surréalistes" comme elles ont parfois été appelées dans la littérature, n'existent pas (voir également le § H-1-h-$\alpha$ du Chapitre XI). Pour le montrer, nous considérons une situation où une particule est initialement décrite par un paquet d'ondes $|\varphi_0\rangle$ se propageant dans la direction $Oz$ pour traverser deux plans successifs $P_D$ et $P_E$ où se trouvent des détecteurs de particules (non absorbants) qui peuvent enregistrer sa présence (Fig. I-1). Les deux détecteurs $D_1$ et $D_2$ ont des domaines de détection disjoints dans le plan $P_D$ ; de même, $P_E$ contient les domaines de détection disjoints des deux autres appareils $E_1$ et $E_2$. Nous supposons que les domaines de détection de tous les détecteurs sont très grands devant la longueur d'onde de De Broglie de la particule. Le paquet d'onde initial est supposé suffisamment large pour couvrir tous les détecteurs au cours de sa propagation ; l'efficacité de détection est supposée idéale (100 %).

Le vecteur d'état initial du système total (particule + détecteurs) à l'instant $t_0$ est :

$$|\Psi(t_0)\rangle = |\varphi(t_0)\rangle \left|D_1^0\right\rangle \left|D_2^0\right\rangle \left|E_1^0\right\rangle \left|E_2^0\right\rangle \qquad \text{(App. I-5)}$$

où $\left|D_i^0\right\rangle$ est l'état du détecteur $D_i$ avant qu'il n'ait enregistré aucune particule ($i = 1, 2$), et de même pour l'état $\left|E_j^0\right\rangle$ qui décrit $E_j$ sans détection de particule ($j = 1, 2$). En fait, chacun de ces vecteurs d'état caractérise les propriétés d'un très grand nombre de particules, celles qui sont contenues dans chaque détecteur ; toutefois, pour simplifier, nous ne prenons en compte qu'une seule variable par détecteur, la position du "pointeur macroscopique" (aiguille sur un cadran par exemple). Nous laissons maintenant ce ket initial se propager dans le temps, comme résumé sur la Figure I-2.

Considérons un temps $t_1$ juste avant que le paquet d'ondes ne croise le plan $P_D$. Le ket décrivant la particule est alors :

$$|\varphi(t_1)\rangle = U(t_0, t_1)\,|\varphi_0\rangle \qquad \text{(App. I-6)}$$

où $U(t, t')$ est l'opérateur d'évolution unitaire entre les temps $t$ et $t'$. Nous pouvons décomposer ce ket en une somme :

$$|\varphi(t_1)\rangle = |\overline{\varphi}_1\rangle + |\overline{\varphi}_2\rangle + |\overline{\varphi}_3\rangle \qquad \text{(App. I-7)}$$

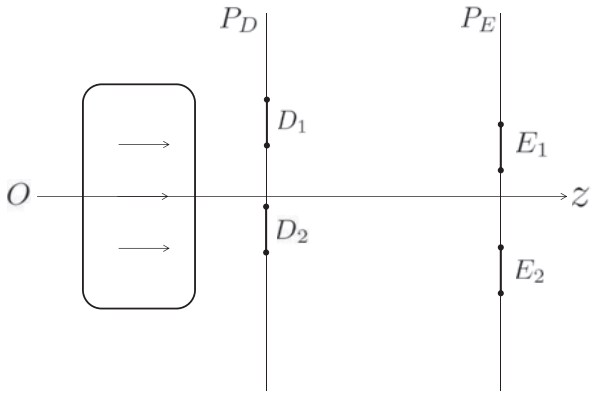


FIGURE *I-1 – Un large paquet d'ondes se propage parallèlement à la direction Oz en venant de la gauche. Il croise deux plans $P_D$ et $P_E$ contenant des détecteurs de position, $D_1$ et $D_2$ dans le premier plan, $E_1$ et $E_2$ dans le second. Les domaines de détection de chacun des appareils sont disjoints et beaucoup plus grands que la longueur d'onde de De Broglie de la particule ; leur efficacité est supposée parfaite (100 %). Nous montrons dans le texte que, si les détecteurs $D_i$ et $E_j$ ont enregistré le passage d'une particule ($i, j = 1, 2$), c'est nécessairement que la trajectoire bohmienne est passée par ces détecteurs ; si aucun des détecteurs n'enregistre de particule, c'est que la trajectoire a évité tous les détecteurs. Les détections de la position des particules sont donc parfaitement cohérentes avec les trajectoires bohmiennes.*

de trois composantes, celle $|\overline{\varphi}_1\rangle$ qui va interagir avec le détecteur $D_1$, celle $|\overline{\varphi}_2\rangle$ qui va interagir avec $D_2$, et enfin celle $|\overline{\varphi}_3\rangle$ qui va passer à côté des deux détecteurs dans $P_D$. Pour obtenir la première composante, on peut introduire un cylindre parallèle à la direction de propagation $Oz$ qui coupe le plan $P_D$ selon la limite extérieure du domaine de détection de $D_1$ ; on projette ensuite la fonction d'onde de $|\varphi(t_1)\rangle$ sur l'intérieur de ce cylindre (ses valeurs hors du cylindre sont annulées), et l'on obtient ainsi la fonction d'onde $\overline{\varphi}_1(\mathbf{r})$ de $|\overline{\varphi}_1\rangle$. La même construction à partir du domaine de détection de $D_2$ est appliquée pour obtenir $|\overline{\varphi}_2\rangle$. Finalement, $|\overline{\varphi}_3\rangle$ est simplement défini comme la différence entre $|\varphi(t_1)\rangle$ et la somme de $|\overline{\varphi}_1\rangle$ et $|\overline{\varphi}_2\rangle$ ; la fonction d'onde associée est $\overline{\varphi}_3(\mathbf{r})$. Comme nous avons supposé que la taille des détecteurs est très grande devant la longueur d'onde de De Broglie, les effets de diffraction restent négligeables durant la propagation des trois composantes, qui n'empiètent latéralement que très peu l'une sur l'autre. Ainsi, avec une très bonne

approximation, une fonction d'onde partant de la fonction d'onde $\overline{\varphi}_1(\mathbf{r})$ au temps $t = t_1$ croise $D_1$ seulement lors de sa propagation, une fonction d'onde se propageant à partir de $\overline{\varphi}_2(\mathbf{r})$ croise $D_2$ seulement, et enfin une fonction d'onde se propageant à partir de $\overline{\varphi}_3(\mathbf{r})$ ne croise aucun des détecteurs du plan. L'état de l'ensemble du système juste avant la mesure peut alors être écrit comme :

$$|\Psi(t_1)\rangle = \left[|\overline{\varphi}_1\rangle + |\overline{\varphi}_2\rangle + |\overline{\varphi}_3\rangle\right] \left|D_1^0\right\rangle \left|D_2^0\right\rangle \left|E_1^0\right\rangle \left|E_2^0\right\rangle \qquad \text{(App. I-8)}$$

A un instant ultérieur $t_1'$, après que le paquet d'ondes a traversé le plan $P_D$, cet état devient :

$$\left|\Psi\left(t_1'\right)\right\rangle = \left[|\overline{\chi}_1\rangle \left|D_1^*\right\rangle \left|D_2^0\right\rangle + |\overline{\chi}_2\rangle \left|D_1^0\right\rangle \left|D_2^*\right\rangle + |\overline{\chi}_3\rangle \left|D_1^0\right\rangle \left|D_2^0\right\rangle\right] \left|E_1^0\right\rangle \left|E_2^0\right\rangle \qquad \text{(App. I-9)}$$

où $\left|D_1^*\right\rangle$ est le vecteur d'état de $D_1$ lorsqu'il a enregistré le passage d'une particule (son pointeur s'est déplacé vers une position différente pour indiquer le résultat de mesure), et $|\overline{\chi}_1\rangle$ l'état de la particule à l'instant $t_1'$ après interaction avec $D_1$. Des notations similaires sont utilisées pour $\left|D_2^*\right\rangle$ et $|\overline{\chi}_2\rangle$ ; enfin $|\overline{\chi}_3\rangle$ est l'état de la particule à l'instant $t_1'$ si elle n'a interagi avec aucun appareil de mesure.

Ensuite le paquet d'ondes se propage vers le plan $P_E$. Considérons un temps $t_2$ juste avant qu'il ne croise ce plan et appelons $|\overline{\varphi}_i(t_2)\rangle$ (avec $i = 1, 2, 3$) le ket obtenu en appliquant à $|\overline{\chi}_i\rangle$ l'opérateur d'évolution unitaire entre $t_1'$ et $t_2$ :

$$|\overline{\varphi}_i(t_2)\rangle = U\left(t_1', t_2\right)|\overline{\chi}_i\rangle \qquad \text{(App. I-10)}$$

Suivant la même méthode que ci-dessus, nous décomposons chacun des $|\overline{\varphi}_i(t_2)\rangle$ (avec $i = 1, 2, 3$) selon :

$$|\overline{\varphi}_i(t_2)\rangle = \left|\overline{\overline{\varphi}}_{i,1}\right\rangle + \left|\overline{\overline{\varphi}}_{i,2}\right\rangle + \left|\overline{\overline{\varphi}}_{i,3}\right\rangle \qquad \text{(App. I-11)}$$

en une composante $\left|\overline{\overline{\varphi}}_{i,1}\right\rangle$ qui va interagir avec le détecteur $E_1$, une autre composante $\left|\overline{\overline{\varphi}}_{i,2}\right\rangle$ qui va interagir avec le détecteur $E_2$, et enfin une composante $\left|\overline{\overline{\varphi}}_{i,3}\right\rangle$ qui va passer à côté des deux détecteurs. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
|\Psi(t_2)\rangle = &\left[\left|\overline{\overline{\varphi}}_{1,1}\right\rangle + \left|\overline{\overline{\varphi}}_{1,2}\right\rangle + \left|\overline{\overline{\varphi}}_{1,3}\right\rangle\right] \left|D_1^*\right\rangle \left|D_2^0\right\rangle \left|E_1^0\right\rangle \left|E_2^0\right\rangle \\
&+ \left[\left|\overline{\overline{\varphi}}_{2,1}\right\rangle + \left|\overline{\overline{\varphi}}_{2,2}\right\rangle + \left|\overline{\overline{\varphi}}_{2,3}\right\rangle\right] \left|D_1^0\right\rangle \left|D_2^*\right\rangle \left|E_1^0\right\rangle \left|E_2^0\right\rangle \\
&+ \left[\left|\overline{\overline{\varphi}}_{3,1}\right\rangle + \left|\overline{\overline{\varphi}}_{3,2}\right\rangle + \left|\overline{\overline{\varphi}}_{3,3}\right\rangle\right] \left|D_1^0\right\rangle \left|D_2^0\right\rangle \left|E_1^0\right\rangle \left|E_2^0\right\rangle \qquad \text{(App. I-12)}
\end{aligned}$$

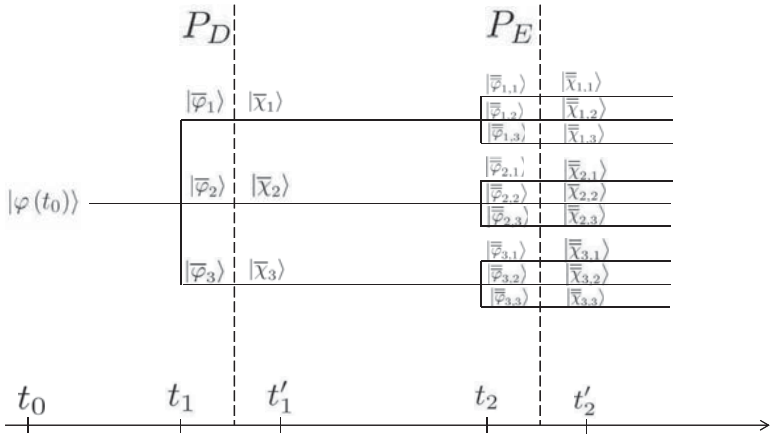


FIGURE *I-2 – Cette figure résume les développements successifs du vecteur d'état de la particule lorsqu'elle croise les plans* $P_D$ *puis* $P_E$*. Ce vecteur d'état est intriqué avec ceux décrivant l'état des appareils de mesure, mais ces derniers ne sont pas représentés pour ne pas compliquer la figure. Au temps* $t_1$*, juste avant la première série de mesures, le vecteur d'état est décomposé en trois kets :* $|\overline{\varphi}_1\rangle$*, qui va interagir avec le premier appareil de mesure ;* $|\overline{\varphi}_2\rangle$*, qui va interagir avec le second ; et* $|\overline{\varphi}\rangle$*, qui n'interagit avec aucun. Après la mesure, ces kets ont changé et sont devenus respectivement* $|\overline{\chi}_1\rangle$*,* $|\overline{\chi}_2\rangle$ *et* $|\overline{\chi}_3\rangle$*, chacun d'entre eux étant associé à un état différent des appareils de mesure. Une seconde décomposition similaire est effectuée lorsque la particule traverse le second plan contenant la seconde série d'appareils de mesure.*

Finalement, au temps $t_2'$, après que le paquet d'onde a croisé le plan $P_E$, le vecteur d'état est :

$$\begin{aligned}\left|\Psi\left(t_2'\right)\right\rangle = &\left|\overline{\overline{\chi}}_{1,1}\right\rangle\left|D_1^*\right\rangle\left|D_2^0\right\rangle\left|E_1^*\right\rangle\left|E_2^0\right\rangle + \left|\overline{\overline{\chi}}_{1,2}\right\rangle\left|D_1^*\right\rangle\left|D_2^0\right\rangle\left|E_1^0\right\rangle\left|E_2^*\right\rangle \\ &+ \left|\overline{\overline{\chi}}_{1,3}\right\rangle\left|D_1^*\right\rangle\left|D_2^0\right\rangle\left|E_1^0\right\rangle\left|E_2^0\right\rangle \\ &+ \left|\overline{\overline{\chi}}_{2,1}\right\rangle\left|D_1^0\right\rangle\left|D_2^*\right\rangle\left|E_1^*\right\rangle\left|E_2^0\right\rangle + \left|\overline{\overline{\chi}}_{2,2}\right\rangle\left|D_1^0\right\rangle\left|D_2^*\right\rangle\left|E_1^0\right\rangle\left|E_2^*\right\rangle \\ &+ \left|\overline{\overline{\chi}}_{2,3}\right\rangle\left|D_1^0\right\rangle\left|D_2^*\right\rangle\left|E_1^0\right\rangle\left|E_2^0\right\rangle \\ &+ \left|\overline{\overline{\chi}}_{3,1}\right\rangle\left|D_1^0\right\rangle\left|D_2^0\right\rangle\left|E_1^*\right\rangle\left|E_2^0\right\rangle + \left|\overline{\overline{\chi}}_{3,2}\right\rangle\left|D_1^0\right\rangle\left|D_2^0\right\rangle\left|E_1^0\right\rangle\left|E_2^*\right\rangle \\ &+ \left|\overline{\overline{\chi}}_{3,3}\right\rangle\left|D_1^0\right\rangle\left|D_2^0\right\rangle\left|E_1^0\right\rangle\left|E_2^0\right\rangle\end{aligned} \tag{App. I-13}$$

où les $\left|\overline{\overline{\chi}}_{1,1}\right\rangle$ sont les états de la particule dans chacune des composantes au temps $t_2'$ et après interaction avec $E_1$ si $j = 1$, avec $E_2$ si $j = 2$, et aucune interaction si $j = 3$. On remarque que les positions des pointeurs sont différentes dans chacune des 9 composantes de ce vecteur d'état. Par exemple, seule la première correspond à des positions où les pointeurs de $D_1$ et $E_1$ se sont déplacés ; la dernière composante est la seule qui correspond à un état où aucun des pointeurs ne s'est déplacé.

Etudions maintenant l'évolution des positions bohmiennes. Nous appelons $\mathbf{Q}$ la position bohmienne de la particule incidente, $\mathbf{R}_1$ and $\mathbf{R}_2$ celles associées avec les pointeurs de $D_1$ et $D_2$ respectivement, et pour finir $\mathbf{T}_1$ et $\mathbf{T}_2$ celles associées aux pointeurs de $E_1$ et $E_2$ respectivement. La position bohmienne complète est alors un vecteur à 15 dimensions :

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{Q}, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2\} \tag{App. I-14}$$

qui se propage dans un grand espace des configurations. La valeur initiale de ce vecteur est :

$$\mathbf{X}^0 = \left\{\mathbf{Q}^0, \mathbf{R}_1^0, \mathbf{R}_2^0, \mathbf{T}_1^0, \mathbf{T}_2^0\right\} \tag{App. I-15}$$

Initialement, la position bohmienne $\mathbf{Q}^0$ de la particule peut se trouver n'importe où dans le paquet d'ondes incident $|\varphi_0\rangle$, et tombe nécessairement dans le domaine spatial de l'une des trois fonctions d'onde associées à $|\overline{\varphi}_1\rangle$, $|\overline{\varphi}_2\rangle$, ou $|\overline{\varphi}_3\rangle$. Elle est donc guidée par l'une des trois fonctions d'onde $\overline{\varphi}_1(\mathbf{r}, t)$, $\overline{\varphi}_2(\mathbf{r}, t)$ ou $\overline{\varphi}_3(\mathbf{r}, t)$. Nous avons noté qu'une position bohmienne se déplace de façon continue dans l'espace, et qu'elle ne peut jamais quitter les régions où la fonction d'onde qui la guide est non nulle. De plus, nous avons vu que les trois régions d'espace occupées par $\overline{\varphi}_1(\mathbf{r}, t)$, $\overline{\varphi}_2(\mathbf{r}, t)$ et $\overline{\varphi}_3(\mathbf{r}, t)$ restent disjointes jusqu'à ce que la particule traverse le plan $P_D$ (mis à part des revouvrements négligeables pouvant se produire sur les bords des domaines, sous l'effet de petits effets de diffraction) ; ces ondes n'interfèrent donc pas entre elles. Ainsi, quelle que soit la valeur initiale $\mathbf{Q}^0$, jusqu'au moment où le paquet d'ondes traverse le plan $P_D$ la position $\mathbf{Q}(t)$ n'est guidée que par l'une

de ces trois ondes. Si la position suit la première onde, elle atteint le premier détecteur $D_1$ ; si elle suit la seconde onde, elle atteint le second détecteur $D_2$ ; si elle suit la troisième, elle ne passe par aucun détecteur. Pendant que le paquet d'onde traverse le plan $P_D$, pour la première onde la position $\mathbf{R}_1$ se déplace depuis $\mathbf{R}_1^0$ vers une nouvelle valeur $\mathbf{R}_1^*$ qui indique l'enregistrement du passage d'une particule par $D_1$ (les autres positions des pointeurs restent inchangées) ; pour la seconde onde, $\mathbf{R}_2$ se déplace de $\mathbf{R}_2^0$ vers une nouvelle valeur $\mathbf{R}_2^*$ ; et pour la troisième onde aucune position de pointeur ne change. Ainsi, jusqu'à cet instant, nous vérifions qu'il existe un accord parfait entre les positions bohmiennes des pointeurs des détecteurs (qui indiquent les résultats des mesures quantiques de position) et la trajectoire bohmienne suivie par la particule.

Après le croisement du plan $P_D$, les trois ondes sont associées avec trois combinaisons différentes des positions des pointeurs, ce qui signifie que $\mathbf{X}$ se propage dans trois régions sans recouvrement de l'espace des configurations ; dès que les appareils de mesure indiquent les premiers résultats, et tant qu'ils restent enregistrés, une seule des trois ondes est sélectionnée. Les deux variables de pointeurs sélectionnent donc l'une seule des trois branches du vecteur d'état, $i = 1$, ou 2 ou 3, les deux autres étant des ondes vides qui ne jouent aucun rôle dans le futur[1]. La seule onde qui reste (onde effective) est alors un produit. En conséquence, la situation pour la seconde série de mesures dans le plan $P_E$ est très similaire à celle pour la première série de mesures dans le plan $P_D$. La fonction d'onde $\overline{\overline{\varphi}}'_i(\mathbf{r}, t)$ se divise en trois branches $\overline{\overline{\varphi}}''_{i,j}(\mathbf{r}, t)$, qui guident la position bohmienne vers $E_1$ si $j = 1$, vers $E_2$ si $j = 2$, ou hors de leur domaine de détection si $j = 3$. Dans chacune de ces branches, les positions bohmiennes des pointeurs atteignent des valeurs différentes : $\mathbf{R}_1^*, \mathbf{R}_2^0, \mathbf{T}_1^*, \mathbf{T}_2^0$ si $i = j = 1$, ou $\mathbf{R}_1^*, \mathbf{R}_2^0, \mathbf{T}_1^0, \mathbf{T}_2^*$ si $i = 1$ et $j = 2$, ou $\mathbf{R}_1^0, \mathbf{R}_2^*, \mathbf{T}_1^*, \mathbf{T}_2^0$ si $i = 2$ et $j = 1$, etc. A nouveau, nous observons un complet accord entre les résultats de mesures quantiques à deux temps différents, les positions bohmiennes des détecteurs, et la trajectoire bohmienne suivie par la particule. Les mesures quantiques de position révèlent effectivement à travers quels détecteurs est passée la trajectoire bohmienne de la particule. Il faut toutefois noter que, comme nous avons supposé que les domaines de détection des appareils de mesure sont suffisamment grands pour éviter de forts effets de diffraction, cette détermination de la trajectoire n'est possible qu'avec une précision limitée ; c'est une propriété générale de la théorie dBB qu'une trajectoire bohmienne ne puisse jamais être déterminée avec une précision parfaite – voir par exemple la discussion de l'expérience illustrée dans la Figure XI.3.

[1]Nous supposons que, une fois qu'un résultat de mesure est enregistré, il le reste de façon permanente et ne peut plus changer par la suite.

Remarques :

(i) Nous avons limité notre analyse à deux plans de détection et deux détecteurs de position dans chaque plan, mais la discussion peut être généralisée à un nombre arbitraire de détections de position et un nombre arbitraire de temps de mesure. De plus, nous n'avons pris en compte qu'une seule variable par détecteur, ce qui est irréaliste puisque ce sont des appareils macroscopiques composés d'un très grand nombre de particules. Cette variable unique que nous avons considérée symbolise en fait une variable collective composée de la position d'un grand nombre de particules ; nous discutons au § 3.2 les limites d'un tel traitement. On peut toutefois généraliser le raisonnement précédent en considérant que **R** ou **T** résument un grand nombre de variables bohmiennes.

(ii) Notre raisonnement montre que les fonctions de corrélation obtenues à partir de mesures quantiques ou celles qu'on peut inférer à partir des trajectoires bohmiennes sont en accord. Il est cependant important de noter que, dans notre raisonnement, nous avons supposé que deux mesures quantiques sont effectivement réalisées, et pris en compte leur effet sur le vecteur d'état et les variables bohmiennes. Il serait incorrect d'utiliser les trajectoires pour inférer à partir des positions dans le passé les valeurs des fonctions de corrélation lorsqu'une seule mesure est réalisée ; en d'autres termes, il ne faut pas chercher à deviner ce qui aurait été observé au cours d'une mesure passée si un appareil de mesure avait été inséré (raisonnement contrafactuel, §§ B-1 et C-2 du Chapitre IV). Nous avons maintenant vu à plusieurs occasions que, comme en mécanique quantique standard, les fonctions de corrélation des résultats de mesure doivent toujours être évaluées en prenant en compte le couplage avec les deux appareils de mesure, sinon il peut en découler des résultats incorrects.

## 3. Pointeurs rapides et lents

Nous revenons maintenant au problème discuté dans le § H-1-h-$\alpha$ page 380 : supposons que le pointeur de l'appareil de mesure soit lent, ne fournissant l'information sur le chemin qu'après que la particule test a traversé la région des interférences ; l'indication qu'il fournit sur le trou par lequel est passée la particule peut-elle être contradictoire avec la trajectoire bohmienne ?

### 3.1 Intrication miscroscopique avec un pointeur lent

Pour étudier l'intrication entre la particule test et une particule qui va jouer le rôle de pointeur lent, nous remplaçons la relation (XI-34) du Cha-

pitre XI (dont nous reprenons les notations) par :

$$\Psi(\mathbf{r},\mathbf{r}_1;t=0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi_{\rm upper}(\mathbf{r})\chi_{\rm upper}(\mathbf{r}_1)+\varphi_{\rm lower}(\mathbf{r})\chi_{\rm lower}(\mathbf{r}_1)\right] \quad \text{(App. I-16)}$$

où $\chi_{\rm upper}(\mathbf{r}_1)$ et $\chi_{\rm lower}(\mathbf{r}_1)$ sont les deux fonctions d'onde initiales de la particule jouant le rôle de pointeur, de même module :

$$|\chi_{\rm upper}(\mathbf{r}_1)|=|\chi_{\rm lower}(\mathbf{r}_1)| \quad \text{(App. I-17)}$$

mais de phase différente :

$$\chi_{\rm upper}(\mathbf{r}_1)=e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}_1}\,|\chi_{\rm upper}(\mathbf{r}_1)| \qquad ; \qquad \chi_{\rm lower}(\mathbf{r}_1)=e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}_1}\,|\chi_{\rm lower}(\mathbf{r}_1)| \quad \text{(App. I-18)}$$

Les impulsions moyennes du pointeur dans les deux états ont alors des directions opposées. A l'instant $t=0$, nous supposons cependant que les deux fonctions d'onde du pointeur se recouvrent parfaitement. Ce n'est plus le cas dès que le temps augmente : quand $t$ croît, le recouvrement décroît progressivement, avec une constante de temps de l'ordre de $T_{\rm PO}$ (PO symbolise "pointer ovelap"). Pour des temps $t \lesssim T_{\rm PO}$, l'évolution des deux positions bohmiennes $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{Q}_1$ associées à $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}_1$ obéit à une dynamique couplée par l'intrication de la fonction d'onde, et leurs trajectoires peuvent être compliquées. Mais, pour des temps $t \gtrsim T_{\rm PO}$, la situation est plus simple du fait que la position bohmienne $\mathbf{Q}_1$ ne peut suivre qu'une seule des deux composantes (l'autre composante est alors vide) ; l'intrication ne joue plus de rôle dans l'évolution de la position bohmienne, qui se propage comme si les deux particules étaient indépendantes.

Si le temps auquel les paquets d'ondes se croisent dans la région d'interférence est grand devant $T_{\rm PO}$, pendant le croisement les positions bohmiennes ne sont sensibles qu'à une seule composante de la fonction d'onde, et les trajectoires sont pratiquement rectilignes (partie gauche de la Figure I-3). En revanche, si la particule pointeur est lente, et si la particule test passe par la région d'interférence longtemps avant que les paquets d'ondes du pointeur ne se séparent, la dynamique des deux positions bohmiennes est bien plus complexe. Des simulations numériques [611, 612] montrent alors que, dans la limite où la particule pointeur est très lente, les trajectoires de la particule test dépendent de la position bohmienne initiale de la particule jouant le rôle de pointeur. La partie de droite de la figure montre un cas où cette position initiale est neutre (centrée sur son paquet d'ondes), et où la règle du non-croisement s'applique à nouveau. La partie du milieu de la Figure I-3 montre une situation intermédiaire où la particule pointeur n'est ni très rapide ni très lente. La conclusion est que des effets d'interaction non locales entre les trajectoires peuvent effectivement apparaître avec deux particules microscopiques.

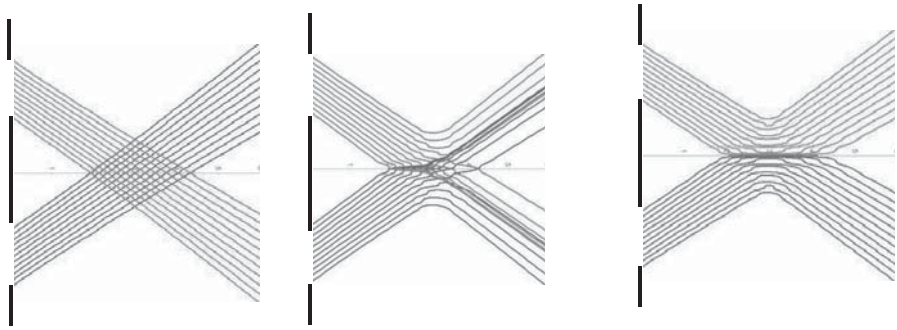

FIGURE *I-3 – Cette figure montre les trajectoires bohmiennes de la particule test partant de diverses positions à l'intérieur de l'un des trous de l'écran. Les trajectoires se propagent vers la droite, atteignent la région d'interférence, et s'en éloignent ensuite. Le pointeur de l'appareil de mesure est représenté par une seule particule, dont la trajectoire bohmienne n'est pas représentée (on suppose pour simplifier que sa position bohmienne est initialement située au centre du paquet d'ondes du pointeur).*
*La partie gauche de la figure montre les trajectoires lorsque le pointeur est rapide (il donne une indication avant que la particule n'atteigne la région d'interférence) : les trajectoires vont en ligne (presque) droite et se croisent, de sorte qu'aucune "trajectoire surréaliste" ne se produit. La partie droite de la figure montre les trajectoires lorsque le pointeur est lent, de sorte que l'information sur le chemin suivi par la particule n'est obtenu qu'après que les paquets d'ondes se soient croisés dans la région d'interférence. La trajectoire dépend alors de la position bohmienne initiale de la particule jouant le rôle de pointeur ; ce qui est représenté est un cas où cette position est centrée et où, au lieu de se croiser, toutes les trajectoires rebondissent sur le plan de symétrie de l'expérience (elles sont donc "surréalistes"). La partie du milieu montre une situation intermédiaire où le pointeur n'est, ni lent, ni très rapide ; certaines trajectoires se croisent, d'autres rebondissent (figure aimablement fournie par Geneviève Tastevin).*

### 3.2 Mesure macroscopique et intrication

Un appareil de mesure macroscopique est composé d'un nombre très élevé de particules. Nous supposons maintenant qu'un tel appareil est muni d'un

pointeur lent : un pointeur qui indique le trou par lequel la particule est passée longtemps après que cette particule ait traversé la région d'interférence. La question qui se pose est alors de savoir si les effets non locaux précédents, et donc les trajectoires "surréalistes" qui en découlent, continuent à se produire à une échelle macroscopique. Comme nous l'avons vu, l'élément crucial pour répondre à la question est de savoir si deux éléments de la fonction d'onde continuent à être simultanément actifs pour piloter la particule test. Nous devons alors remplacer (App. I-16) par :

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_k, ; ..., \mathbf{r}_N; t = 0)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \varphi_{\text{upper}}(\mathbf{r}) \prod_{k=1}^{N} \chi^k_{\text{upper}}(\mathbf{r}_k) + \varphi_{\text{lower}}(\mathbf{r}) \prod_{k=1}^{N} \chi^k_{\text{lower}}(\mathbf{r}_k) \right] \quad \text{(App. I-19)}$$

où le produit sur $k$ correspond à toutes les $N$ particules contenues dans le pointeur. Les deux composantes de la fonction d'onde peuvent être simultanément actives uniquement si toutes les positions $\mathbf{r}_k$ prennent des valeurs pour lesquelles ni $\chi^k_{\text{upper}}(\mathbf{r}_k)$ ni $\chi^k_{\text{lower}}(\mathbf{r}_k)$ ne s'annulent, donc des valeurs appartenant au domaine de recouvrement des deux fonctions. C'est automatiquement le cas à $t = 0$ puisque la relation (App. I-17) est satisfaite pour toutes les particules. Mais, à des instants ultérieurs la situation est différente puisque, lorsque $t$ croît mais reste suffisamment petit, le recouvrement spatial de deux fonctions d'onde varie appriximativement comme $\left[1 - (t/T_{\text{PO}})^2\right]$ ; il reste grand si $t \ll T_{\text{PO}}$. Le recouvrement des $N$ fonctions d'onde de l'ensemble des particules du pointeur varie donc comme :

$$\left[1 - \left(\frac{t}{T_{\text{PO}}}\right)^2\right]^N = 1 - N\left(\frac{t}{T_{\text{PO}}}\right)^2 \quad \text{(App. I-20)}$$

qui décroît bien rapidement en fonction du temps, $10^{20}$ fois plus rapidement si le pointeur contient $10^{20}$ particules ! Le temps au bout duquel le recouvrement a décru de façon significative est environ $\tau = T_{\text{po}}/\sqrt{N}$, qui est $10^{10}$ fois plus court que $T_{\text{po}}$. La conséquence est que, en pratique, un pointeur macroscopique agit toujours comme un pointeur rapide, de sorte que la règle du non-croisement ne s'applique pas. Dans un tel cas, une des ondes devient presque instantanément vide, et ne joue plus aucun rôle dans l'évolution ultérieure des variables bohmiennes. Ainsi, les effets non locaux discutés ci-dessus peuvent se produire avec un petit nombre de degrés de liberté, mais pas avec le pointeur macroscopique d'un appareil de mesure (qui, de plus, n'est pas un système fermé, et tend donc à rapidement mettre en jeu les positions bohmiennes de son environnement).

En conclusion, il est parfaitement approprié d'étudier l'intrication entre des systèmes microscopiques au moyen d'un petit nombre de variables bohmiennes (souvent deux). Toutefois, lorsque l'un des systèmes intriqués devient

macroscopique, comme l'est un appareil de mesure, il devient indispensable d'inclure un nombre macroscopique de variables bohmiennes. Les trajectoires surréalistes disparaissent alors. La nécessité de devoir inclure tous les degrés de liberté du système physique étudié n'est pas spécifique de la théorie dBB, mais se produit tout aussi bien en mécanique quantique standard : le fait que la dynamique quantique d'une variable collective puisse être traitée comme celle d'une particule unique de grande masse n'est pas suffisant pour permettre d'ignorer toutes les autres variables dans un calcul de trace partielle.

# Appendice J : Modèles de réduction spontanée du vecteur d'état

Nous discutons dans cet appendice quelques modèles simples mettant en jeu une dynamique de Schrödinger modifiée stochastique, afin de montrer comment ils peuvent conduire à une évolution reproduisant la réduction du vecteur d'état lors d'une mesure (émergence d'une seule valeur propre dans une réalisation, avec une valeur aléatoire). Nous discutons ici le point de vue de la théorie CSL (*cf.* § K-1-c du Chapitre XI) ; dans l'Appendice L, nous étudierons une autre modification de la dynamique de Schrödinger (*cf.* § K-4 du Chapitre XI), où des termes d'attraction spatiale sont ajoutés. Pour simplifier, nous ignorerons ici l'évolution habituelle sous l'effet de l'hamiltonien du système pendant le temps que dure la mesure, supposant par exemple que ce temps est trop court pour que cette évolution joue un rôle significatif ; dans le cas contraire, il faudrait mener les mêmes calculs en représentation d'interaction, ce qui n'est pas très différent mais introduit une dépendance en temps des opérateurs.

## 1. Un seul opérateur

Considérons la mesure d'une certaine observable quantique associée à un opérateur hermitique $A$, et cherchons une équation d'évolution qui contienne un processus de réduction du vecteur d'état associé à cette mesure particulière. Comme le vecteur propre obtenu à la fin du processus doit varier aléatoirement d'une réalisation de la mesure à la suivante, cette équation d'évolution contient nécessairement une composante aléatoire, qui ici prendra la forme d'une fonction aléatoire du temps (alors que dans la théorie GRW ce sont les "hitting processes" qui introduisent cette composante aléatoire, *cf.* § K-1-b du Chapitre XI).

### 1.1 Equation d'évolution

Nous supposons que le vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ évolue selon :

$$\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = -\left[w(t) - A\right]^2 \ |\Psi(t)\rangle \qquad \text{(App. J-1)}$$

où $w(t)$ est une fonction aléatoire réelle du temps. Pour simplifier autant que possible, on peut discrétiser le temps en petits intervalles finis $\Delta t$ pendant lesquels on suppose que $w(t)$ reste constante, et de plus ne peut prendre qu'un ensemble discret fini de valeurs $w_1$, $w_2$,..., $w_N$. On peut ensuite choisir une règle pour spécifier la progression dans le temps de $w(t)$, et éventuellement une règle d'interpolation pour rendre toutes les fonctions continues. Une autre possibilité est de choisir un autre modèle où $w(t)$ correspond à un bruit blanc ("Wiener process"), de mémoire temporelle nulle. Pour le moment, nous ne spécifions pas plus précisément cette fonction aléatoire.

L'équation (App. J-1) ne conserve pas la norme de $|\Psi(t)\rangle$, mais on peut définir un vecteur d'état normalisé $|\Phi(t)\rangle$ par :

$$|\Phi(t)\rangle = \frac{|\Psi(t)\rangle}{\langle\Psi(t)\ |\Psi(t)\rangle^{1/2}} \qquad \text{(App. J-2)}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\Phi(t)\rangle \quad &= -\left[w(t) - A\right]^2 \ |\Phi(t)\rangle \\ &\quad -\frac{1}{2\,\langle\Psi(t)\ |\Psi(t)\rangle^{3/2}}(-2)\,\langle\Psi(t)|\left[w(t) - A\right]^2|\Psi(t)\rangle \times |\Psi(t)\rangle\end{aligned} \qquad \text{(App. J-3)}$$

soit :

$$\frac{d}{dt}|\Phi(t)\rangle = \Big\{-\left[w(t) - A\right]^2 + \langle\Phi(t)|\left[w(t) - A\right]^2|\Phi(t)\rangle\Big\}\,|\Phi(t)\rangle \qquad \text{(App. J-4)}$$

Avec cette équation non linéaire, la norme de $|\Phi(t)\rangle$ ne varie pas dans le temps, quel que soit le choix fait pour la fonction aléatoire $w(t)$.

### 1.2 Solution de l'équation

Si les $|a_n\rangle$ sont les vecteurs propres de $A$ avec des valeurs propres[1] $a_n$, nous pouvons développer $|\Psi(t)\rangle$ selon :

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n x_n(t)\ |a_n\rangle \qquad \text{(App. J-5)}$$

[1]En cas de dégénérescence, plusieurs valeurs consécutives de $a_n$ sont égales, mais correspondent à des vecteurs propres différents (orthogonaux).

Nous avons alors :

$$\frac{d}{dt}x_n(t) = -\left[w(t) - A\right]^2 x_n(t) \qquad \text{(App. J-6)}$$

de sorte que :

$$x_n(t) = e^{-\int_0^t dt'[w(t')-a_n]^2}\ x_n^0 \qquad \text{(App. J-7)}$$

où $x_n^0$ est la valeur initiale de $x_n(t)$ à l'instant $t = 0$. De façon équivalente, nous pouvons aussi écrire :

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\int_0^t dt'[w(t')-A]^2}\ \ |\Psi(0)\rangle \qquad \text{(App. J-8)}$$

Selon (App. J-7), toutes les composantes de $|\Psi(t)\rangle$ décroissent constamment dans le temps, sauf si $w(t) = a_n$ ; dans ce cas particulier, les composantes associées avec une valeur propre de $A$ restent constantes tant que l'égalité est satisfaite.

### 1.3 La règle de probabilité CSL

Nous supposons maintenant que la probabilité de chaque réalisation de $w(t)$ (ces réalisations sont en nombre fini si l'on adopte les hypothèses simples ci-dessus) est proportionnelle au carré de la norme de la valeur de $|\Psi(t)\rangle$ obtenue à partir de (App. J-1) :

$$\mathcal{P}(w_1, w_2, ..., w_N) = c_N \langle\Psi(t)\ |\Psi(t)\rangle \qquad \text{(App. J-9)}$$

où $t = N\Delta t$, et où $w_1, w_2, ...w_N$ sont les valeurs choisies pour $w(t)$ pendant les intervalles de temps successifs ; le coefficient de normalisation $c_N$ est obtenu en écrivant que la somme des probabilités pour toutes les réalisations est 1. La relation (App. J-9) est appelée la loi de probabilité CSL (pour "continuous spontaneous localization"). A partir de cette condition, le théorème de Bayes permet de calculer la probabilité que, si $w(t)$ a une valeur donnée à un instant donné, la fonction va sauter à n'importe quelle autre valeur pendant l'intervalle de temps discret suivant.

Parmi toutes les réalisations possibles des fonctions aléatoires $w(t)$, la loi de probabilité CSL favorise fortement un petit sous-ensemble, les fonctions qui préservent une grande norme pour $|\Psi(t)\rangle$, donc les fonctions qui sont constamment égales (ou presque) à l'une des valeurs propres $a_n$. Toutes les autres possibilités, si nombreuses qu'elles soient, sont par hypothèse considérées comme très peu probables. Pour chaque réalisation, le mécanisme ainsi obtenu brise la symétrie entre toutes les valeurs propres : la même fonction aléatoire ne peut pas rester la plupart du temps très proche de plus d'une valeur propre $a_n$ ; elle doit faire un choix entre elles. Il en résulte que, au bout d'un certain temps, on finit toujours par obtenir un vecteur d'état qui est très

proche d'un vecteur propre de $A$ ; toutefois, en fonction de la fonction aléatoire $w(t)$, qui est a priori différente pour chaque réalisation de l'expérience, une valeur propre différente est obtenue à chaque fois. C'est exactement le comportement nécessaire pour reproduire la réduction du vecteur d'état.

Remarques :

(i) Ce modèle ne correspond pas stricto sensu à une théorie à variables supplémentaires, mais en est relativement similaire ; ce qui est ajouté à la mécanique quantique standard est une fonction aléatoire qui intervient dans la dynamique du vecteur d'état, pas une variable de type "variable cachée" qui correspondrait directement à la quantité mesurée, la position par exemple. On pourrait l'appeler un "modèle à fonctions cachées".

(ii) La loi de probabilité CSL donne la probabilité de la réalisation d'une fonction aléatoire particulière, mais pas d'une valeur particulière de $|\Psi(t)\rangle$, puisque plusieurs fonctions aléatoires différentes peuvent conduire au même vecteur d'état.

## 2. Plusieurs opérateurs

Lorsqu'on mesure la position d'une particule, on peut imaginer la présence de nombreux détecteurs de position situés en différents points de l'espace, chacun signalant la présence éventuelle de la particule dans son domaine spatial. Il s'agit alors de la mesure simultanée d'un grand nombre d'observables commutant entre elles. Nous généralisons donc le modèle précédent au cas où plusieurs opérateurs $A_k$ interviennent dans la dynamique du vecteur d'état.

### 2.1 Equation d'évolution

Nous postulons maintenant l'équation d'évolution :

$$\frac{d}{dt}\,|\Psi(t)\rangle = -\sum_k \left[w_k(t) - A_k\right]^2\ |\Psi(t)\rangle \qquad \text{(App. J-10)}$$

qui contient un ensemble de fonctions aléatoires réelles $w_k(t)$ et une série d'opérateurs $A_k$ commutant tous entre eux. Par exemple, ces opérateurs sont diagonaux en représentation position, et ont pour effet de multiplier la fonction d'onde par une fonction donnée $\varphi_k(\mathbf{r})$. Ces fonctions $\varphi_k(\mathbf{r})$ sont, par exemple, des fonctions gaussiennes de largeur $\alpha^{-1/2}$, chacune centrée en un point de l'espace qui dépend de l'indice $k$ ; lorsque $k$ varie, les points correspondants forment un réseau régulier remplissant tout l'espace. Les opérateurs

$A_k$ commutent alors toujours entre eux, mais leur produit pour deux valeurs différentes de $k$ n'est pas nécessairement nul à cause du recouvrement mutuel des $\varphi_k(\mathbf{r})$.

Nous introduisons alors un second réseau, bien plus fin que le précédent, fait de "cellules" cubiques de dimensions bien plus petites que $\alpha^{-1/2}$, qui sont repérées par l'indice $q$. A l'intérieur de chacune de ces cellules, chacun des $\varphi_k(\mathbf{r})$ reste pratiquement constant, de sorte que dans ce volume l'action de $A_k$ peut être assimilée à une multiplication par une constante, la valeur $\varphi_k^q$ de $\varphi_k(\mathbf{r})$ au centre de la cellule. Ainsi, si nous développons le vecteur d'état initial sur ses composantes dans les cellules[2] :

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_q \left|\overline{\Psi}_q^0\right\rangle \qquad \text{(App. J-11)}$$

nous avons :

$$A_k \left|\overline{\Psi}_q^0\right\rangle \simeq \varphi_k^q \left|\overline{\Psi}_q^0\right\rangle \qquad \text{(App. J-12)}$$

qui signifie que $\left|\overline{\Psi}_q^0\right\rangle$ est pratiquement un vecteur propre de $A_k$. Dans ces conditions :

$$|\Psi(t)\rangle \simeq \sum_q \left[e^{-\int_0^t dt' \sum_k \left[w_k(t') - \varphi_k^q\right]^2}\right] \left|\overline{\Psi}_q^0\right\rangle \qquad \text{(App. J-13)}$$

Nous pouvons également écrire l'équation d'évolution du vecteur d'état $|\Phi(t)\rangle$ défini par (App. J-2) ; nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}|\Phi(t)\rangle = \left\{ -\sum_k \left[w_k(t) - A\right]^2 + \langle\Phi(t)| \sum_k \left[w_k(t) - A\right]^2 |\Phi(t)\rangle \right\} |\Phi(t)\rangle \qquad \text{(App. J-14)}$$

### 2.2 Emergence spontanée d'une localisation du vecteur d'état

La situation est alors semblable à celle qui se produit pour un seul opérateur $A$. En effet, l'équation (App. J-13) montre qu'une composante associée à une cellule $q$ particulière ne peut garder une norme importante que si chaque fonction aléatoire $w_k(t)$ reste très proche de la valeur $\varphi_k^q$ pendant presque tout l'intervalle de temps $[0, t]$. Cela signifie que la fonction $w_k(t)$ correspondant au point $k$ du réseau initial le plus proche de la cellule $q$ doit prendre une valeur significative ; quant aux autres fonctions aléatoires $w_{k'}(t)$ avec $k' \neq k$, elles doivent être bien plus petites puisque $\varphi_{k'}^q$ prend une valeur d'autant plus

[2] La composante $\left|\overline{\Psi}_q^0\right\rangle$ est définie par le fait que, dans la cellule $q$, sa fonction d'onde est égale à celle de $|\Psi(0)\rangle$, mais qu'elle est nulle hors de la cellule $q$.

faible (exponentiellement) que le point $k'$ est éloigné de la cellule considérée. Il en découle que les fonctions aléatoires $w_k(t)$ peuvent sélectionner une cellule $q$ particulière, ou même un ensemble de cellules proches si elles sont petites et si le temps n'est pas trop grand, mais certainement pas plusieurs cellules éloignées à la fois. Ainsi, si l'on postule comme plus haut la règle de probabilité CSL, on favorise des ensembles de fonctions très particulières, ceux pour lesquels la fonction d'onde se localise dans des cellules avoisinantes, voire une seule au bout d'un certain temps. On réalise ainsi l'équivalent d'une réduction du vecteur d'état dans une petite région quelconque et aléatoire de l'espace.

# Appendice K : Familles d'histoires cohérentes

Cet appendice discute la condition de cohérence (XI-22) et comment construire des familles d'histoires cohérentes. En premier lieu, il nous faut mentionner que d'autres conditions de cohérence ont été proposées et utilisées dans la littérature ; dans l'article initial de Griffiths sur les histoires [17], une condition plus faible était introduite, ne demandant que l'annulation de la partie réelle de (XI-22). Pour simplifier, nous nous limiterons ici à une discussion de la condition plus forte (XI-22), condition suffisante mais pas nécessaire de l'autre forme ; en effet il se trouve, comme le remarque la Ref. [556], qu'il semble plus utile dans ce contexte d'introduire plus de sélectivité que de généralité dans la définition des histoires cohérentes.

Une question vient tout de suite à l'esprit : est-il facile, ou même tout simplement possible, de remplir exactement le grand nombre de conditions exprimées par (XI-22) ? D'ailleurs, Gell-Mann et Hartle ont proposé d'attribuer un rôle fondamental aux familles qui ne satisfont à cette condition que de façon approchée [547] ; ici, nous n'adoptons pas ce point de vue, et ne prenons en compte que des conditions de cohérence exactes. Supposons par exemple que le système étudié soit une particule se propageant dans l'espace libre ; les divers projecteurs peuvent alors définir des domaines pour la position de la particule, qui jouent des rôles un peu semblables à des diaphragmes ou filtres spatiaux en optique classique, confinant un faisceau optique dans la direction transverse. Dans ce cas, la condition de cohérence apparaît comme similaire à une condition de non-interférence pour les ondelettes de Huyghens qui sont émises par la surface interne de chaque diaphragme. Mais nous savons par ailleurs que la diffraction est un phénomène inévitable lors de la propagation de la lumière ; même si elle peut rester très faible lorsque la longueur d'onde est suffisamment courte et les diaphragmes suffisamment larges, elle n'est jamais strictement zéro. La question se pose donc : pouvons-nous vraiment satisfaire la condition de non-interférence de façon exacte ? La réponse à la question est oui, mais il est nécessaire de jouer sur la grande flexibilité dont nous disposons pour le choix des sous-espaces dans un grand espace des états, et de ne pas nous limiter uniquement à des projecteurs sur des positions bien définies. Pour mieux comprendre pourquoi, esquissons maintenant une méthode systématique possible pour construire des familles cohérentes.

Une méthode simple est de choisir une base quelconque $\{|u_k\rangle\}$ dans l'espace des états du système, et d'introduire les projecteurs :

$$P(u_k) = |u_k\rangle \langle u_k| \qquad \text{(App. K-1)}$$

Le premier temps $t_1$ apparaissant dans la famille d'histoires est choisi comme origine des temps. Nous supposons que les projecteurs $P_{j_1}$ définissant la famille à cet instant sont donnés par :

$$P_{j_1}(t_1) = P(u_{j_1}) \qquad \text{(App. K-2)}$$

Si, dans l'équation (XI-22), nous insérons ces projecteurs des deux côtés de l'opérateur densité, nous obtenons :

$$Tr\left\{P_{j_1}\rho(t_0)P_{j_1'}\right\} \qquad \text{(App. K-3)}$$

qui, par permutation circulaire sous la trace, peut s'écrire :

$$\begin{aligned} Tr\left\{P_{j_1'}P_{j_1}\rho(t_0)\right\} &= Tr\left\{\left|u_{j_1'}\right\rangle \left\langle u_{j_1'} \mid u_{j_1}\right\rangle \left\langle u_{j_1}\right| \rho(t_0)\right\} \\ &= \delta_{j_1',j_1} Tr\left\{\left|u_{j_1'}\right\rangle \left\langle u_{j_1}\right| \rho(t_0)\right\} \end{aligned} \qquad \text{(App. K-4)}$$

Comme cette expression contient la fonction delta requise par (XI-22), la condition de cohérence à l'instant $t_1$ est satisfaite.

Choisissons maintenant un second instant ultérieur $t_2$ et appelons $U(t_2, t_1)$ l'opérateur d'évolution entre les temps $t_1$ et $t_2$. Nous faisons alors se propager dans le temps les kets $|u_k\rangle$ ainsi que les $P_k$ associés, ce qui donne les projecteurs :

$$P_k^{(2)} = U(t_2, t_1)P(u_k)U^\dagger(t_2, t_1) \qquad \text{(App. K-5)}$$

Nous imposons alors que les $P^2_{k=j}(t_2)$ soient (en point de vue de Schrödinger) les projecteurs définissant la famille à l'instant $t_2$. Dans le point de vue de Heisenberg, ces opérateurs deviennent :

$$\widehat{P}_{j_2}^{(2)}(t_2) = U^\dagger(t_2, t_1)P_{j_2}^{(2)}U(t_2, t_1) = P(u_{j_2}) \qquad \text{(App. K-6)}$$

puisque l'opérateur d'évolution $U$ est unitaire ($U^\dagger U = 1$) ; ils sont donc indépendants de $t_2$. La condition de cohérence (XI-22) à deux temps fait alors apparaître la trace :

$$\begin{aligned} &Tr\left\{\widehat{P}_{j_2}(t_2)\widehat{P}_{j_1}(0)\rho(t_0)\widehat{P}_{j_1'}(0)\widehat{P}_{j_2'}(t_2)\right\} \\ &\quad = Tr\left\{P(u_{j_2})P(u_{j_1})\rho(t_0)P(u_{j_1'})P(u_{j_2'}))\right\} \end{aligned} \qquad \text{(App. K-7)}$$

à l'intérieur de laquelle tous les projecteurs commutent, de sorte qu'elle peut s'écrire :

$$Tr\left\{P(u_{j_2'})P(u_{j_2})P(u_{j_1'})P(u_{j_1})\rho(t_0)\right\} \qquad \text{(App. K-8)}$$

Mais nous avons :

$$P(u_{j'_2})P(u_{j_2}) = \delta_{j'_2,j_2}P(u_{j_2}) \qquad \text{et} \qquad P(u_{j'_1})P(u_{j_1}) = \delta_{j'_1,j_1}P(u_{j_1}) \tag{App. K-9}$$

qui montre précisément l'apparition des fonctions delta nécessaire à la condition de cohérence à deux temps.

Nous pouvons maintenant ajouter un troisième temps $t_3$ et faire se propager les vecteurs de base ainsi que leurs projecteurs entre les instants $t_2$ et $t_3$ ; nous définissons alors, comme dans (App. K-5) :

$$P_k^{(3)} = U(t_3,t_1)P(u_k)U^\dagger(t_3,t_1) \tag{App. K-10}$$

et choisissons les projecteurs ainsi obtenus pour définir la famille d'histoires à l'instant $t_3$. A nouveau, la condition de cohérence (XI-22) ne contient que des projecteurs $P_i$ qui sont indépendants du temps et orthogonaux, et commutent donc, de sorte que la condition est satisfaite. On peut ajouter de cette façon un nombre arbitraire de temps pour définir la famille d'histoires.

Chaque base $\{|u_k\rangle\}$ va engendrer par cette construction une famille différente d'histoires, mais une seule par base. Chacune d'entre elles est néanmoins une famille très spéciale, car chaque projecteur correspond à un sous-espace de dimension 1 seulement, ce qui engendre des histoires qui sont "de précision maximale". Il est cependant possible de rendre la famille plus générale, et moins singulière, en regroupant pour chaque temps $t_i$ plusieurs projecteurs en un seul projecteur sur un sous-espace :

$$P_j(t_i) = \sum_k P_k^{(i)} \tag{App. K-11}$$

où les $P_k^{(i)}$ sont définis comme en (App. K-5) et (App. K-10), et où la somme contient n'importe quel domaine de valeurs de $k$. Ces domaines peuvent même être différents aux différents instants $t_i$, mais une importante condition doit être satisfaite : pour chaque temps $t_i$, chaque valeur de $k$ doit toujours apparaître une fois et une seule dans un des $P_j(t_i)$, jamais dans deux (ou plus) $P_j(t_i)$ différents. Alors, pour chaque temps $t_i$, la somme des projecteurs $P_j(t_i)$ sur toutes les valeurs de $j$ donne l'opérateur unité, et le produit de deux projecteurs pour des valeurs différentes de $j$ est toujours nul. Dans le point de vue de Heisenberg, pour la même raison que plus haut, les projecteurs deviennent indépendants du temps ; de plus tous ces projecteurs commutent, même s'ils correspondent à des temps différents, puisqu'ils sont construits à partir de la même base. On voit alors par le même raisonnement que plus haut que la condition de cohérence est toujours satisfaite, de sorte que la famille obtenue en regroupant les projecteurs sur des kets uniques reste cohérente. Nous pouvons engendrer de cette façon de nombreuses histoires à partir de chaque base $\{|u_k\rangle\}$. Toutefois, d'autres méthodes de construction de familles cohérentes sont possibles.

Pour terminer nous remarquons que, dans notre construction des familles, l'opérateur densité initial $\rho(t_0)$ n'a joué aucun rôle : la méthode est universelle, quel que soit l'état initial du système. Mais il est aussi possible de choisir une base $\{|u_k\rangle\}$ constituée par les vecteurs propres de l'opérateur densité. La description par histoires selon le procédé ci-dessus devient alors, en un sens, triviale : initialement, on peut considérer que le système est dans l'un des états propres de $\rho(t_0)$, avec une probabilité égale à la valeur propre correspondante, et évolue ensuite de façon déterministe sous l'effet de l'opérateur $U(t, t_0)$. L'avantage de cette méthode est de montrer que, dans tous les sous-espaces propres de l'opérateur densité qui ont une valeur propre nulle, les projecteurs peuvent être absolument quelconques, sans que la condition de cohérence intervienne réellement.

# Appendice L : Dynamique de Schrödinger attractive

Cet appendice donne plus de détails sur le modèle de réduction spontanée par des densités bohmiennes attractives brièvement introduit au § K-4 du Chapitre XI. Nous commençons par introduire l'opérateur de localisation $L$, l'équation de Schrödinger modifiée qui utilise cet opérateur, et étudions ensuite la dynamique couplée de la fonction d'onde et de la densité bohmienne. Dans une seconde partie, nous nous intéressons aux prédictions du modèle pour de petits et de grands systèmes quantiques, et discutons pourquoi une réduction très rapide se produit aux "points de branchements" où commencent à apparaître des superpositions quantiques d'états macroscopiquement distincts par leur répartition spatiale.

## 1. Dynamique de Schrödinger modifiée

Nous montrons comment un terme additionel peut être introduit dans l'équation de Schrödinger afin d'attirer les fonctions d'onde dans les régions de l'espace où se trouvent un grand nombre de positions bohmiennes.

### 1-a. Opérateur de localisation $L$

Un opérateur de champ quantique $\Psi(\mathbf{r})$ peut être associé au système de $N$ particules identiques. Si le système est décrit pas un état quantique $|\Phi\rangle$, la densité (numérique) locale de particules $D_\Phi(\mathbf{r})$ au point $\mathbf{r}$ est :

$$D_\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\langle\Phi|\,\Psi^\dagger(\mathbf{r})\,\Psi(\mathbf{r})\,|\Phi\rangle}{\langle\Phi\,|\Phi\rangle} \qquad \text{(App. L-1)}$$

En théorie dBB, les $N$ particules ont des positions bohmiennes $\mathbf{q}_n(t)$, avec $n = 1, 2, \ldots, N$ ; la densité locale $D_B(\mathbf{r})$ des positions est une somme de fonctions delta :

$$D_B(\mathbf{r},t) = \sum_{n=1}^{N} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{q}_n) \qquad \text{(App. L-2)}$$

où la somme court sur toutes les particules. Nous introduisons une fonction plus régulière, l'intégrale de $D_B(\mathbf{r})$ sur un volume de dimension $a_L$ :

$$N_B(\mathbf{r},t) = \int d^3r'\, e^{-(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2/(a_L)^2} D_B(\mathbf{r}',t) = \sum_{n=1}^{N} e^{-(\mathbf{r}-\mathbf{q}_n)^2/(a_L)^2} \quad \text{(App. L-3)}$$

L'ordre de grandeur de $N_B(\mathbf{r},t)$ est le nombre de particules bohmiennes se trouvant dans une sphère de rayon $a_L$ centrée au point $\mathbf{r}$. Une densité spatiale bohmienne $n_B(\mathbf{r},t) = N_B(\mathbf{r},t)/(a_0)^3$ peut également être introduite.

Nous définissons alors l'opérateur de localisation $L(t)$ par :

$$L(t) = \int d^3r\ N_B(\mathbf{r},t)\ \ \Psi^\dagger(\mathbf{r})\,\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N} N_B(\mathbf{R}_n,t) \qquad \text{(App. L-4)}$$

($\mathbf{R}_n$ est l'opérateur position de la particule numérotée $n$). Cet opérateur combine l'opérateur de densité quantique $\Psi^\dagger(\mathbf{r})\,\Psi(\mathbf{r})$ avec la grandeur bohmienne moyennée $N_B(\mathbf{r},t)$. Il a la forme d'un opérateur potentiel à une particule ; $L(t)$ multiplie une fonction d'onde quelconque $\Phi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...,\mathbf{r}_N)$ par la somme sur $n$ des potentiels individuels $N_B(\mathbf{r}_n,t)$. Il prend donc de grandes valeurs aux points de l'espace où la densité bohmienne est élevée, et s'annulle dans des régions où elle vaut zéro.

#### 1-b. Dynamique quantique attractive

Nous recherchons une dynamique qui favorise les évolutions du vecteur d'état qui attirent $D_\Phi(\mathbf{r})$ dans les régions où $N_B(\mathbf{r})$ est élevé. Ceci peut être obtenu en ajoutant à l'hamiltonien habituel $H(t)$ un terme de localisation qui est proportionnel à $L(t)$, ce qui conduit à l'équation de Schrödinger modifiée :

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Phi(t)\rangle = [H(t) + i\hbar\gamma_L\ L(t)]\,|\Phi(t)\rangle \qquad \text{(App. L-5)}$$

où $\gamma_L$ est une constante de localisation et $a_L$ une longueur de localisation. Le terme nouveau dans le second membre fait croître le module de la fonction d'onde dans les régions de l'espace où la densité bohmienne est grande. A cause du coefficient $i$, il n'est pas hermitien, et ne conserve donc pas la norme de $|\Phi\rangle$. Nous pouvons considérer que $|\Phi\rangle$ définit une direction dans l'espace des états (un sous-espace à une dimension de cet espace, ce que von Neumann appelle un "rayon"), de sorte que sa norme n'a aucune importance.

Mais on peut également facilement obtenir une évolution qui conserve la norme du vecteur d'état $\left|\overline{\Phi}\right\rangle$ en écrivant :

$$i\hbar\frac{d}{dt}\left|\overline{\Phi}(t)\right\rangle = \left[H(t) + \overline{H}_L(t)\right]\left|\overline{\Phi}(t)\right\rangle \qquad \text{(App. L-6)}$$

avec :

$$\overline{H}_L(t) = i\hbar\gamma_L \int d^3r \ \left[\Psi^\dagger(\mathbf{r})\,\Psi(\mathbf{r}) - D_\Phi(\mathbf{r})\right] N_B(\mathbf{r},t) \qquad \text{(App. L-7)}$$

La seule différence avec l'équation non normalisée (App. L-5) est que l'opérateur $\Psi^\dagger(\mathbf{r})\,\Psi(\mathbf{r})$ est remplacé par la différence qui se trouve dans le crochet sous l'intégrale, qui n'est en fait rien d'autre que l'opérateur associé à la fluctuation de la densité locale.

L'équation (App. L-5) est linéaire mais dépendant du temps (même si l'hamiltonien $H$ est indépendant du temps), car les positions bohmiennes et donc $N_B(\mathbf{r},t)$ dépendent du temps. La version qui conserve la norme (App. L-7) est de plus non linéaire puisque $D_\Phi(\mathbf{r}')$ dépend du vecteur d'état $|\Phi\rangle$.

### 1-c. Evolutions couplées

Ecrivons la fonction d'onde normalisée $\overline{\Phi}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...,\mathbf{r}_N)$ comme le produit de son module $R$ par un facteur de phase :

$$\overline{\Phi}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...,\mathbf{r}_N) = R(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...,\mathbf{r}_N)\ e^{i\xi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...,\mathbf{r}_N)} \qquad \text{(App. L-8)}$$

Nous supposons que les positions $\mathbf{q}_n$ évoluent selon l'équation de guidage habituelle :

$$\frac{d\mathbf{q}_n(t)}{dt} = \hbar\frac{\nabla_n\xi}{m} \qquad \text{(App. L-9)}$$

L'opérateur $L(t)$ est diagonal et réel en position représentation : il ne change pas la phase de la fonction d'onde, mais seulement son module. L'équation d'évolution de la phase est donc l'équation dBB standard :

$$\hbar\frac{\partial}{\partial t}\xi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...,\mathbf{r}_N) = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_n\left[\nabla_n\xi\cdot\nabla_n\xi - \frac{\Delta_n R}{R}\right] - V(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...,\mathbf{r}_N) \qquad \text{(App. L-10)}$$

où le gradient $\nabla_n$ et laplacien $\Delta_n$ contiennent des dérivées par rapport aux 3 coordonnées de la particule $n$ ; $V$ est l'opérateur de potentiel habituel. Le terme $\Delta_n R/R$ est souvent appelé le "potentiel quantique". Cette équation montre que le processus de localisation ne change pas directement les vitesses bohmiennes. Il les change toutefois indirectement, car l'équation d'évolution du module $R$ est maintenant donnée par :

$$\hbar\frac{\partial}{\partial t}R(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...,\mathbf{r}_N) = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_n\left[2\nabla_n\xi\cdot\nabla_n R + R\Delta_n\xi\right]$$
$$+\,\hbar\gamma_L\ R(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...,\mathbf{r}_N)\left[\sum_n N_B(\mathbf{r}_n) - \int \mathrm{d}^3r\ D_\Phi(\mathbf{r})\ N_B(\mathbf{r})\right] \qquad \text{(App. L-11)}$$

qui inclut dans la seconde ligne un terme nouveau proportionnel à $\gamma_L$.

La variation de $R$ due au processus de localisation contient un terme de décroissance, avec un signe moins, qui est proportionnel à l'intégrale dans tout l'espace du produit $D_\Phi(\mathbf{r})\ N_B(\mathbf{r})$. Ce terme est indépendant des variables $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N$, et introduit donc une décroissance uniforme de la fonction d'onde dans tout l'espace de configuration. Mais la localisation introduit aussi un terme source, qui est proportionnel à la somme sur $n$ de toutes les densités bohmiennes $N_B(\mathbf{r}_n)$ ; ce terme est localisé en tous les points de l'espace de configuration qui se trouvent à distance suffisamment faible d'une position bohmienne $\mathbf{q}_n$ (une distance plus petite que $\alpha_L$ ou comparable). Agissant ensemble, les deux termes maintiennent une norme constante de l'intégrale de $R^2$ dans tout l'espace de configuration.

Il est utile pour ce qui suit de remarquer que, à la limite $a_L \to \infty$, le terme de localisation n'a aucun effet : dans (App. L-3), $N_B(\mathbf{r})$ devient alors égal au nombre total de particules $N$ (qui est constant) et, dans (App. L-4), $L(t)$ devient le produit $N\widehat{N}$ (où $\widehat{N}$ est l'opérateur associé au nombre total de particules). Le membre de droite de (App. L-7) devient alors proportionnel à $N\left(\widehat{N} - N\right)$, opérateur qui donne zéro lorsqu'il agit sur tout ket $\left|\overline{\Phi}(t)\right\rangle$ avec un nombre fixé de particules ; rien n'est donc changé par rapport à la dynamique standard de Schrödinger. Ainsi, si ou $a_L \to \infty$ ou $\gamma_L \to 0$, on retrouve l'évolution quantique habituelle.

## 2. Systèmes physiques petits ou grands

Examinons maintenant quel est l'effet du terme supplémentaire de localisation dans quelques situations différentes : système microscopique isolé, système macroscopique localisé dans une région de l'espace, système macroscopique dans une superposition de deux états quantiques localisés dans deux régions de l'espace différentes. Dans ce dernier cas, nous allons voir que la superposition est rapidement réduite à l'une seule de ses composantes, ce qui assure l'unicité macroscopique ainsi que l'émergence d'un seul résultat bien défini (mais aléatoire) lors d'une mesure quantique. En fonction du point de vue qui est le plus commode dans chaque cas nous utiliserons, soit la forme non normalisée de l'équation (App. L-5), soit la forme normalisée (App. L-7).

Nous supposerons que les valeurs des deux paramètres $\gamma_L$ et $\alpha_L$ sont semblables à celles habituellement choisies dans les théories GRW et CSL, par exemple que :

$$\begin{aligned} \gamma_L &= 10^{-16}\ \mathrm{s}^{-1} \\ a_L &\simeq 10^{-6}\ m \end{aligned} \qquad \text{(App. L-12)}$$

Bien évidemment, notre but ici n'est pas de définir des valeurs précises de ces constantes ; nous souhaitons juste montrer qu'il existe un large domaine de

valeurs qui sont compatibles avec l'immense corpus des données expérimentales qui sont en accord avec la mécanique quantique standard (parfois avec une précision incroyable de $10^{-12}$ !), tout en introduisant une dynamique très rapide de projection du vecteur d'état lorsqu'une mesure est effectuée.

### 2-a. Système microscopique

Commençons pas considérer une particule unique ; la fonction correspondante $N_B(\mathbf{r}_1)$ est une fonction gaussienne centrée au point $\mathbf{q}_1$, qui est nécessairement un point où la fonction d'onde ne s'annule pas (la position bohmienne ne peut pas quitter la fonction d'onde). Le processus de localisation de l'équation (App. L-5) fait croître la fonction d'onde en tous les points qui sont dans le support (la portée) de cette fonction gaussienne, sans affecter la fonction d'onde aux points qui sont hors de portée ; si l'on préfère utiliser l'équation normalisée (App. L-5), cette croissance à faible distance est compensée par une décroissance de la fonction d'onde dans son ensemble, ce qui maintient sa norme constante. La localisation aura donc un effet négligeable sur toute fonction d'onde qui est déjà contenue dans un domaine petit devant $a_L$, mais tend à réduire les ailes des fonctions d'onde qui s'étendent sur de plus grandes distances. Il s'ensuit que le terme de localisation redistribue les composantes de Fourier de la fonction d'onde sur un domaine $\Delta k \simeq 1/a_L$ ; seules les particules dont la longueur d'onde de De Broglie $\lambda$ est de l'ordre de (ou plus grande que) $a_L$ subissent une modification appréciable de leur vitesse bohmienne. Du fait de la valeur mésoscopique (App. L-12) qui a été choisie pour $a_L$, ceci correspond à des vitesses très faibles ; elles sont transférées aux vitesses bohmiennes avec un taux $\gamma_L$, pour lequel nous avons également choisi une valeur très faible. Au bout du compte, après intégration sur le temps pour obtenir la position bohmienne, le terme de localisation ne produit que des changements extrêmement faibles des positions bohmiennes.

Considérons ensuite un atome dont la taille est de l'ordre de $a_0$ (comparable au rayon de Bohr). Puisque les $\mathbf{q}_n$ ne peuvent jamais atteindre des régions de l'espace où la fonction d'onde s'annule, ils restent également localisés dans une région de l'espace d'extension $a_0$. Dans ce cas, la somme sur $n$ des fonctions $N_B(\mathbf{r}_n)$ reste de l'ordre du nombre total de particules $N$ lorsque toutes les positions $\mathbf{r}_n$ tombent dans un domaine de dimension $a_L$ centré sur l'atome, et tend rapidement vers zéro lorsque toutes ces positions s'éloignent de ce domaine. Dans la limite $a_0/a_L \to 0$, nous avons vu que $L(t) \to N\widehat{N}$ de sorte que, dans (App. L-5), le terme de localisation n'a aucun effet (si ce n'est une multiplication par un facteur global, sans aucune conséquence physique). Si $a_0/a_L \ll 1$, l'exponentielle dans (App. L-3) peut être approchée par $1 - c\,(a_0/a_L)^2$, où le terme en 1 n'apporte aucune contribution (il correspond à la limite $a_L \to \infty$ que nous venons de discuter), et où $c \simeq 1$ (la valeur exacte dépend des positions bohmiennes). Donc, si nous ne

retenons que le terme en $(a_0/a_L)^2$, nous voyons que les parties de la fonction d'onde à la périphérie de l'atome sont réduites à un taux $\gamma$ donné par :

$$\gamma \lesssim \gamma_L \left(\frac{a_0}{a_L}\right)^2 N^2 \qquad \text{(App. L-13)}$$

tandis que les parties proches du centre ne sont pas affectées.

Si l'atome est petit (Hydrogène ou Hélium par exemple), avec les valeurs (App. L-12) nous avons $a_0/a_L \simeq 10^{-4}$ de sorte que $\gamma \leq 10^{-24} N^2$ s$^{-1}$, où $N$ est de quelques unités ; ce taux reste clairement très bas et indétectable. Pour une molécule, une dimension de 10 nm est déjà importante, ce qui correspond à $a_0/a_L \simeq 10^{-2}$ et à $\gamma \leq 10^{-20} N^2$ s$^{-1}$ ; même avec un nombre de constituants (protons, neutrons) de l'ordre de $10^4$, nous obtenons toujours un taux extrêmement bas.

Considérons enfin une expérience d'interférence faite avec le même système microscopique. Dans l'interféromètre, la fonction d'onde est localisée à la fois dans deux régions très différentes de l'espace ; mais, comme les différents constituants de l'atome restent liés dans la fonction d'onde (le système microscopique garde sa cohésion), les positions bohmiennes sont toutes groupées, soit dans une région, soit dans l'autre. Donc, dans l'une des deux régions, $N_B(\mathbf{r})$ est égal à $N$ comme plus haut, dans l'autre cette fonction est nulle. Dans (App. L-5) ceci introduit un déséquilibre entre l'onde "pleine", qui croît avec un taux par unité de temps $\gamma_L N^2$, et l'onde "vide" qui ne subit aucun effet du terme de localisation. Le taux de croissance dans le temps de ce déséquilibre est :

$$\gamma \simeq \gamma_L \, N^2 \qquad \text{(App. L-14)}$$

Ainsi, même pour une expérience d'interférence longue durant une seconde, si $N < 10^7$, l'effet du terme de localisation reste négligeable, et l'interférence se produit dans les mêmes conditions que ce que prévoit la dynamique standard de Schrödinger ; mais, pour des valeurs plus élevées de $N$, le modèle prédit que le contraste des franges devrait décroître, et s'annuler dans la limite où $N \gg 1/\sqrt{\gamma_L t}$, où $t$ est le temps passé par les particules dans l'interféromètre.

Remarque : dans une expérience d'interférence avec un gaz condensé de Bose, la situation est différente puisqu'aucune force de cohésion ne maintient les atomes ensemble. La fonction d'onde contient alors des composantes où certains atomes se trouvent dans un bras de l'interféromètre, d'autres dans le bras opposé. En conséquence, les positions bohmiennes peuvent parfaitement se répartir entre les deux bras de l'interféromètre, de sorte que l'effet d'amortissement se produit avec un taux par unité de temps qui reste très inférieur à (App. L-14).

**2-b. Système macroscopique**

La situation est très différente pour des systèmes macroscopiques. Prenons par exemple un bloc de matière, par exemple un cube de métal de 10 $\mu$ de côté. Pour les mêmes raisons que plus haut, les positions bohmiennes sont distribuées aléatoirement à l'intérieur de ce cube, à une distance mutuelle bien plus petite que $\alpha_L$. En conséquence, la fonction bohmienne $N_B(\mathbf{r}_n)$ reste pratiquement constante à l'intérieur du cube, et décroît lentement à l'extérieur sur une distance $a_L$. Dans l'équation (App. L-5), la localisation de chaque constituant du métal (électron, ion) se produit alors via une fonction à variation lente, dont la portée est de l'ordre de 10 $\mu$ (beaucoup plus grande que $a_L$). La raison de ce comportement est que chaque position bohmienne crée une attraction de la fonction d'onde de toutes les autres particules (le processus de localisation n'agit pas indépendamment sur les différentes particules).

Le taux par unité de temps de ce processus de localisation est donné par le terme en $\gamma_L \sum_n N_B(\mathbf{r}_n)$ dans l'équation (App. L-11). Lorsque toutes les positions courantes $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N$ des particules se trouvent à l'intérieur du bloc de métal, ce taux est de l'ordre de :

$$\gamma \simeq \gamma_L \; N_B \; N \qquad \text{(App. L-15)}$$

Même si, par précaution, nous choisissons des valeurs relativement petites $N_P = 10^{20}$, $N_B = 10^{11}$, nous obtenons toujours un taux très rapide $\gamma \simeq 10^{15}$ ; l'équation dynamique conduit à une projection très rapide de la fonction d'onde.

Deux situations sont alors possibles :

(i) Une situation "normale" où la fonction d'onde à $N$ particules contient seulement des composantes où toutes les particules sont localisées à l'intérieur du volume $\mathcal{V}$ du cube. L'équation (App. L-5) prédit alors une croissance uniforme de la fonction d'onde qui n'a aucun effet physique ; si l'on préfère utiliser la version normalisée (App. L-6), on vérifie que le terme contenant l'intégrale spatiale de $D_\Phi(\mathbf{r})$ compense exactement cette croissance. Le terme de localisation n'a alors aucun effet à l'intérieur du volume $\mathcal{V}$.

(ii) Une situation de "chat de Schrödinger" où la fonction d'onde à $N$ particules contient deux (ou plus) composantes où les particules constituantes sont localisées dans des régions différentes de l'espace. Lors d'une mesure quantique, ceci se produit par exemple si le pointeur de l'appareil se trouve dans une superposition quantique d'états qui indiquent des résultats de mesure différents. Il devient alors clair que le processus de localisation agit différemment sur les différentes composantes de la fonction d'onde. En effet, comme plus haut, les différentes positions bohmiennes doivent suivre la même composante de la fonction d'onde (les points de l'espace des configurations où la fonction d'onde s'annule ne sont jamais atteints). Ainsi une composante

de la fonction d'onde (l'onde "pleine") bénéficie du processus de localisation rapide, avec un taux donné approximativement par (App. L-15), tandis que ce n'est pas le cas des autres composantes (les ondes "vides"). La fonction d'onde se concentre alors autour des positions bohmiennes des particules du pointeur, avec un taux par unité de temps de l'ordre de (App. L-15).

Le modèle prédit ainsi que toute superposition d'états correspondant à des localisations macroscopiques dans des régions distinctes de l'espace se réduit très rapidement à une seule composante de la superposition. En particulier, si le pointeur atteignait une superposition d'états indiquant simultanément plusieurs résultats, une réduction à un seul résultat se produirait rapidement. On peut expliquer ainsi l'observation d'un seul résultat dans une réalisation unique d'une mesure quantique.

### 3. Points de branchement, projection, retour à l'équilibre quantique

L'analyse précédente montre que le nouveau terme introduit dans la dynamique de Schrödinger introduit des effects négligeables dans la plupart des cas. L'exception est celle des "points de branchement" (ou encore bifurcation de la fonction d'onde, ou encore "naissance d'un chat de Schrödinger"), qui se produisent au moment où commence à apparaître une superposition d'états quantiques d'un objet macroscopique occupant des positions différentes dans l'espace. Comme nous l'avons vu, le terme de localisation réduit alors toutes les composantes de la superpostion à une seule d'entre elles.

Ceci n'est toutefois pas suffisant pour résoudre le problème de la mesure : nous devons également vérifier que, si une seconde mesure est effectuée, les prévisions de la mécanique quantique standard (règle de Born) restent toujours valables. Ce n'est pas évident, puisque le changement de la dynamique que nous avons introduit modifie le vecteur d'état, et change donc ensuite les trajectoires bohmiennes. Le problème n'est certes pas crucial pour une première mesure, du fait que le terme de localisation ne joue qu'un rôle très faible avant le point de branchement ; les positions bohmiennes vont pratiquement suivre les trajectoires bohmiennes habituelles jusqu'à ce point, et n'auront ensuite guère la possibilité de changer de branche pendant le temps très court du collapse. Elles vont donc se trouver sur une branche ou une autre avec une probabilité qui correspond à la règle de Born habituelle. Mais ce qui se produit si une seconde mesure est effectuée ensuite n'est pas évident, car rien ne garantit que les positions bohmiennes obéissent toujours à une condition d'équilibre quantique après le point de branchement, alors que cette condition est essentielle pour obtenir à nouveau des probabilités qui sont en accord avec la règle de Born standard. Il est clair que, si la distribution des $\mathbf{q}_n$ était très différente de celle de la théorie dBB, les prédictions concernant une seconde mesure pourraient être totalement changées.

Toutefois, Towler, Russell et Valentini [604] ont montré qu'un processus rapide de relaxation tend constamment à ramener toute distribution des $\mathbf{q}_n$ dans l'espace des configurations à celle de l'équilibre quantique [1] (la moyenne à gros grains qui est utilisée dans cette référence est immédiatement fournie par la moyenne sur la longueur de localisation $a_L$) ; il s'ensuit que la distribution des $\mathbf{q}_n$ doit rapidement revenir à celle donnée par le carré de la norme de la fonction d'onde réduite. Ainsi, peu après la première mesure, la distribution habituelle des positions bohmiennes est reconstruite, et l'on peut partir de cette nouvelle valeur initiale pour calculer l'évolution ultérieure de la façon habituelle.

La conclusion est que le terme de localisation ne joue de rôle important qu'aux points de branchement, s'opposant alors à l'apparition simultanée d'états macroscopiquement différents, mais sinon a très peu d'effet. Entre ces points de branchement, un processus de relaxation rapide permet un rapide retour aux résultats habituels de la théorie dBB.

[1] Ces auteurs étudient l'évolution des $\mathbf{q}_n$ lorsque la fonction d'onde évolue selon l'équation de Schrödinger standard (sans terme de localisation). Comme ils prédisent des temps de relaxation relativement courts, leurs conclusions pour des objets microscopiques ne devraient pratiquement pas être changées par la présence d'un terme de localisation dont la constante de couplage est très faible.

# Bibliographie


[1] N. Bohr, *Atomic Physics and Human Knowledge*, Wiley (1958), and Dover (2011), voir en particulier "Discussions with Einstein on epistemological problems in atomic physics" ou, avec une bibliographie et un glossaire : C. Chevalley : *Physique atomique et connaissance humaine*, Folio essais, Gallimard (1991) ; *Essays 1933 to 1957 on Atomic Physics and Human Knowledge*, Ox Bow Press (1987) ; *Essays 1958–62 on Atomic Physics and Human Knowledge*, Wiley (1963) and Ox Bow Press (1987) ; *Atomic Physics and the Description of Nature*, Cambridge University Press (1934 et 1961).

[2] *Albert Einstein : Philosopher-Scientis*t, P.A. Schilpp ed., Open Court et Cambridge University Press (1949).

[3] G. Bacchiagaluppi and A. Valentini, *Quantum Theory at the Crossroads : Reconsidering the 1927 Solvay Conference*, Cambridge University Press (2009) ; https://arxiv.org/abs/quant-ph/0609184v2.

[4] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin (1932) ; *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press (1955).

[5] J.S. Bell, "On the problem of hidden variables in quantum mechanics", *Rev. Mod. Phys.* **38**, 447–452 (1966) ; reproduit dans *Quantum Theory and Measurement*, J.A. Wheeler and W.H. Zurek eds., Princeton University Press (1983), 396–402 et dans le Chapitre 1 de [6].

[6] J.S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press (1987) ; seconde édition complétée (2004), qui contient la série complète des articles de J. Bell sur la mécanique quantique.

[7] D. Bohm and J. Bub, "A proposed solution of the measurement problem in quantum mechanics by a hidden variable theory", *Rev. Mod. Phys.* **38**, 453–469 (1966).

[8] D. Bohm and J. Bub, "A refutation of the proof by Jauch and Piron that hidden variables can be excluded in quantum mechanics", *Rev. Mod. Phys.* **38**, 470–475 (1966).

[9] N.D. Mermin, "Hidden variables and the two theorems of John Bell", *Rev. Mod. Phys.* **65**, 803–815 (1993) ; voir en particulier le § III.

[10] A. Shimony, "Role of the observer in quantum theory", *Am. J. Phys.* **31**, 755–773 (1963).

[11] D. Bohm, "A suggested interpretation of the quantum theory in terms of 'hidden' variables", *Phys. Rev.* **85**, 166–179 et 180–193 (1952) ; par le même auteur, voir également *Quantum Theory*, Constable (1954), bien que cet ouvrage ne discute pas les théories à variables supplémentaires.

[12] N. Wiener and A. Siegel, "A new form for the statistical postulate of quantum mechanics", *Phys. Rev.* **91**, 1551–1560 (1953) ; A. Siegel and N. Wiener, "Theory of measurement in differential space quantum theory", *Phys. Rev.* **101**, 429–432 (1956).

[13] P. Pearle, "Reduction of the state vector by a nonlinear Schrödinger equation", *Phys. Rev.* **D 13**, 857–868 (1976).

[14] P. Pearle, "Toward explaining why events occur", *Int. J. Theor. Phys.* **18**, 489–518 (1979).

[15] G.C. Ghirardi, A. Rimini and T. Weber, "Unified dynamics for microscopic and macroscopic systems", *Phys. Rev.* **D 34**, 470–491 (1986) ; "Disentanglement of quantum wave functions", *Phys. Rev.* **D 36**, 3287–3289 (1987).

[16] B.S. DeWitt, "Quantum mechanics and reality", *Phys. Today* **23**, 30–35 (September 1970).

[17] R.B. Griffiths, "Consistent histories and the interpretation of quantum mechanics", *J. Stat. Phys.* **36**, 219–272 (1984) ; *Consistent Quantum Theory*, Cambridge University Press (2002).

[18] S. Goldstein, "Quantum theory without observers", *Phys. Today* **51**, 42–46 (March 1998) et 38–41 (April 1998).

[19] "Quantum mechanics debate", *Phys. Today* **24**, 36–44 (April 1971) ; "Still more quantum mechanics", *Phys. Today* **24**, 11–15 (Oct. 1971).

[20] B.S. DeWitt and R.N. Graham, "Resource letter IQM-1 on the interpretation of quantum mechanics", *Am. J. Phys.* **39**, 724–738 (1971).

[21] M. Jammer, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, McGraw-Hill (1966), deuxième édition (1989).

[22] J. Mehra and H. Rechenberg, *The Historical Development of Quantum Theory*, Springer (1982).

[23] O. Darrigol, *From c-Numbers to q-Numbers : The Classical Analogy in the History of Quantum Theory*, University of California Press (1992).

[24] B. d'Espagnat, *Conceptual Foundations of Quantum Mechanics*, Benjamin, New York (1971).

[25] B. d'Espagnat, *Veiled Reality : an Analysis of Present Day Quantum Mechanics Concepts*, Addison Wesley (1995) ; *Le réel voilé, analyse des concepts quantiques*, Fayard, Paris (1994) ; *Une incertaine réalité, la connaissance et la durée*, Gauthier-Villars, Paris (1985) ; *A la recherche du réel*, Gauthier Villars Bordas, Paris (1979).

[26] M. Planck, "Über eine Verbesserung der Wienerschen Spektralgleichung", *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft* **2**, 202–204 (1900). *Physikalische Abhandlungen und Vorträge*, vol. 1, 493–600, Friedrich Vieweg und Sohn (1958).

[27] G.N. Lewis, "The conservation of photons", *Nature* **118**, 874–875 (1926).

[28] A. Pais, "Einstein and the quantum theory", *Rev. Mod. Phys.* **51**, 863–914 (1979).

[29] E.H. Lieb and R. Seiringer, *The Stability of Matter in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press (2010).

[30] L. de Broglie, "Recherches sur la théorie des quanta", thèse Paris (1924).

[31] C.J. Davisson and L.H. Germer, "Reflection of electrons by a crystal of nickel", *Nature* **119**, 558–560 (1927).

[32] O. Darrigol, "Strangeness and soundness in Louis de Broglie's early works", *Physis* **30**, 303–372 (1993).

[33] E. Schrödinger, "Quantisierung als Eigenwert Problem", *Annalen der Physik*, 1re communication : **79**, 361–376 (1926) ; 2e communication : **79**, 489–527 (1926) ; 3e communication : **80**, 437–490 (1926) ; 4e communication : **81**, 109–139 (1926).

[34] M. Born, "Quantenmechanik der Stossvorgänge", *Zeitschrift für Physik* **38**, 803–827 (1926) ; "Zur Wellenmechanik der Stossvorgänge", *Göttingen Nachrichten* 146–160 (1926).

[35] E.A. Cornell and C.E. Wieman, "The Bose–Einstein condensate", *Scientific American* **278**, 26–31 (March 1998).

[36] W. Heisenberg, *The Physical Principles of the Quantum Theory*, University of Chicago Press (1930).

[37] P. Jordan, "Bemerkungen zur Theorie der Atomstruktur", *Zeitschrift für Physik* **33**, 563–570 (1925) ; "Über eine neue Begründung der Quantenmechanik I und II", *Zeitschrift für Physik* **40**, 809–838 (1926) et **44**, 1–25 (1927) ; "Austauschprobleme und zweite Quantelung", *Zeitschrift für Physik* **91**, 284–288 (1934).

[38] B. Schroer, "Pascual Jordan, his contibutions to quantum mechanics, and his legacy in contemporary local quantum physics", arXiv:hep-th/0303241v2 (2003).

[39] P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press (1930, 1958).

[40] D. Howard, "Who invented the Copenhagen interpretation ? A study in mythology", *Philos. Sci.* **71**, 669–682 (2004).

[41] N. Bohr, "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete ?", *Phys. Rev.* **48**, 696–702 (1935).

[42] H.P. Stapp, "S-matrix interpretation of quantum theory", *Phys. Rev.* **D 3**, 1303–1320 (1971).

[43] H.P. Stapp, "The Copenhagen interpretation", *Am. J. Phys.* **40**, 1098–1116 (1972).

[44] A. Peres, "What is a state vector ?", *Am. J. Phys.* **52**, 644–650 (1984).

[45] J.B. Hartle, "Quantum mechanics of individual systems", *Am. J. Phys.* **36**, 704–712 (1968).

[46] N. Bohr, "On the notions of causality and complementarity", *Dialectica* **2**, 312–319 (1948).

[47] W. Pauli, "Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren", *Zeit. Phys.* **31**, 765-783 (1925).

[48] P.A.M. Dirac, "The quantum theory of the emission and absorption of radiation", *Proc. Roy. Soc A* **114**, 243-265 (1927).

[49] V. Fock, "Konfigurationraum und zweite Quantelung", Zeit. Phys. **75**, 622-647 (1932).

[50] M.C. Reed, B. Simon, "Methods of modern mathematical physics, Volume II", Academic Press, 328 (1975).

[51] R. P. Feynman, "Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics", *Rev. Mod. Physics* **20**, 367-387 (1948).

[52] R.P. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals*, McGraw-Hill (1965).

[53] J.S. Bell, "Six possible worlds for quantum mechanics", *Found. Phys.* **22**, 1201–1215 (1992).

[54] N.D. Mermin, "Quantum mechanics : fixing the shifty split", *Physics Today*, 8-10 (July 2012).

[55] J.S. Bell, "Quantum mechanics for cosmologists", in *Quantum Gravity*, C. Isham, R. Penrose, and D. Sciama eds., **2**, 611–637, Clarendon Press (1981) ; pp. 117–138 de [6].

[56] N.D. Mermin, "Is the moon there when nobody looks ? Reality and the quantum theory", *Phys. Today* **38**, 38–47 (April 1985).

[57] F. London and E. Bauer, "La théorie de l'observation en mécanique quantique", n° 775 des *Actualités scientifiques et industrielles, exposés de physique générale* ; Hermann, Paris (1939) ; traduit en anglais dans "The theory of observation in quantum mechanics" in *Quantum Theory of Measurement*, J.A. Wheeler and W.H. Zurek eds., Princeton University Press (1983), pp. 217–259 ; voir en particulier § 11, et aussi 13 et 14.

[58] M. Jammer, *The Philosophy of Quantum Mechanics*, Wiley (1974).

[59] E. Schrödinger, "Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik", *Naturwissenschaften* **23**, 807–812, 823–828, 844–849 (1935).

[60] J.D. Trimmer, "The present situation in quantum mechanics : a translation of Schrödinger's cat paradox paper", *Proc. Amer. Phil. Soc.* **124**, 323–338 (1980). Egalement disponible dans *Quantum Theory of Measurement*, J.A. Wheeler and W.H. Zurek eds, Princeton University Press (1983), pp. 152–167.

[61] A. Einstein, lettre à Schrödinger du 8 août 1935, reproduite par exemple page 238 de [99].

[62] E. Schrödinger, *The Interpretation of Quantum Mechanics*, edited and with an introduction by M. Bitbol, Woodbridge, Connecticut, Ox Bow Press (1995).

[63] K. Hornberger, S. Gerlich, P. Haslinger, S. Nimmrichter and M. Arndt, "Colloquium : quantum interference of clusters and molecules", *Rev. Mod. Phys.* **84**, 157–173 (2012).

[64] E.P. Wigner, "The problem of measurement", *Am. J. Phys.* **31**, 6–15 (1963) ; reproduit dans *Symmetries and Reflections*, Indiana University Press, pp. 153–170 (1967) ; ou encore dans *Quantum Theory of Measurement*, J.A. Wheeler and W.H. Zurek eds., Princeton University Press (1983), pp. 324–341.

[65] E.P. Wigner, "Remarks on the mind-body question" in *The scientist speculates*, I.J. Good ed., Heinemann, London (1961), pp. 284–302 ; reproduit dans E.P. Wigner, *Symmetries and Reflections*, Indiana University Press (1967), pp. 171–184.

[66] M. Renninger, "Zum Wellen-Korpuskel Dualismus", *Zeit. Phys.* **136**, 251–261 (1953).

[67] M. Renninger, "Messungen ohne Störung des Messobjekts", *Zeit. Phys.* **158**, 417–421 (1960).

[68] R.H. Dicke, "Interaction-free quantum measurement : a paradox ?", *Am. J. Phys.* **49**, 925–930 (1981).

[69] A.C. Elitzur and L. Vaidman, "Quantum mechanical interaction-free measurements", *Found. Phys.* **23**, 987–997 (1993).

[70] P. Kwiat, H. Weinfurter, T. Herzog, A. Zeilinger and M.A. Kasevich, "Interaction-free measurement", *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4763–4766 (1995).

[71] L. Hardy, "On the existence of empty waves in quantum theory", *Phys. Lett.* **A 167**, 11–16 (1992).

[72] L. Hardy, "Quantum mechanics, local realistic theories, and Lorentz invariant realistic theories", *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2981–2984 (1992).

[73] A.J. DeWeerd, "Interaction-free measurement", *Am. J. Phys.* **70**, 272–275 (2001).

[74] A.G. White, J.R. Mitchell, O. Nairz and P. Kwiat, "Interaction-free imaging", *Phys. Rev.* **A 58**, 605–613 (1998).

[75] W. Putnam and M. Yanik, "Noninvasive electron microscopy with interaction-free quantum measurements", *Phys. Rev.* **A 80**, 040902 (2009).

[76] S. Thomas, C. Kohstall, P. Kruit and P. Hommelhoff, "Semitransparency in interaction-free measurements", *Phys. Rev.* **A 90**, 053840 (2014) ; arXiv:1409.0044 [quant-ph] (2014).

[77] P. Kruit, R.G. Hobbs, C-S. Kim, Y. Yang, V.R. Manfrinato, J. Hammer, S. Thomas, P. Weber, B. Klopfer, C. Kohstall, T. Juffmann, M.A. Kasevich, P. Hommelhoff and K.K. Berggren, "Designs for a quantum electron microscope", *Ultramicroscopy* **164**, 31-45 (2015) ; arXiv:1510.05946 (2015).

[78] G. Ghirardi, *Sneaking a look at God's cards, unraveling the mysteries of quantum mechanics*, revised edition, Princeton University Press (2007).

[79] C. Robens, A. Alt, C. Emary, D. Meschede and A. Alberti, "Atomic 'bomb testing' : the Elitzur-Vaidman experiment violates the Leggett-Garg inequality", *Appl. Phys. B* 123 :12 (2017).

[80] X.Y. Zou, L.J. Wang and L. Mandel, "Induced coherence and indistinguishability in optical coherence", *Phys. Rev. Lett.* **67**, 318-321 (1991).

[81] L.J. Wang, X.Y. Zou and L. Mandel, "Induced coherence without induced emission", *Phys. Rev.* **A 44**, 4614-4622 (1991).

[82] G. Baretta Lemos, V. Borish, G.D. Cole, S. Ramelow, R. Lapkiewicz and A. Zeilinger, "Quantum imaging with undetected photons", *Nature* **512**, 409-412 (2014).

[83] Tae-Gon Noh, "Counterfactual quantum cryptography", *Phys. Rev. Lett.* **103**, 230501 (2009).

[84] A. Petersen, "The philosophy of Niels Bohr", in *Bulletin of the Atomic Scientists* **XIX**, 8–14 (September 1963).

[85] C. Chevalley, "Niels Bohr's words and the Atlantis of Kantianism", in *Niels Bohr and Contemporary Philosophy*, J. Faye and H. Folse eds., Dordrecht Kluwer (1994), pp. 33–57.

[86] N. Bohr, "The unity of human knowledge" (October 1960) ; *Atomic Physics and Human Knowledge*, Wiley (1958 et 1963).

[87] C. Norris, "*Quantum Theory and the Flight from Realism : Philosophical Responses to Quantum Mechanics*, Routledge (2000), p. 233.

[88] N. Bohr, "Quantum physics and philosophy : causality and complementarity", in *Philosophy in the Mid-Century : A Survey* ; R. Klibansky ed., La Nuova Italia Editrice, Firenze (1958). Voir également "The quantum of action and the description of nature", in *Atomic Theory and the Description of Nature*, Cambridge University Press (1934), pp. 92–101.

[89] P. Bokulich and A. Bokulich, "Niels Bohr's generalization of classical mechanics", *Found. Phys.* **35**, 347–371 (2005).

[90] N. Bohr, "Atomic theory and mechanics", *Nature* **116**, 845–852 (1925).

[91] N. Bohr, *Collected Works*, edited by F. Aaserud, Elsevier (2008) ; voir également *Collected Works, Complementarity beyond Physics (1928–1962)*.

[92] N. Bohr, "The quantum postulate and the recent development of atomic theory", *Nature*, Supplement April 14 1928, 580–590 (1928).

[93] M. Born, "Physical aspects of quantum mechanics", *Nature* **119**, 354–357 (1927).

[94] W. Heisenberg, *Physics and Philosophy*, Harper & Brothers (1958) ; Harper Perennial Modern Classics (2007).

[95] J.S. Bell, "Bertlmann's socks and the nature of reality", *J. Physique colloques* **C2**, 41–62 (1981). Cet article est reproduit dans les pages 139–158 de [6].

[96] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics, Non-Relativistic Theory*, Pergamon Press (1958), Butterworth-Heinemann Ltd (1996).

[97] E. Schrödinger, *What is Life ? Mind and Matter*, Cambridge University Press (1944 et 1967), p. 137.

[98] A. Einstein, lettre à Schrödinger du 31 mai 1928, reproduite par exemple page 213 de [99].

[99] F. Balibar, O. Darrigol et B. Jech, *Albert Einstein, œuvres choisies I, quanta*, Editions du Seuil et Editions du CNRS (1989).

[100] A. Einstein, "Physik und Realität", *Journal of the Franklin Institute* **221**, 313–347 (1936).

[101] L. de Broglie, "La physique quantique restera-t-elle indéterministe ?", *Revue des sciences et de leurs applications*, **5**, 289–311 (1952). Académie des Sciences, session du 25 avril 1953, http ://www.sofrphilo.fr/telecharger.php ?id=74

[102] J.S. Bell, "Against measurement", in *Sixty Two Years of Uncertainty : Historical, Philosophical and Physical Enquiries into the Foundations of Quantum Mechanics*, Erice meeting in August 1989, A.I. Miller ed. (Plenum Press) ; reproduit dans pp. 213–231 de l'édition 2004 de [6].

[103] L. Rosenfeld, "The measuring process in quantum mechanics", *Suppl. Prog. Theor. Phys.*, extra number 222 "Commemoration of the thirtieth anniversary of the meson theory by Dr. H. Yukawa" (1965).

[104] K. Gottfried, *Quantum Mechanics*, Benjamin (1966) ; deuxième édition, K. Gottfried and Yan Tun-Mow, Springer (2003).

[105] A.J. Leggett, "Testing the limits of quantum mechanics : motivation, state of play, prospects", *J. Phys. Condens. Matter* **14**, R415–R451 (2002).

[106] A.J. Leggett, "Macroscopic quantum systems and the quantum theory of measurement", Supplement of the *Progr. Theor. Phys.* n° 69, 80–100 (1980).

[107] A.J. Leggett, *The Problems of Physics*, Oxford University Press (1987).

[108] N.G. van Kampen, "Ten theorems about quantum mechanical measurements", *Physica* **A 153**, 97–113 (1988).

[109] B.G. Englert, M.O. Scully and H. Walther, "Quantum erasure in double-slit interferometers with which-way detectors", *Am. J. Phys.* **67**, 325–329 (1999) ; voir les premières lignes du § IV.

[110] C.A. Fuchs and A. Peres, "Quantum theory needs no 'interpretation'", *Phys. Today* **53**, March 2000, 70–71 ; voir également diverses réactions à ce texte dans les lettres publiées dans le numéro de septembre 2000.

[111] C.F. von Weizsäcker, *Voraussetzungen des naturwissenschaftlichen Denkens*, Hanser Verlag (1971) and Herder (1972).

[112] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete ?", *Phys. Rev.* **47**, 777–780 (1935) ; *Quantum Theory of Measurement*, J.A. Wheeler and W.H. Zurek eds., Princeton University Press (1983), pp. 138–141.

[113] M. Born ed., *The Einstein–Born letters (1916–1955)*, MacMillan, London (1971).

[114] A. Einstein, lettre à Schrödinger du 19 juin 1935, reproduite page 234 de [99].

[115] A. Einstein, "Quantenmechanik und Wirklichkeit", *Dialectica* **2**, 320–324 (1948).

[116] A. Einstein, "Autobiographical notes" pp. 5–94 (en particulier p. 85) et "Reply to criticism" pp. 663–688 (en particulier pp. 681–683) in *Albert Einstein : Philosopher-Scientist*, edited by P.A. Schilpp, Open Court and Cambridge University Press (1949).

[117] T. Sauer, "An Einstein manuscript on the EPR paradox for spin observables", *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, **38**, 879–887 (2007).

[118] A. Peres, "Einstein, Podolsky, Rosen, and Shannon", *Found. Phys.* **35**, 511–514 (2005).

[119] D. Home and F. Selleri, "Bell's theorem and the EPR paradox", *Rivista del Nuov. Cim.* **14**, 1–95 (1991).

[120] D. Bohm, *Quantum Theory*, Prentice Hall (1951).

[121] N. Bohr, "Quantum mechanics and physical reality", *Nature* **136**, 65 (1935).

[122] P. Pearle, "Alternative to the orthodox interpretation of quantum theory", *Am. J. Phys.* **35**, 742–753 (1967).

[123] J.F. Clauser and A. Shimony, "Bell's theorem : experimental tests and implications", *Rep. Progr. Phys.* **41**, 1881–1927 (1978).

[124] *The Born-Einstein letters, with commentaries by Max Born*, translated by Irene Born, MacMillan Press (1971). Albert Einstein, Max Born, correspondance 1916-1955, Seuil (1972).

[125] D.J. Hemmick and A.M. Shakur, *Bell's theorem and quantum realism ; reassessment in light of the Schrödinger paradox*, Springer (2012).

[126] J. Conway and S. Kochen, "The free will theorem", *Found. of Phys.* **36**, 1441-1473 (2006) ; "The strong free will theorem", *Notices of the AMS* **56**, 1441-1473 (2009).

[127] A. Bassi and G. Ghirardi, "The Conway-Kochen argument and relativistic GRW models", *Found. of Phys.* **37**, 169-185 (2007).

[128] F. Laloë, "The hidden phase of Fock states ; quantum non-local effects", *Europ. Phys. J.* **33**, 87–97 (2005) ; "Bose–Einstein condensates and quantum non-locality", in *Beyond the Quantum*, T.M. Nieuwenhiuzen *et al.* eds., World Scientific (2007).

[129] P.W. Anderson, in *The Lesson of Quantum Theory*, eds. J. de Boer, E. Dahl and O. Ulfbeck, Elsevier, New York (1986).

[130] W.J. Mullin and F. Laloë, "Quantum non-local effects with Bose–Einstein condensates", *Phys. Rev. Lett.* **99**, 150401 (2007) ; "EPR argument and Bell inequalities for Bose–Einstein spin condensates", *Phys. Rev.* **A 77**, 022108 (2008).

[131] J.S. Bell, "On the Einstein–Podolsky–Rosen paradox", *Physics*, **I**, 195–200 (1964) ; reproduit dans le Chapitre 2 de [6].

[132] F. Laloë, "Les surprenantes prédictions de la mécanique quantique", *La Recherche* n° 182, 1358–1367 (novembre 1986).

[133] F. Laloë, "Cadre général de la mécanique quantique ; les objections de Einstein, Podolsky et Rosen", *J. Physique Colloques* **C-2**, 1–40 (1981). Voir également les articles qui suivent dans ce numéro, en particulier celui de J. Bell sur les chaussettes de Bertlmann, qui est un classique !

[134] P. Eberhard, "Bell's theorem without hidden variables", *Nuov. Cim.* **38 B**, 75–79 (1977) ; "Bell's theorem and the different concepts of locality", *Nuov. Cim.* **46 B**, 392–419 (1978).

[135] J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony and R.A. Holt, "Proposed experiment to test local hidden-variables theories", *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880–884 (1969).

[136] A. Peres, "Unperformed experiments have no results", *Am. J. Phys.* **46**, 745–747 (1978).

[137] J.A. Wheeler, "Niels Bohr in today's words" in *Quantum Theory and Measurement*, J.A. Wheeler and W.H. Zurek eds., Princeton University Press (1983), pp. 182–213.

[138] E.P. Wigner, "On hidden variables and quantum mechanical probabilities", *Am. J. Phys.* **38**, 1005–1009 (1970).

[139] K. Hess and W. Philipp, "The Bell theorem as a special case of a theorem of Bass", *Found. Phys.* **35**, 1749–1767 (2005).

[140] J. Bass, "Sur la compatibilité des fonctions de répartition", *C.R. Académie des Sciences* **240**, 839–841 (1955).

[141] B. d'Espagnat, "The quantum theory and reality", *Scientific American* **241**, 128–140 (Nov. 1979).

[142] C.A. Kocher and E.D. Commins, "Polarization correlation of photons emitted in an atomic cascade", *Phys. Rev. Lett.* **18**, 575–577 (1967).

[143] S.J. Freedman and J.F. Clauser, "Experimental test of local hidden variable theories", *Phys. Rev. Lett.* **28**, 938–941 (1972) ; S.J. Freedman, thesis, University of California, Berkeley.

[144] J.F. Clauser, "Experimental investigations of a polarization correlation anomaly", *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1223 (1976).

[145] E.S. Fry and R.C. Thompson, "Experimental test of local hidden variable theories", *Phys. Rev. Lett.* **37**, 465–468 (1976).

[146] M. Lamehi-Rachti and W. Mittig, "Quantum mechanics and hidden variables : a test of Bell's inequality by the measurement of the spin correlation in low energy proton-proton scattering", *Phys. Rev.* **D 14**, 2543–2555 (1976).

[147] O. Freire, *The quantum dissidents ; rebuilding the foundations of quantum mechanics*, Springer (2015).

[148] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, "Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem", *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460–463 (1981).

[149] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, "Experimental realization of Einstein–Podolsky–Bohm Gedankenexperiment : a new violation of Bell's inequalities", *Phys. Rev. Lett.* **49**, 91–94 (1982).

[150] A. Aspect, J. Dalibard and G. Roger, "Experimental tests of Bell's inequalities using time varying analyzers", *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804–1807 (1982).

[151] W. Perrie, A.J. Duncan, H.J. Beyer and H. Kleinpoppen, "Polarization correlations of the two photons emitted by metastable atomic deuterium : a test of Bell's inequality", *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1790–1793 (1985).

[152] T.E. Kiess, Y.E. Shih, A.V. Sergienko and C.O. Alley, "Einstein–Podolsky–Rosen–Bohm experiments using pairs of light quanta produced by type-II parametric down conversion", *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3893–3897 (1993).

[153] W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden and N. Gisin, "Violations of Bell inequalities by photons more than 10 km apart", *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3563–3566 (1998).

[154] T. Scheidl, R. Ursin, J. Kofler, S. Ramelow, X.S. Ma, T. Herbst, L. Ratschbacher, A. Fedrizzi, N.K. Langford, T. Jennewein and A. Zeilinger, "Violations of local realism with freedom of choice", *Proc. Nat. Acad. Sciences* **107**, 19708–19713 (November 16, 2010).

[155] J. Yin, Y. Cao, Y-H. Li, S-K. Liao, L. Zhang, J-G. Ren, W-Q. Cai, W-Y. Liu, B. Li, H. Dai, G-B. Li, Q-M. Lu, Y-H. Gong, Y. Xu, S-L. Li, F-Z. Li, Y-Y. Yin, Z-Q. Jiang, M. Li, J-J. Jia, G. Ren, D. He, Y-L. Zhou, X-X. Zhang, N. Wang, X. Chang, Z-C. Zhu, N-L. Liu, Y-A. Chen, C-Y. Lu, R. Shu, C-Z. Peng, J-Y. Wang and

J-W. Pan, "Satellite-based entanglement distribution over 1200 kilometers", *Science* **356**, 1140-1144 (2017).

[156] B. Lamine, R. Hervé, M.T. Jaekel, A. Lambrecht and S. Reynaud, "Large scale EPR correlation and gravitational waves backgrounds", *Eur. Phys. Lett.* **95**, 20004 (2011).

[157] J.C. Howell, A. Lamas-Linares and D. Bouwmeester, "Experimental violation of a spin-1 Bell inequality using maximally entangled four photon states", *Phys. Rev. Lett.* **88**, 030401 (2002).

[158] B. Hensen, H. Bernien, A.E. Dréau, A. Reiserer, N. Kalb, M.S. Blok, J. Ruitenberg, R.F.L. Vermeulen, R.N. Schouten, C. Abellan, W. Amaya, V. Pruneri, M.W. Mitchell, M. Markham, D.J. Twitchen, D. Elkouss, S. Wehner, T.H. Taminiau and R. Hanson, "Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres", *Nature* **526**, 682-686 (2015).

[159] M. Giustina, M.A.M Versteegh, S. Wengerowsky, J. Handsteiner, A. Hochrainer, K. Phelan, F. Steinlechner, J. Kofler, J.A. Larsson, C. Abellán, W. Amaya, V. Pruneri, M.W. Mitchell, J. Beyer, T. Gerrits, A.E. Lita, L.K. Shalm, S.W. Nam, T. Scheidl, R. Ursin, B. Wittmann and A. Zeilinger, "Significant-loophole-free test of Bell's theorem with entangled photons", *Phys. Rev. Lett.* **115**, 250401 (2015).

[160] L.K. Shalm, E. Meyer-Scott, B.G. Christensen, P. Bierhorst, M.A. Wayne, M.J. Stevens, T. Gerrits, S. Glancy, D.R. Hamel, M.S. Allman, K.J. Coakley, S. Dyer, C. Hodge, A.E. Lita, V.B. Verma, C. Lambrocco, E. Tortorici, A.L. Migdall, Y. Zhang, D.R. Kumor, W.H. Farr, F. Marsili, M.D. Shaw, J.A. Stern, C. Abellán, W. Amaya, V. Pruneri, T. Jennewein, M.W. Mitchell, P.G. Kwiat, J.C. Bienfang, R.P. Mirin, E. Knill and S.W. Nam, "Strong Loophole-Free Test of Local Realism", *Phys. Rev. Lett.* **115**, 250402 (2015).

[161] A. Aspect, "Closing the door on Einstein and Bohr's quantum debate", *Physics* **8**, 123 (2015).

[162] A. Fine, "Hidden variables, joint probability, and the Bell inequalities", *Phys. Rev. Lett.* **48**, 291–295 (1982).

[163] J.S. Bell, "Introduction to the hidden variable question", contribution to *Foundations of Quantum Mechanics*, Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, course II, Academic, New York (1971), p.171 ; reproduit dans les pages 29–39 de [6].

[164] J.F. Clauser and M.A. Horne, "Experimental consequences of objective local theories", *Phys. Rev.* **D 10**, 526–535 (1974).

[165] T. Norsen, "John S. Bell concept of local causality", *Am. J. Phys.* **79**, 1261-1274 (2011) ; see also "Bell locality and the nonlocal character of Nature", *Found. Physics Lett.* **19**, 633-655 (2006).

[166] J.S. Bell, "La nouvelle cuisine", § 24 de la seconde édition de [6].

[167] J.S. Bell, "The theory of local beables", *Epistemological letters*, march 1976 ; reproduit dans les pages 52–62 de [6].

[168] O. Oreshkov, F. Costa and C. Brukner, "Quantum correlactions with no causal order", Nature Comm., Article number : 1092 (2012).

[169] M. Araújo, F. Costa and C. Brukner, "Computational advantage from quantum-controlled ordering of gates", Phys. Rev. Lett. **113**, 250402 (2014).

[170] N. Gisin, *L'impensable hasard*, Odile Jacob (2012).

[171] J.P. Jarrett, "On the physical significance of the locality conditions in the Bell arguments", *Nőus* **18**, 569–589 (1984).

[172] L.E. Ballentine and J.P. Jarrett, "Bell's theorem : does quantum mechanics contradict relativity ?", *Am. J. Phys.* **55**, 696–701 (1987).

[173] A. Shimony, "Bell's theorem", dans la Stanford Encyclopedia of Philosophy (2004 and 2009), http ://plato.stanford.edu/entries/qm-modal/

[174] W.M. Dickson, *Chances and non-locality*, Cambridge University Press (1998) ; voir en particulier § 6.2 ; "Tim Maudlin : Quantum Non-Locality and Relativity, Metaphysical Intimations of Modern Physics review", *Philosophy of Science* **64**, 516–517 (1997).

[175] T. Maudlin, *Quantum non-locality and relativity*, Wiley-Blackwell (2011).

[176] A.J. Leggett and A. Garg, "Quantum mechanics versus macroscopic realism : is the flux there when nobody looks ?", *Phys. Rev. Lett.* **54**, 857–860 (1985).

[177] A.J. Leggett, "The current status of quantum mechanics at the macroscopic level", *Proceedings 2nd Int. Symp. Foundations of quantum mechanics*, Tokyo, 287–297 (1986).

[178] C. Emary, N. Lambert and F. Nori, "Leggett-Garg inequalities", *Rep. Progr. Phys.* **77**, 016001 (2014).

[179] G.C. Knee, S. Simmons, E.M. Gauger, J.J.L. Morton, H. Riemann, N.V. Abrosimov, P. Becker, H-J. Pohl, K.M. Itoh, M.W. Thewalt, G.A.D. Briggs and S.C. Benjamin, "Violation of a Leggett-Garg inequality with ideal non-invasive measurements", *Nature Comm.* **3**, 606 (2012).

[180] C. Robens, W. Alt, D. Meschede, C. Emary and A. Alberti, "Ideal negative measurements in quantum walks disprove theories based on classical trajectories", *Phys. Rev. X* **5**, 011003 (2015).

[181] P. Grangier, M.J. Potasek and B. Yurke, "Probing the phase coherence of parametrically generated photon pairs : a new test of Bell's inequalities", *Phys. Rev.* **A 38**, 3132–3135 (1988).

[182] J.D. Franson, "Bell inequality for position and time", *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2205–2208 (1989).

[183] J.G. Rarity and P.R. Tapster, "Experimental violation of Bell's inequality based on phase and momentum", *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2495–2498 (1990).

[184] J. Brendel, E. Mohler and W. Martienssen, "Experimental test of Bell's inequality for energy and time", *Eur. Phys. Lett.* **20**, 575–580 (1992).

[185] V. Capasso, D. Fortunato and F. Selleri, "Sensitive observables of quantum mechanics", *Int. J. Theor. Phys.* **7**, 319–326 (1973).

[186] N. Gisin, "Bell's inequality holds for all non-product states", *Phys. Lett.* **A154**, 201–202 (1991).

[187] N. Gisin and A. Peres, "Maximal violation of Bell's inequality for arbitrarily large spin", *Phys. Lett.* **A 162**, 15–17 (1992).

[188] S. Popescu and D. Rohrlich, "Generic quantum non locality", *Phys. Lett.* **A166**, 293–297 (1992).

[189] S.L. Braunstein, A. Mann and M. Revzen, "Maximal violation of Bell inequalities for mixed states", *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3259–3261 (1992).

[190] R.F. Werner, "Quantum states with Einstein–Podolsky–Rosen correlations admitting a hidden variable model", *Phys. Rev.* **A 40**, 4277–4281 (1989).

[191] S. Popescu, "Bell's inequalities and density matrices : revealing 'hidden' nonlocality", *Phys. Rev. Lett.* **74**, 2619–2622 (1995).

[192] A. Peres, "Collective tests for quantum nonlocality", *Phys. Rev.* **A 54**, 2685–2689 (1996).

[193] B. Yurke and D. Stoler, "Bell's-inequality experiments using independent-particle sources", *Phys. Rev.* **A 46**, 2229–2234 (1992).

[194] F. Laloë and W.J. Mullin, "Interferometry with independent Bose–Einstein condensates : parity as an EPR/Bell quantum variable", *Eur. Phys. J.* **B 70**, 377–396 (2009).

[195] S.M. Tan, D.F. Walls and M.J. Collett, "Nonlocality of a single photon", *Phys. Rev. Lett.* **66**, 252–255 (1991).

[196] L. Hardy, "Nonlocality of a single photon revisited", *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2279–2283 (1994).

[197] L. Heaney, A. Cabello, M.F. Santos and V. Vedral, "Extreme nonlocality with one photon", arXiv:0911.0770v3 [quant-ph] (2009); *New J. Phys.* **13**, 053054 (2011).

[198] B.F. Toner and D. Bacon, "Communication cost of simulating Bell correlations", *Phys. Rev. Lett.* **91**, 187904 (2003).

[199] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani and S. Wehner, "Bell nonlocality", *Rev. Mod. Phys.* **86**, 419-478 (2014).

[200] J.A. Larsson, "Loopholes in Bell inequality tests of local realism", *J. Phys. A* **47**, 424003, 1-33 (2014).

[201] J. Kofler, M. Giustina, J-A. Larsson and M.W. Mitchell, "Requirements for a loophole-free photonic Bell test using imperfect setting generators", *Phys. Rev.* **A 93**, 032115 (2016).

[202] P. Pearle, "Hidden-variable example based upon data rejection", *Phys. Rev.* **D 2**, 1418–1425 (1970).

[203] J.S. Bell, Présentation orale à la conférence EGAS à Paris, juillet 1979 (publiée en version abrégée dans la référence suivante).

[204] J.S. Bell, "Atomic cascade photons and quantum mechanical nonlocality", *Comments on Atomic and Molecular Physics* **9**, 121 (1980) ; CERN preprint TH.2053 et TH 2252 ; Chapitre 13 de [6].

[205] A.O. Barut and P. Meystre, "A classical model of EPR experiment with quantum mechanical correlations and Bell inequalities", *Phys. Lett.* **105A**, 458-462 (1984).

[206] N. Gisin, "Hidden quantum nonlocality revealed by local filters", *Phys. Lett.* **A 210**, 151–156 (1996) ; voir en particulier le § 3.

[207] D.S. Tasca, S.P. Walborn, F. Toscano and P.H. Souto Ribeiro, "Observation of tunable Popescu–Rohrlich correlations through postselection of a Gaussian state", *Phys. Rev.* **A 80**, 030101 (2009).

[208] I. Gerhardt, Q. Liu, A. Lamas-Linares, J. Skaar, V. Scarani, V. Makarov and C. Kurtsiefer, "Experimentally faking the violation of Bell's inequalities", *Phys. Rev. Lett.* **107**, 170404 (2011).

[209] G. Weihs, T. Jennewein, C. Simon, H. Weinfurter and A. Zeilinger, "Violation of Bell's inequality under strict Einstein locality conditions", *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5039–5043 (1998).

[210] G. 't Hooft, *The cellular automaton interpretation of quantum mechanics*, Springer (2016).

[211] C.H. Brans, "Bell's theorem does not eliminate fully causal hidden variables", *Int. J. Theor. Phys.* **27**, 219–226 (1988).

[212] J.S. Bell, "Free variables and local causality", *Epistemological Lett.*, Feb. 1977 ; Chapitre 12 de [6].

[213] C. Abellán, W. Amaya, D. Mitrani, V. Pruneri and M.W. Mitchell, "Generation of fresh and pure random numbers for loophole-free Bell tests", *Phys. Rev. Lett.* **115**, 250403 (2015).

[214] M.J.W. Hall, "Local deterministic model of singlet state correlations based on relaxing measurement independence", *Phys. Rev. Lett.* **105**, 250404 (2010).

[215] P.H. Eberhard, "Background level and counter efficiencies required for a loophole-free Einstein–Podolsky–Rosen experiment", *Phys. Rev.* **A 47**, R747-R750 (1993).

[216] P.G. Kwiat, P.H. Eberhard, A.M. Steinberg and R.Y. Chiao, "Proposal for a loophole-free Bell inequality experiment", *Phys. Rev.* **A 49**, 3209–3220 (1994).

[217] E.S. Fry, T. Walther and S. Li, "Proposal for a loophole-free test of the Bell inequalities", *Phys. Rev.* **A 52**, 4381–4395 (1995).

[218] R. Garcia-Patron, J. Fiurasek, N.J. Cerf, J. Wenger, R. Tualle-Brouri and P. Grangier, "Proposal for a loophole-free Bell test using homodyne detection", *Phys. Rev. Lett* **93**, 130409 (2004).

[219] J. Wenger, M. Hafezi, F. Grosshans, R. Tualle-Brouri and P. Grangier, "Maximal violation of Bell inequalities using continuous-variable measurements", *Phys. Rev.* **A 67**, 012105 (2003).

[220] M.A. Rowe, D. Kielpinski, V. Meyer, C.A. Sackett, W.M. Itano, C. Monroe and D.J. Wineland, "Experimental violation of a Bell's inequality with efficient detection", *Nature* **409**, 791–794 (2001).

[221] C. Simon and W.T.M. Irvine, "Robust long-distance entanglement and a loophole-free Bell test with ions and photons", *Phys. Rev. Lett.* **91**, 110405 (2003).

[222] D.N. Matsukevich, T. Chanelière, S.D. Jenkins, S.Y. Lan, T.A.B. Kennedy and A. Kuzmich, "Entanglement of remote atomic qubits", *Phys. Rev. Lett.* **96**, 030405 (2006).

[223] D.N. Matsukevich, P. Maunz, D.L. Moehring, S. Olmschenk and C. Monroe, "Bell inequality violation with two remote atomic qubits", *Phys. Rev. Lett.* **100**, 150404 (2008).

[224] M. Ansmann, H. Wang, R.C. Bialczak, M. Hofheinz, E. Lucero, M. Neeley, A.D. O'Connell, D. Sank, M. Weides, J. Wenner, A.N. Cleland and J.M. Martinis, "Violation of Bell's inequality in Josephson phase qubits", *Nature* **461**, 504–506 (2009).

[225] S.D. Barrett and P. Kok, "Efficient high-fidelity quantum computation using matter qubits and linear optics", *Phys. Rev. A* **71**, 060310 (2005).

[226] W. Rosenfeld, D. Burchardt, R. Garthoff, K. Redeker, N. Ortegel, M. Rau and H. Weinfurter, "Event-ready Bell test using entangled atoms simultaneously closing detection and locality loopholes", arXiv:1611.04604v1 [quant-ph] (2016).

[227] S. Popescu and D. Rohrlich, "Quantum nonlocality as an axiom", *Found. Phys.* **24**, 379–85 (1994).

[228] H.P. Stapp, "Whiteheadian approach to quantum theory and the generalized Bell's theorem", *Found. Phys.* **9**, 1–25 (1979) ; "Bell's theorem and the foundations of quantum physics", *Am. J. Phys.* **53,** 306–317 (1985).

[229] H.P. Stapp, "Nonlocal character of quantum theory", *Am. J. Phys.* **65**, 300–304 (1997).

[230] N.D. Mermin, "Nonlocal character of quantum theory ?", *Am. J. Phys.* **66**, 920–924 (1998).

[231] M. Redhead, *Incompleteness, Nonlocality and Realism : A Prolegomenon to the Philosophy of Quantum Mechanics*, Chapitre 4, Clarendon Press (1988).

[232] A.J. Leggett, "Realims and the physical world", *Rep. Progr. Phys.* **71**, 022001 (2008).

[233] H.P. Stapp, "Meaning of counterfactual statements in quantum physics", *Am. J. Phys.* **66**, 924–926 (1998).

[234] B. d'Espagnat, "Nonseparability and the tentative descriptions of reality", *Phys. Rep.* **110**, 201–264 (1984).

[235] B. d'Espagnat, *Reality and the Physicist*, Cambridge University Press (1989).

[236] R.B. Griffiths, "Consistent quantum counterfactuals", *Phys. Rev.* **A 60**, R5–R8 (1999).

[237] N.D. Mermin, "Bringing home the atomic world : quantum mysteries for anybody", *Am. J. Phys.* **49**, 940–943 (1981).

[238] B. Christensen, K. McCusker, J. Altepeter, B. Calkins, T. Gerrits, A. Lita, A. Miller, L. Shalm, Y. Zhang, S. Nam, N. Brunner, C. Lim, N. Gisin and P. Kwiat, "Detection-loophole-free test of quantum nonlocality, and applications", *Phys. Rev. Lett.* **111**, 130406 (2013).

[239] M. Giustina, A. Mech, S. Ramelow, B. Wittmann, J. Kofler, J. Beyer, A. Lita, B. Calkins, T. Gerrits, S. Woo Nam, R. Ursin and A. Zeilinger, "Bell violation using entangled photons without the fair-sampling assumption", *Nature* **497**, 227–230 (2013).

[240] B.S. Cirelson, "Quantum generalizations of Bell's inequality" *Lett. Math. Phys.* **4**, 93–100 (1980).

[241] L.J. Landau, "On the violations of Bell's inequality in quantum theory", *Phys. Lett.* **A 120**, 54–56 (1987).

[242] A. Shimony, *Search for a naturalistic world view*, vol. II, p. 131, Cambridge Universtity Press (1993).

[243] A. Shimony, "Events and processes in the quantum world", in *Quantum Concepts in Space and Time*, edited by R. Penrose and C.J. Isham, Oxford University Press (1986), pp. 182–203.

[244] J. Barrett, N. Linden, S. Massar, S. Pironio, S. Popescu and D. Roberts, "Nonlocal correlations as an information-theoretic resource", *Phys. Rev.* **A 71**, 022101 (2005).

[245] L. Masanes, A. Acin and N. Gisin, "General properties of nonsignaling theories", *Phys. Rev.* **A 73**, 012112 (2006).

[246] G. Brassard, H. Buhrman, N. Linden, A.A. Méthot, A. Tapp and F. Unger, "Limit on nonlocality in any world in which communication complexity is not trivial", *Phys. Rev. Lett.* **96**, 250401 (2006).

[247] M. Pawlowski, T. Paterek, D. Kaszlikowski, V. Scarani, A. Winter and D. Rohrlich, "Information causality as a physical principle", *Nature* **461**, 1101–1104 (2009).

[248] H. Barnum, S. Beigi, S. Boixo, M.B Elliott and S. Wehner, "Local quantum measurements and no-signaling imply quantum correlations", *Phys. Rev. Lett.* **104**, 140401 (2010).

[249] M.L. Almeida, J.-D. Bancal, N. Brunner, A. Acin, N. Gisin and S. Pironio, "Guess your neighbor's input : a multipartite nonlocal game with no quantum advantage", *Phys. Rev. Lett.* **104**, 230404 (2010).

[250] D.M. Greenberger, M.A. Horne and A. Zeilinger, "Going beyond Bell's theorem", in *Bell's Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe*, M. Kafatos ed., Kluwer (1989), pp. 69–72 ; cette référence n'est pas toujours facile à obtenir, mais on peut également consulter l'article qui suit, publié l'année suivante.

[251] D.M. Greenberger, M.A. Horne, A. Shimony and A. Zeilinger, "Bell's theorem without inequalities", *Am. J. Phys.* **58**, 1131–1143 (1990).

[252] N.D. Mermin, "Quantum mysteries revisited", *Am. J. Phys.* **58**, 731–733 (1990) ; voir égalmement "What's wrong with these elements of reality ?", *Physics Today*, 9-11 (juin 1990).

[253] D. Bouwmeester, J.W. Pan, M. Daniell, H. Weinfurter and A. Zeilinger, "Observation of three-photon Greenberger–Horne–Zeilinger entanglement", *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1345–1349 (1999).

[254] J.W. Pan, D. Bouwmeester, M. Daniell, H. Weinfurter and A. Zeilinger, "Experimental test of quantum nonlocality in three-photon Greenberger–Horne–Zeilinger entanglement", *Nature* **403**, 515–519 (2000).

[255] Z. Zhao, T. Yang, Y.-A Chen, A.-N. Zhang, M. Zukowski and J.W. Pan, "Experimental violation of local realism by four-photon Greenberger–Horne–Zeilinger entanglement", *Phys. Rev. Lett.* **91**, 180401 (2003).

[256] R. Laflamme, E. Knill, W.H. Zurek, P. Catasi and S.V.S Mariappan, "NMR GHZ", arXiv:quant-phys/9709025 (1997) et *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **A 356**, 1941–1948 (1998).

[257] S. Lloyd, "Microscopic analogs of the Greenberger–Horne–Zeilinger experiment", *Phys. Rev.* **A 57**, R1473–1476 (1998).

[258] U. Sakaguchi, H. Ozawa, C. Amano and T. Fokumi, "Microscopic analogs of the Greenberger–Horne–Zeilinger experiment on an NMR quantum computer", *Phys. Rev.* **60**, 1906–1911 (1999).

[259] N.D. Mermin, "Extreme quantum entanglement in a superposition of macroscopically distinct states", *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1838–1841 (1990).

[260] G. Svetlichny, "Distinguishing three-body from two-body nonseparability by a Bell-type inequality", *Phys. Rev.* **D 35**, 3066–3069 (1987).

[261] J. Acacio de Barros and P. Suppes, "Inequalities for dealing with detector efficiencies in Greenberger–Horne–Zeilinger experiments", *Phys. Rev. Lett.* **84**, 793–797 (2000).

[262] J. Lavoie, R. Kaltenbaek and K.J. Resch, "Experimental violations of Svetlichny's inequality", *New. J. Physics* **11**, 073051 (2009).

[263] C. Erven, E. Meyer-Scott, K. Fisher, J. Lavoie, B.L. Higgins, Z. Yan, C.J. Pugh, J-P. Bourgoin, R. Prevedel, L.K. Shalm, L. Richards, N. Gigov, R. Laflamme, G. Weihs, T. Jennenwein and K.J. Resch, "Experimental three-photon quantum nonlocality under strict locality conditions", *Nature Photonics*, **8** 292-296 (2013).

[264] B. Yurke and D. Stoler, "Einstein–Podolsky–Rosen effects from independent particle sources", *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1251–1254 (1992).

[265] S. Massar and S. Pironio, "Greenberger–Horne–Zeilinger paradox for continuous variables", *Phys. Rev.* **A 64**, 062108 (2001).

[266] H. J. Bernstein, D.M. Greenberger, M.A. Horne and A. Zeilinger, "Bell theorem without inequalities for two spinless particles", *Phys. Rev.* **A 47**, 78–84 (1993).

[267] F. Laloë, "Correlating more than two particles in quantum mechanics", *Current Science* **68**, 1026–1035 (1995) ; http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00001443.

[268] D.J. Wineland, J.J. Bollinger, W.M. Itano, F.L. Moore and D.J. Heinzen, "Spin squeezing and reduced quantum noise in spectroscopy", *Phys. Rev.* **A 46**, R6797–6800 (1992).

[269] J.J. Bollinger, W.M. Itano, D.J. Wineland and D.J. Heinzen, "Optimal frequency measurements with maximally correlated states", *Phys. Rev.* **A 54**, R4649–4652 (1996).

[270] J.A. Dunningham, K. Burnett and S.M. Barnett, "Interferometry below the standard limit with Bose-Einstein condensates lithography", *Phys. Rev. Lett.* **89**, 150401 (2002).

[271] A.N. Boto, P. Kok, D.S. Abrams, S.L. Braunstein, C.P. Williams and J.P. Dowling, "Quantum interferometric optical lithography : exploiting entanglement to beat the diffraction limit", *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2733–2736 (2000).

[272] G. Björk, L.L. Sanchez-Soto and J. Söderholm, "Entangled state lithography : tailoring any pattern with a single state", *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4516–4519 (2001).

[273] M. d'Angelo, M.V. Chekhova and Y. Shih, "Two-photon diffraction and quantum lithography", *Phys. Rev. Lett.* **87**, 013602 (2001).

[274] A. Zeilinger, M.A. Horne, H. Weinfurter and M. Zukowski, "Three-particle entanglements from two entangled pairs", *Phys. Rev. Lett.* **78**, 3031–3034 (1997).

[275] K. Mølmer and A. Sorensen, "Multiparticle entanglement of hot trapped ions", *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1835–1838 (1999).

[276] C.A. Sackett, D. Klepinski, B.E. King, C. Langer, V. Meyer, C.J. Myatt, M. Rowe, O.A. Turchette, W.M. Itano, D.J Wineland and C. Monroe, "Experimental entanglement of four particles", *Nature* **404**, 256–259 (2000).

[277] A. Cabello, "Violating Bell's inequalities beyond Cirelson's bound", *Phys. Rev. Lett.* **88**, 060403 (2002).

[278] S. Marcovitch, B. Reznik and L. Vaidman, "Quantum mechanical realization of a Popescu–Rohrlich box", *Phys. Rev.* **A 75**, 022102 (2007).

[279] N.D. Mermin, "What's wrong with this temptation ?", *Phys. Today* **47**, June 1994, pp. 9–11 ; "Quantum mysteries refined", *Am. J. Phys.* **62**, 880–887 (1994).

[280] D. Boschi, S. Branca, F. De Martini and L. Hardy, "Ladder proof of nonlocality without inequalities : theoretical and experimental results", *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2755–2758 (1997).

[281] S. Goldstein, "Nonlocality without inequalities for almost all entangled states for two particles", *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1951–1954 (1994).

[282] G. Ghirardi and L. Marinatto, "Proofs of nonlocality without inequalities revisited", *Phys. Lett.* **A 372**, 1982–1985 (2008).

[283] S. Kochen and E.P. Specker, "The problem of hidden variables in quantum mechanics", *J. Math. Mech.* **17**, 59–87 (1967).

[284] F. Belifante, *Survey of Hidden Variables Theories*, Pergamon Press (1973).

[285] A. Cabello, J.M. Estebaranz and G. Garcia-Alcaine, "Bell–Kochen–Specker theorem : a proof with 18 vectors", *Phys. Lett.* **A 212**, 183–187 (1996).

[286] A.A. Klyachko, M.A. Can, S. Binicioglu and A.S. Shumovsky, "Simple tests for hiddden variables in spin-1 systems", *Phys. Rev. Lett.* **101**, 020403 (2008).

[287] A. Peres, "Incompatible results of quantum measurements", *Phys. Lett.* **A 151**, 107–108 (1990).

[288] N.D. Mermin, "Simple unified form for the major no-hidden-variables theorems", *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3373 (1990).

[289] A. Cabello, "Experimentally testable state-independent quantum contextuality", *Phys. Rev. Lett.* **101**, 210401 (2008).

[290] A. Cabello and G. Garcia-Alcaine, "Proposed experimental tests of the Bell–Kochen–Specker theorem", *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1797–1799 (1998).

[291] C. Simon, M. Zukowski, H. Weinfurter and A. Zeilinger, "Feasible Kochen–Specker experiment with single particles", *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1783–1786 (2000).

[292] Y.-F. Huang, C.-F. Li, Y.-S. Zhang, J.-W. Pan and G.-C. Guo, "Experimental test of the Kochen–Specker theorem with single photons", *Phys. Rev. Lett.* **90**, 250401 (2003).

[293] R. Lapkiewicz, P. Li, C. Schaeff, N.K. Langford, S. Ramelow, M. Wieskiak and A. Zeilinger, "Experimental non-classicality of an indivisible quantum system", *Nature* **474**, 490–493 (2011).

[294] Y. Hasegawa, R. Loidl, G. Badurek, M. Baron and H. Rauch, "Quantum contextuality in a single-neutron optical experiment", *Phys. Rev. Lett.* **97**, 230401 (2006).

[295] G. Kirchmair, F. Zähringer, R. Gerritsma, M. Kleinmann, O. Gühne, A. Cabello, R. Blatt and C.F. Roos, "State-independent experimental test of quantum contextuality", *Nature* **460**, 494–497 (2009).

[296] O. Moussa, C.A. Ryan, D.G. Gory and R. Laflamme, "Testing contextuality on quantum ensembles with one clean qubit", *Phys. Rev. Lett.* **104**, 160501 (2010).

[297] P. Grangier, "Contextual objectivity : a realistic interpretation of quantum mechanics", *Eur. J. Phys.* **23**, 331–337 (2002) ; or arXiv:quant-ph/0012122 (2000); quant-ph/0111154 (2001), quant-ph/0301001 (2003) et quant-ph/0407025 (2004).

[298] N. Harrigan and R.W. Spekkens, "Einstein, incompleteness, and the epistemic view of quantum states", *Found. Phys.* **40**, 125-157 (2010).

[299] M.S. Leifer, "Is the quantum state real ? An extended review of $\psi$-ontology theorems", *Quanta* **3**, 67-155 (2014) ; arXiv:1409.1570 [quant-ph]; voir également: http://mattleifer.info/2011/11/20/can-the-quantum-state-be-interpreted-statistically.

[300] Y. Aharonov, J. Anandan and L. Vaidman, "Meaning of the wave function", *Phys. Rev.* **A 47**, 4616–4626 (1993).

[301] W.G. Unruh, "Reality and measurement of the wave function", *Phys. Rev.* **A 50**, 882–887 (1993).

[302] M.F. Pusey, J. Barrett and T. Rudolph, "On the reality of the quantum state", *Nature Physics* **8**, 475-478 (2012) ; "The quantum state cannot be interpreted statistically", arXiv:1111.3328 [quant-phys] (2011).

[303] R. Colbeck and R. Renner, "Is a system's wave function in one-to-one correspondence with its elements of reality ?", *Phys. Rev. Lett.* **108**, 150402 (2012) ; arXiv:1111.6597 [quant-ph] (2011).

[304] M. Schlosshauer and A. Fine, "Implications of the Pusey-Barrett-Rudolph non-go theorem", *Phys. Rev. Lett.* **108**, 260404 (2012).

[305] P.G. Lewis, D. Jennings, J. Barrett and T. Rudolph, "Distinct quantum states can be compatible with a single state of reality", *Phys. Rev. Lett.* **109**, 150404 (2012).

[306] L. Hardy, "Are quantum states real ?", *Int. J. Mod. Phys.* **27**, 1345012 (2013) ; arXiv:1205.1439 [quant-phys] (2012) .

[307] J. Barrett, E.G. Cavalcanti, R. Lal and O.J.E. Maroney, "No $\psi$-epistemic model can fully explain the indistinguishability of quantum states", *Phys. Rev. Lett.* **112**, 250403 (2014).

[308] C. Branciard, "How $\psi$-epistemic models fail at explaining the indistinguishability of quantum states", *Phys. Rev. Lett.* **113**, 020409 (2014).

[309] R. Colbeck and R. Renner, "A system's wave function is uniquely determined by its underlying physical state", *New J. Phys.* **19**, 013016 (2017).

[310] D. Nigg, T. Monz, P. Schindler, E.A. Martinez, M. Hennrich, R. Blatt, M.F. Pusey, T. Rudolph and J. Barrett, "Can different quantum state vectors correspond to the same physical state ? An experimental test", *New J. Phys.* **18**, 013007 (2016).

[311] M. Ringbauer, B. Duffus, C. Branciard, E.G. Calvacanti, A.G. White and A. Fedrizzi, "Measurement of the reality of the wave function", *Nature Physics* **11**, 249-254 (2015).

[312] K.Y. Liao, X.D. Zhang, G.Z. Guo, B.Q. Ai, H. Yan and S.L. Zhu, "Experimental test of the non-go theorem for continuous $\psi$-epistemic models", *Nature, scientific reports* **6**, 26519 (2016).

[313] E. Schrödinger, "Discussion of probability relations between separated systems", *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **31**, 555 (1935) ; "Probability relations between separated systems", *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **32**, 446 (1936).

[314] http ://en.wikiquote.org/wiki/Werner_Heisenberg.

[315] M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki, "Limits for entanglement measures", *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2014–2017 (2000).

[316] M. B. Plenio and S. Virmani, "An introduction to entanglement measures", quant-ph/0504163 (2006) ; *Quant. Info. Comput.* **7**, 1–51 (2007).

[317] A. Méthot and V. Scarani, "An anomaly of non-locality", quant-ph/0601210 (2006) ; *Quant. Info. Comput.* **7**, 157–170 (2007).

[318] V. Coffman, J. Kundu and W.K. Wootters, "Distributed entanglement", *Phys. Rev.* **A 61**, 052306 (2000).

[319] T.J. Osborne and F. Verstraete, "General monogamy inequality for bipartite qubit entanglement", *Phys. Rev. Lett.* **96**, 220503 (2006).

[320] B. Toner, "Monogamy of non-local quantum correlations", *Proc. Roy. Soc.* **A 465**, 59–68 (2009).

[321] B. Toner and F. Verstraete, "Monogamy of Bell correlations and Tsirelson's bound", arXiv:quant-ph/0611001 (2006).

[322] A. Peres, "Separability criterion for density matrices", *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1413–1415 (1996).

[323] M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki, "Separability of mixed states : necessary and sufficient conditions", *Phys. Lett.* **A 223**, 1–8 (1996).

[324] E. Hagley, X. Maître, G. Nogues, C. Wunderlich, M. Brune, J.M. Raimond and S. Haroche, "Generation of Einstein–Podolsky–Rosen pairs of atoms", *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1–5 (1997).

[325] Q.A. Turchette, C.S. Wood, B.E. King, C.J. Myatt, D. Leibfried, W.M. Itano, C. Monroe and D.J. Wineland, "Deterministic entanglement of two trapped ions", *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3631–4 (1998).

[326] J.I. Cirac and P. Zoller, "Quantum computations with cold trapped ions", *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4091–4094 (1995).

[327] R. Blatt and D. Wineland, "Entangled states of trapped atomic ions", *Nature* **453**, 1008–1015 (2008).

[328] M. Steffen, M.A. Ansmann, R.C. Bialczak, N. Katz, E. Lucero, R. McDermott, M. Neeley, E.M. Weig, A.N. Cleland and J.M. Martinis, "Measurement of the entanglement of two superconducting qubits via state tomography", *Science* **313**, 1423–1425 (2006).

[329] M. Zukowski, A. Zeilinger, M.A. Horne and A.K. Ekert, "Event-ready-detectors Bell experiment via entanglement swapping", *Phys. Rev. Lett.* **71**, 4287–4290 (1993).

[330] J.W. Pan, D. Bouwmeester, H. Weinfurter and A. Zeilinger, "Experimental entanglement swapping : entangling photons that never interacted", *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3891–3894 (1998).

[331] D. Leibfried, E. Knill, S. Seidelin, J. Britton, R.B. Blakestad, J. Chiaverini, D.B. Hume, W.M. Itano, J.D. Jost, C. Langer, R. Ozeri, R. Reichle and D.J. Wineland, "Creation of a six-atom 'Schrödinger cat' state", *Nature* **438**, 639–642 (2005).

[332] H. Häffner, W. Hänsel, C.F. Roos, J. Benhelm, D. Chek-al-kar, M. Chwalla, T. Körber, U.D. Rapol, M. Riebe, P.O. Schmidt, C. Becher, O. Gühne, W. Dür and R. Blatt, "Scalable multiparticle entanglement of trapped ions", *Nature* **438**, 643–646 (2005).

[333] M. Radmark, M. Zukowski and M. Bourennane, "Experimental tests of fidelity limits in six-photon interferometry and of rotational invariance properties of the photonic six-qubit entanglement singlet state", *Phys. Rev. Lett.* **103**, 150501 (2009).

[334] M. Radmark, M. Wiesniak, M. Zukowski and M. Bourennane, "Experimental filtering of two-, four-, and six-photon singlets from a single parametric down-conversion source", *Phys. Rev.* **A 80**, 040302(R) (2009).

[335] T. Wilk, A. Gaëtan, C. Evellin, J. Wolters Y. Miroshnychenko, P. Grangier and A. Browaeys, "Entanglement of two individual neutral atoms using Rydberg blockade", *Phys. Rev. Lett.* **104**, 010502 (2010).

[336] L. Isenhower, E. Urban, X.L. Zhang, A.T. Gill, T. Henage, T.A. Hohnson, T.G. Walker and M. Saffman, "Demonstration of a neutral atom controlled-NOT quantum gate", *Phys. Rev. Lett.* **104**, 010503 (2010).

[337] W. Chen, J. Hu, Y. Duan, B. Braveman, H. Zhang and V. Vuletić, "Carving complex many-atom entangled states by single photon detection", *Phys. Rev. Lett.* **115**, 250502 (2015).

[338] S. Welte, B. Hacker, S. Daiss, S. Ritter and G. Rempe, "Cavity carving of atomic Bell states", *Phys. Rev. Lett.* **118**, 210503 (2017).

[339] L'usage de ces mots a été suggéré par Roger Balian lors d'une conversation privée.

[340] M. Schlosshauer, "Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics", *Rev. Mod. Phys.* **76**, 1267–1305 (2005).

[341] J.F. Poyatos, J.I. Cirac and P. Zoller, "Quantum reservoir engineering with laser cooled trapped ions", *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4728–4731 (1996).

[342] S. Diehl, A. Micheli, A. Kantian, B. Kraus, H.P. Büchler and P. Zoller, "Quantum states and phases in driven open quantum systems with cold atoms", *Nature Physics* **4**, 878–883 (2008).

[343] B. Kraus, H.P. Büchler, S. Diehl, A. Kantian, A. Micheli and P. Zoller, "Preparation of entangled states by quantum Markov processes", *Phys. Rev.* **A 78**, 042307 (2008).

[344] C. Cohen-Tannoudji and A. Kastler, "Optical pumping", *Progress in Optics* **5**, 3-81 (1966).

[345] W. Happer, "Optical pumping", *Rev. Mod. Phys.* **44**, 169-250 (1966).

[346] A. Carvalho, P. Milman, R de Matos Filho and L. Davidovich, "Decoherence, pointer engineering, and quantum state protection", *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4988-4991 (2001).

[347] F. Verstraete, M. Wolf and I. Cirac, "Quantum computation and quantum state engineering driven by dissipation", *Nature Physics* **5**, 633-636 (2009).

[348] S. Pielawa, L. Davidovich, D. Vitali and G. Morigi, "Engineering atomic quantum reservoirs for photons", *Phys. Rev.* **A 81**, 043802 (2010).

[349] M. Müller, S. Diehl, G. Pupillo and P. Zoller, "Engineered open systems and quantum simulations with atoms and ions", *Advances in atomic, molecular and optical physics* **61**, 1-80 (2012).

[350] J. T. Barreiro, M. Müller, P. Schindler, D. Nigg, T. Monz, M. Chwalla, M. Hennrich, C.F. Roos, P. Zoller and R. Blatt, "An open-system quantum simulator with trapped ions", *Nature* **470**, 486–491 (2011).

[351] R.P. Feynman and F.L. Vernon, "The theory of a general quantum system interacting with a linear dissipative system", *Ann. Phys.* **24**, 181–173 (1963).

[352] A.O. Caldeira and A.J. Leggett, "Influence of dissipation on quantum tunneling in macroscopic systems", *Phys. Rev. Lett.* **46**, 211–214 (1981) ; "Quantum tunneling in a dissipative system", *Annals of Physics* **149**, 374–456 (1983).

[353] A.J. Leggett, S. Chakravarty, A.T. Dorsey, M.P.A. Fisher, A. Garg and W. Zwerger, "Dynamics of the dissipative two state system", *Rev. Mod. Phys.* **59**, 1–86 (1987).

[354] N.V. Prokof'ev and P.C.E. Stamp, "Theory of the spin bath", *Rep. Prog. Phys.* **63**, 669-726 (2000).

[355] P.C.E. Stamp, "The decoherence puzzle", *Studies Hist. Phil. Mod. Phys.* **37**, 467-497 (2006).

[356] A. Hagar, "Decoherence : the view from the history and philosophy of science", *Philo. Trans. Royal Soc.* **A 270**, 4594-4609 (2012).

[357] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J.M. Raimond and S. Haroche, "Observing the progressive decoherence of the 'meter' in a quantum measurement", *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4887–4890 (1996).

[358] C.H. van der Wal, A.C.J. ter Haar, F.K. Wilhelm, R.N. Schouten, C.J.P.M. Harmans, T.P Orlando, S. Lloyd and J.E. Mooij, "Quantum superposition of macroscopic persistent-current states", *Science* **290**, 773-777 (2000).

[359] I. Chiorescu, Y. Nakamura, C.J.P. M. Harmans and J.E. Mooij, "Coherent quantum dynamics of a superconducting flux qubit", *Science* **299**, 1869-1871 (2003).

[360] S. Takahashi, I.S. Tupitsyn, J. van Tol, C.C. Beedle, D.N. Hendrickson and P.C.E. Stamp, "Decoherence in crystals of quantum molecular magnets", *Nature* **476**, 76-79 (2011).

[361] C.H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu, B. Schumacher, J.A. Smolin and W.K. Wootters, "Purification of noisy entanglement and faithful teleportation via noisy channels", *Phys. Rev. Lett.* **76**, 722–725 (1996).

[362] C.H. Bennett, H. Bernstein, S. Popescu and B. Schumacher, "Concentrating partial entanglement by local operations", *Phys. Rev.* **A 53**, 2046–2052 (1996).

[363] C.H. Bennett, D.P. DiVincenzo, J.A. Smolin and W.K. Wootters, "Mixed-state entanglement and quantum error correction", *Phys. Rev.* **A 54**, 3824–3851 (1996).

[364] J.W. Pan, C. Simon, C. Brukner and A. Zeilinger, "Entanglement purification for quantum communication", *Nature* **410**, 1067–1070 (2001).

[365] S. Haroche and J.-M. Raimond, *Exploring the Quantum ; Atoms, Cavities and Photons*, Oxford University Press (2008).

[366] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc and G. Gryndberg, *Atom–Photon Interactions*, Wiley (1992).

[367] W.K. Wootters and W.H. Zurek, "A single quantum cannot be cloned", *Nature* **299**, 802–803 (1982).

[368] D. Dieks, "Communication by EPR devices", *Phys. Lett.* **A 92**, 271–272 (1982).

[369] D.T. Smithey, M. Beck, M.G. Raymer and A. Faridani, "Measurement of the Wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography : application to squeezed states and the vacuum", *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1244–1247 (1993).

[370] D.T. Smithey, M. Beck, J. Cooper and M.G. Raymer, "Measurement of number-phase uncertainty relations of optical fields", *Phys. Rev.* **A 48**, 3159–3167 (1993).

[371] U. Leonhardt, *Measuring the Quantum State of Light*, Cambridge University Press (1997).

[372] Y. Aharonov and D. Rohrlich, *Quantum Paradoxes ; Quantum Theory for the Perplexed*, Wiley-VCH (2005).

[373] Y. Aharonov, D.Z. Albert and L. Vaidman, "How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100", *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1351–1354 (1988).

[374] Y. Aharonov, S. Popescu and J. Tollaksen, "A time-symmetric formulation of quantum mechanics", *Physics Today* (November 2010), 27–32.

[375] J.S. Lundeen, B. Sutherland, A. Patel, C. Stewart and C. Bamber, "Direct measurement of the quantum wavefunction", *Nature* **474**, 188–191 (2011).

[376] A.E. Allahverdyan, R. Balian and Th. M. Nieuwenhuizen, "Determining a quantum state by means of a single apparatus", *Phys. Rev. Lett.* **92**, 120402 (2004).

[377] A. Peres, "How the no-cloning theorem got its name", *Fortschritte der Phys.* **51**, 458–461 (2003).

[378] N. Gisin and S. Massar, "Optimal quantum cloning machines", *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2153–2156 (1997).

[379] C.H. Bennett and G. Brassard, "Quantum cryptography : public key distribution and coin tossing", in Proceedings of the IEEE International Conference on Computers Systems and Signal Processing, Bangalore India (1984), pp. 175–179.

[380] A.K. Ekert, "Quantum cryptography based on Bell's theorem", *Phys. Rev. Lett.* **67**, 661–663 (1991).

[381] C.H. Bennett, G. Brassard and N.D. Mermin, "Quantum cryptography without Bell's theorem", *Phys. Rev. Lett.* **68**, 557–559 (1992).

[382] C.H. Bennett, G. Brassard and A.K. Ekert, "Quantum cryptography", *Scientific American* **267**, 50–57 (October 1992).

[383] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel and H. Zbinden, "Quantum cryptography", *Rev. Mod. Phys.* **74**, 145–195 (2002).

[384] C.H. Bennett, "Quantum cryptography using any two nonorthogonal states", *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3121–3124 (1992).

[385] P. Townsend, J.G. Rarity and P.R. Tapster, "Single photon interference in a 10 km-long optical fiber interferometer", *Electron. Lett.* **29**, 634–635 (1993).

[386] C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres and W.L. Wootters, "Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein–Podolsky–Rosen channels", *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895–1898 (1993).

[387] D. Bouwmeester, J.W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter and A. Zeilinger, "Experimental quantum teleportation", *Nature* **390**, 575–579 (1997).

[388] A. Peres, *Quantum Theory : Concepts and Methods*, Kluwer (1993) ; voir également [118].

[389] M. Le Bellac, *Physique Quantique*, $2^e$ édition, CNRS Editions et EDP Sciences (2007).

[390] S. Massar and S. Popescu, "Optimal extraction of information from finite quantum ensembles", *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1259–1263 (1995).

[391] S. Popescu, "Bell's inequalities versus teleportation : what is nonlocality ?", *Phys. Rev. Lett.* **72**, 797–800 (1994) ; arXiv:quant-ph/9501020 (1995).

[392] T. Sudbury, "The fastest way from A to B", *Nature* **390**, 551–552 (1997).

[393] G.P. Collins, "Quantum teleportation channels opened in Rome and Innsbruck", *Phys. Today* **51**, 18–21 (February 1998).

[394] Y. Xia, J. Song, P.-M. Lu and H-S. Song, "Teleportation of an N-photon Greenberger–Horne-Zeilinger (GHZ) polarization-entangled state using linear elements", *J. Opt. Soc. Am.* **B 27**, A1–A6 (2010).

[395] X.M. Jin, J.G. Ren, B. Yang, Z.H. Yi, F. Zhou, X.F. Xu, S.K. Wang, D. Yang, Y.F. Hu, S. Jiang, T. Yang, H. Yin, K. Chen, C.Z. Peng and J.W. Pan, "Experimental free-space quantum teleportation", *Nature Photonics* **4**, 376–381 (2010).

[396] C.H. Bennett, "Quantum information and computation", *Phys. Today* **48**, 24–30 (October 1995).

[397] D.P. DiVincenzo, "Quantum computation", *Science* **270**, 255–261 (October 1995).

[398] C.H. Bennett and D.P. DiVincenzo, "Quantum information and computation", *Science* **404**, 247–255 (2000).

[399] D. Bouwmeester, A.K. Ekert and A. Zeilinger eds., *The Physics of Quantum Information : Quantum Cryptography, Quantum Teleportation, Quantum Computation*, Springer (2000).

[400] N.D. Mermin, *Quantum Computer Science : An Introduction*, Cambridge University Press (2007).

[401] S.M. Barnett, *Quantum Information*, Oxford University Press (2009).

[402] M.A. Nielsen and I.L Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press (2011).

[403] D. Deutsch, "Quantum theory, the Church–Turing principle and the universal quantum computer", *Proc. Roy. Soc.* **A 400**, 97–117 (1985).

[404] http ://en.wikipedia.org/wiki/History_of_quantum_computing

[405] M. Le Bellac, *Le monde quantique*, EDP Sciences (2010).

[406] P. Shor, *Proceedings of the 55th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science*, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, California (1994), pp. 124–133.

[407] N.D. Mermin, "What has quantum mechanics to do with factoring ?", *Phys. Today* **60**, 8–9 (April 2007) ; "Some curious facts about quantum factoring", *Phys. Today* **60**, 10–11 (October 2007).

[408] L.K. Grover, "A fast quantum mechanical algorithm for database search", Proceedings, 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (May 1996), p. 212 ; "From Schrödinger's equation to quantum search algorithm", *Am. J. Phys.* **69**, 769–777 (2001).

[409] D. Deutsch and R. Jozsa, "Rapid solution of problems by quantum computation", *Proceedings of the Royal Society of London A* **439**, 553–558 (1992).

[410] D.S. Abrams and S. Lloyd, "Simulation of many-body Fermi systems on a universal quantum computer", *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2586–2589 (1997).

[411] A.W. Harrow, A. Hassidim and S. Lloyd, "Quantum algorithm for linear systems of equations", *Phys. Rev. Lett.* **103**, 150502 (2009).

[412] L.M.K. Vandersypen, M. Steffen, G. Breyta, C.S. Yannoni, M.H. Sherwood and I.L. Chuang, "Experimental realization of quantum Shor's factoring algorithm using nuclear magnetic resonance", *Nature* **414**, 883–887 (2001).

[413] E. Martin-Lopez, A. Laing, T. Lawson, R. Alvarez, X. Zhou and J.L. O'Brien, "Experimental realisation of Shor's quantum factoring algorithm using qubit recycling", *Nature Photonics* **6**, 773–776 (2012).

[414] N. Xu, J. Zhu, D. Lu, X. Zhou, X. Peng and J. Du, "Quantum factorization of 143 on a dipolar-coupling nuclear magnetic resonance system", *Phys. Rev. Lett.* **108**, 130501 (2012) ; see also *Phys. Rev. Lett.* **109**, 269902 (2012).

[415] S. Haroche and J.M. Raimond, "Quantum computing : dream or nightmare ?", *Phys. Today* **49**, 51–52 (August 1996).

[416] P.W. Shor, "Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory", *Phys. Rev.* **A 52**, R2493–R2496 (1995).

[417] A.M. Steane, "Error correcting codes in quantum theory", *Phys. Rev. Lett.* **77**, 793–796 (1996).

[418] J. Preskill, "Battling decoherence : the fault-tolerant quantum computer", *Phys. Today* **52**, 24–30 (June 1999) ; "Reliable quantum computers", *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A 454**, 385–410 (1998)
ou arXiv:quant-ph/9705031v3.

[419] C.H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu, B. Schumacher, J.A. Smolin and W.K. Wootters, "Purification of noisy entanglement and faithful teleportation via noisy channels", *Phys. Rev. Lett.* **76**, 722–725 (1996).

[420] S.J. Devitt, W.J. Munro and K. Nemoto, "Quantum error correction for beginners", *Rep. Progr. Phys.* **76**, 07001 (35 pages) (2013).

[421] B.M. Terhal, "Quantum error correction for quantum memories", *Rev. Mod. Phys.* **87**, 307–343 (2015).

[422] D. Gottesman, "An Introduction to Quantum Error Correction and Fault-Tolerant Quantum Computation", in "Quantum Information Science and Its Contributions to Mathematics", *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics* **68**, 13-58 (Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2010) ; ou arXiv:0904.2557 [quant-ph].

[423] J. Kempe, "Approaches to quantum error correction", in "Quantum Decoherence", Poincaré seminar 2005, Progress in Mathematical Physics series, 85–123 (2006) ; arXiv:quant-ph/0612185. J. Kempe, O. Regev, F. Unger and R. de Wolf, "Upper bounds on the noise threshold for fault-tolerant quantum computing", arXiv:0802.1464 [quant-ph] (2008).

[424] C.H. Bennett, D.P. DiVincenzo, J.A. Smolin and W.A. Wootters, "Mixed-state entanglement and quantum error correction", *Phys. Rev.* **A 54**, 3824–3851 (1996).

[425] H.J. Briegel, W. Dür, J.I. Cirac and P. Zoller, "Quantum repeaters : the role of imperfect local operations in quantum communication", *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5932–5935 (1998).

[426] R.B. Griffiths and Chi-Sheng Niu, "Semiclassical Fourier transform for quantum computation", *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3228–3231 (1996).

[427] F. Verstraete, M.M. Wolf and J.I. Cirac, "Quantum computation and quantum-state engineering driven by dissipation", *Nature Physics* **5**, 633–636 (2009).

[428] I. Cirac and P. Zoller, "Goals and opportunities in quantum simulation", *Nature Physics* **8**, 264–266 (2012).

[429] I. Buluta and F. Nori, "Quantum simulators", *Science* **326**, 108–111 (2009).

[430] J.D. Biamonte, V. Bergholm, J.D. Whitfield, J. Fitzsimons and A. Aspuru-Guzik, "Adiabatic quantum simulators", *AIP Advances* **1**, 022126 (2011).

[431] I.M. Georgescu, S. Ashab and F. Nori, "Quantum simulation", *Rev. Mod. Phys.* **86**, 153–185 (2014).

[432] P. Hauke, F.M. Cucchiette, L. Tagliacozzo, I. Deutsch and M. Lewenstein, "Can one trust quantum simulators ?", *Rep. Progr. Phys.* **75**, 082401 (2012).

[433] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T.W. Hänsch and I. Bloch, "Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms", *Nature* **415**, 39–44 (2002).

[434] X. Peng, J. Zhang, J. Du and D. Suter, "Quantum simulation of a system with competing two- and three-body interactions", *Phys. Rev. Lett.* **103**, 140501 (2009).

[435] J.Q. You and F. Nori, "Quantum information", *Physics Today* **58**, 42-47 (2005) ; "Atomic physics and quantum optics using superconducting circuits", *Nature* **474**, 589-597 (2011).

[436] B.P. Lanyon, J.D. Whitfield, G.G. Gillett, M.E. Goggin, M.P. Almeida, I. Kassal, J.D. Biamonte, M.Mohseni, B.J. Powell, M. Barbieri, A. Aspuru-Guzik and A.G. White, "Towards quantum chemistry on a quantum computer", *Nature Chemistry* **2**, 106-111 (2010).

[437] J. Dalibard, F. Gerbier, G. Juzeliunas and P. Öhberg, "Artificial gauge potentials for neutral atoms", *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1523–1543 (2011).

[438] P. Grangier, J.A. Levenson and J.P. Poizat, "Quantum non demolition measurements in optics", *Nature* **396**, 537–542 (1998).

[439] H.D. Zeh, "On the interpretation of measurement in quantum theory", *Found. Phys.* **I**, 69–76 (1970).

[440] W.H. Zurek, "Pointer basis of quantum apparatus : into what mixture does the wave packet collapse ?", *Phys. Rev.* **D 24**, 1516–1525 (1981) ; "Environment-induced superselection rules", *Phys. Rev.* **D 26**, 1862–1880 (1982).

[441] W.H. Zurek, "Decoherence, einselection, and the quantum origin of the classical", *Rev. Mod. Phys.* **75**, 715–775 (2003).

[442] K. Hepp, "Quantum theory of measurement and macroscopic observables", *Helv. Phys. Acta* **45**, 237–248 (1972).

[443] J.S. Bell, "On wave packet reduction in the Coleman-Hepp model", *Helv. Phys. Acta* **48**, 93–98 (1975) ; reproduit dans [6].

[444] W.H. Zurek, "Preferred states, predictability, classicality and the environment-induced decoherence", *Progr. Theor. Phys.* **89**, 281–312 (1993) ; pour une version plus concise, voir "Decoherence and the transition from quantum to classical", *Phys. Today* **44**, 36–44 (October 1991).

[445] M. Simonius, "Spontaneous symmetry breaking and blocking of metastable states", *Phys. Rev. Lett.* **40**, 980–983 (1978).

[446] W.H. Zurek, "Environment-assisted invariance, entanglement, and probabilities in quantum physics", *Phys. Rev. Lett.* **90**, 120404 (2003).

[447] F. Hund, "Zur Deutung der Molekelspektren III", *Zeit. Phys.* **43**, 805–826 (1927).

[448] J. Trost and K. Hornberger, "Hund's paradox and the collisional stabilization of chiral molecules", *Phys. Rev. Lett.* **103**, 023202 (2009).

[449] E.P. Wigner, "Die Messung quantenmechanischer Operatoren", *Z. Phys.* **131**, 101-108 (1952).

[450] P. Busch, "Translation of 'Die Messung quantenmechanischer Operatoren' by E.P. Wigner", arXiv:1012.4372v1 [quant-ph] (2010).

[451] H. Araki and M. Yanase, "Measurement of quantum mechanical operators", *Phys. Rev.* **120**, 622-626 (1960).

[452] M. Yanase, "Optimal measuring apparatus", *Phys. Rev.* **123**, 666-668 (1961).

[453] T. Ohira and P. Pearle, "Perfect disturbing measurements", *Am. J. Phys.* **56**, 692-695 (1988).

[454] G.C. Ghirardi, F. Miglietta, A. Rimini and T. Weber, "Determination of the minimal amount of non-ideality and identification of the optimal measuring apparatuses", *Phys. Rev.* **D 24**, 347-352 (1981) ; "Analysis of a model example", Phys. Rev. **D 24**, 353-358 (1981).

[455] M. Burgos, "Contradiction between conservation laws and orthodox quantum mechanics", *J. Modern Phys.* **1**, 137-142 (2010).

[456] L. Loveridge and P. Busch, "Measurement of quantum mechanical operators revisited", *Europ. Phys. J.* **62**, 297-307 (2011).

[457] Y. Aharonov, J. Anandan, S. Popescu and L. Vaidman, "Superpositions of time evolutions of a quantum system and a quantum time-translation machine", *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2965–2968 (1990).

[458] N.W.M. Richtie, J.G. Story and R. G. Hulet, "Realization of a measurement of a weak value", *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1107–1110 (1991).

[459] D.R. Solli, C.F. McCormick, R.Y. Chiao, S. Popescu and J.M. Hickmann, "Fast light, slow light, and phase singularities : a connection to generalized weak values", *Phys. Rev. Lett.* **92**, 043601 (2004).

[460] N. Brunner, V. Scarani, M. Wegmüller, M. Legré and N. Gisin, "Direct measurement of superluminal group velocity and signal velocity in an optical fiber", *Phys. Rev. Lett.* **93**, 203902 (2004).

[461] G.J. Pryde, J.L. O'Brien, A.G. White, T.C. Ralph and H.M. Wiseman, "Measurement of quantum weak values of photon polarization", *Phys. Rev. Lett.* **94**, 220405 (2005).

[462] R. Mir, J.S. Lundeen, M.W. Mitchell, A.M. Steinberg, J.L. Garretson and H.M. Wiseman, "A double slit 'which way' experiment on the complementarity-uncertainty debate", *New. J. Phys.* **9**, 287–297 (2007).

[463] J.S. Lundeen and A.M. Steinberg, "Experimental joint weak measurement on a photon pair as a probe of Hardy's paradox", *Phys. Rev. Lett.* **102**, 020404 (2009).

[464] K. Yokota, T. Yamamoto, M. Koashi and N. Imoto, "Direct observation of Hardy's paradox by joint weak measurement with an entangled photon pair", *New. J. Phys.* **11**, 033011 (2009).

[465] P. Ben Dixon, D.J. Starling, A.N. Jordan and J.C. Howell, "Ultrasensitive beam deflection measurement via interferometric weak value amplification", *Phys. Rev. Lett.* **102**, 173601 (2009). D.J. Starling, P. Ben Dixon, A.N. Jordan and J.C. Howell, "Optimizing the signal-to-noise ratio of a beam-deflection measurement with interferometric weak values", *Phys. Rev.* **A80**, 041803 (2009).

[466] N. Brunner and C. Simon, "Measuring small longitudinal phase shifts : weak measurements or standard interferometry", *Phys. Rev. Lett.* **105**, 010405 (2010).

[467] N.S. Williams and A.N. Jordan, "Weak values and the Leggett-Garg inequality in solid-state qubits", *Phys. Rev. Lett.* **100**, 026804 (2008).

[468] D.T. Gillepsie, "The mathematics of Brownian motion and Johnson noise", *Am. J. Phys.* **64**, 225–240 (1995).

[469] H.P. McKean, *Stochastic Integrals*, AMS Chelsea Publishing, Providence (1969).

[470] N. Gisin, "A simple nonlinear dissipative quantum evolution equation", *J. Phys.* **A 14**, 2259–2267 (1981).

[471] N. Gisin, "Irreversible quantum dynamics and the Hilbert space structure of quantum dynamics", *J. Math. Phys.* **24**, 1779–1782 (1983).

[472] N. Gisin, "Quantum measurements and stochastic processes", *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1657–1660 (1984).

[473] T.A. Brun, "A simple model of quantum trajectories", *Am. J. Phys.* **70**, 719–737 (2002).

[474] K. Jacobs and D.A. Steck, "A straightforward introduction to continuous quantum measurement", *Contemp. Phys.* **47**, 279–303 (2007), arXiv:quant-ph/0611067 (2006).

[475] V.P. Belavkin, "Non-demolition measurement and control in quantum dynamical systems", *Proc. of CISM Seminars on Information Complexity and Control in Quantum Systems*, A. Blaquière, S. Diner and G. Lochak eds., Springer Verlag (1987), pp. 311–329.

[476] N.F. Mott, "The wave mechanics of $\alpha$-ray tracks", *Proc. Royal Soc.* **A 126**, 79–84 (1929) ; reproduit dans "Quantum theory of measurement", J.A. Wheeler and W.H. Zurek eds., Princeton University Press (1983), pp. 129–134.

[477] W. Nagourney, J. Sandberg and H. Dehmelt, "Shelved optical electron amplifier : observation of quantum jumps", *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2797–2799 (1986) ; H. Dehmelt, "Experiments with an isolated subatomic particle at rest", *Rev. Mod. Phys.* **62**, 525–530 (1990).

[478] T. Sauter, W. Neuhauser, R. Blatt and P.E. Toschek, "Observation of quantum jumps", *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1696–1698 (1986).

[479] J.C. Bergquist, R.G. Hulet, W.M. Itano and D.J. Wineland, "Observation of quantum jumps in a single atom", *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1699–1702 (1986).

[480] W.M. Itano, J.C. Bergquist, R.G. Hulet and D.J. Wineland, "Radiative decay rates in $Hg^+$ from observation of quantum jumps in a single ion", *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2732–2735 (1987).

[481] E. Schrödinger, "Are there quantum jumps ?", *British J. Phil. Sci.* **3**, 109–123 and 233–242 (1952).

[482] G. Greenstein and A.G. Zajonc, "Do quantum jumps occcur at well-defined moments of time ?", *Am. J. Phys.* **63**, 743–745 (1995).

[483] C. Cohen-Tannoudji and J. Dalibard, "Single-atom laser spectroscopy looking for dark periods in fluorescence light", *Europhys. Lett.* **1**, 441–448 (1986).

[484] M. Porrati and S. Puttermann, "Wave-function collapse due to null measurements : the origin of intermittent atomic fluorescence", *Phys. Rev.* **A 36**, 929–932 (1987).

[485] S. Peil and G. Gabrielse, "Observing the quantum limit of an electron cyclotron : QND measurements of quantum jumps between Fock states", *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1287–1290 (1999).

[486] D. Hanneke, S. Fogwell and G. Gabrielse, "New measurement of the electron magnetic moment and the fine structure constant", *Phys. Rev. Lett.* **100**, 120801 (2008).

[487] M. Brune, S. Haroche, V. Lefevre, J.M. Raimond and N. Zagury, "Quantum nondemolition measurement of small photon numbers by Rydberg-atom phase-sensitive detection", *Phys. Rev. Lett.* **65**, 976–979 (1990).

[488] S. Gleyzes, S. Kuhr, C. Guerlin, J. Bernu, S. Deleglise, U.B. Hoff, M. Brune, J.-M. Raimond and S. Haroche, "Quantum jumps of light recording the birth and death of a photon in a cavity", *Nature* **446**, 297–300 (2007) ; C. Guerlin, J. Bernu, S. Deleglise, C. Sayrin, S. Gleyzes, S. Kuhr, M. Brune, J.M. Raimond and S. Haroche, "Progressive state collapse and quantum non-demolition photon counting", *Nature* **448**, 889–893 (2007).

[489] J. Javanainen and S.M Yoo, "Quantum phase of a Bose–Einstein condensate with arbitrary number of atoms", *Phys. Rev. Lett.* **76**, 161–164 (1996).

[490] M.R. Andrews, C.G. Townsend, H.J. Miesner, D.S. Durfee, D.M. Kurn and W. Ketterle, "Observation of interference between two Bose condensates", *Science* **275**, 637–641 (1997).

[491] A.J. Leggett and F. Sols, "On the concept of spontaneously broken gauge symmetry in condensed matter physics", *Found. Phys.* **21**, 353–364 (1991).

[492] E.P. Wigner, "Interpretation of quantum mechanics", lectures given in 1976 at Princeton University, later published in *Quantum Theory of Measurement*, J.A. Wheeler and W.H. Zurek eds., Princeton University Press (1983), pp. 260–314 ; voir également la contribution de Wigner dans "Foundations of quantum mechanics", *Proc. Enrico Fermi Int. Summer School*, B. d'Espagnat ed., Academic Press (1971).

[493] N.D. Mermin, "What is quantum mechanics trying to tell us ?", *Am. J. Phys.* **66**, 753–767 (1998).

[494] B. Misra and E.C.G. Sudarshan, "The Zeno's paradox in quantum theory", *J. Math. Phys.* (NY) **18**, 756–763 (1977).

[495] A. Zeilinger, "A foundational principle for quantum mechanics", *Found. Phys.* **29**, 631–643 (1999).

[496] C. Brukner and A. Zeilinger, "Operationally invariant information in quantum measurements", *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3354–3357 (1999).

[497] C.A. Fuchs, "Quantum foundations in the light of quantum information", arXiv:quant-ph/0106166 (2001).

[498] C.A. Fuchs, "Quantum mechanics as quantum information (and only a little more)", arXiv:quant-ph/0205039 (2002).

[499] I. Pitowsky, "Betting on the outcomes of measurements : a Bayesian theory of quantum probability", *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **34**, 395–414 (2003).

[500] G. Auletta, "Quantum information as a general paradigm", *Found. Phys.* **35**, 787–815 (2005).

[501] J. Bub, "Quantum probabilities : an information-theoretic interpretation", in *Probabilities in Physics*, C. Beisbart and S. Hartmann eds., Oxford University Press (2011).

[502] D. Deutsch and P. Hayden, "Information flow in entangled quantum systems", *Proc. Royal Soc.* **A 456**, 1759–1774 (2000).

[503] L.E. Ballentine, "The statistical interpretation of quantum mechanics", *Rev. Mod. Phys.* **42**, 358–381 (1970).

[504] A.J. Leggett, "Probing quantum mechanics towards the everyday world : where do we stand ?", *Physica Scripta* **T102**, 69–73 (2002).

[505] A.E. Allahverdyan, R. Balian and T.M. Nieuwenhuizen, "A subensemble theory of ideal quantum measurement processes", *Annals of Physics* **376**, 324-352 (2017) ; arXiv:1303.7257v4 [quant-ph].

[506] C. Rovelli, "Relational quantum mechanics", *Int. J. Theor. Phys.* **35**, 1637–1678 (1996).

[507] F. Laudisa and C. Rovelli, "Relational quantum mechanics", *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (2008),
http ://plato.stanford.edu/entries/qm-relational/

[508] M. Smerlak and C. Rovelli, "Relational EPR", *Found. Phys.* **37**, 427–445 (2007).

[509] C.M. Caves, C.A. Fuchs and R. Schack, "Subjective probability and quantum certainty", *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.* **38**, 255-274 (2007).

[510] C.A. Fuchs, "QBism, the perimeter of quantum Bayesianism", arXiv:1003.5290v1 [quant-ph] (2010).

[511] R. Healey, "Quantum-Bayesian and pragmatist views of quantum theory", *Stanford Encyclopedia of Physics* (2017)
https ://plato.stanford.edu/entries/quantum-bayesian/

[512] C.A. Fuchs, N.D. Mermin and R. Schack, "An introduction to QBism with an application to the locality in quantum mechanics", arXiv:1311.5253v1 [quant-ph] (2013).

[513] F. Zwicky, "On a new type of reasoning and some of its possible consequences", *Phys. Rev.* **43**, 1031–1033 (1933).

[514] G. Birkhoff and J. von Neumann, "The logic of quantum mechanics", *Ann. Math.* **37**, 823–843 (1936).

[515] M. Strauss, "Grundlagen der modernen Physik", in *Mikrokosmos-Makrokosmos : Philosophish-theoretische Probleme der Naturwissenchaften, Technik und Medizin*, Akademie Verlag, Berlin (1967).

[516] K.R. Popper, "Birkhoff and von Neumann's interpretation of quantum mechanics", *Nature* **219**, 682–685 (1968).

[517] P. Jordan, "Zur Quanten-Logik", *Archiv der Mathematik* **2**, 166–171 (1949).

[518] F. David, *The formalisms of quantum mechanics : an introduction*, Spinger (2015).

[519] R. Hughes, "La logique quantique", *Pour la Science* décembre 1981, 36–49.

[520] P. Mittelstaedt, *Quantum Logic*, Kluwer Academic Publishers (1978).

[521] E.G. Beltrametti and G. Cassinelli, *The Logic of Quantum Mechanics*, Cambridge University Press (1984).

[522] A. Grinbaum, "The significance of information in quantum theory", Ph.D. thesis, Ecole polytechnique (2004), arXiv:quant-ph/0410071 (2004). "Reconstruction of quantum theory", *Brit. J. Phil. Sci* **58**, 387–408 (2007).

[523] C. de Ronde, G. Domenech and H. Freytes, "Quantum logic in historical and philosophical perspective", Internet Encyclopedia of Philosophy, http ://www.iep.utm.edu/qu-logic/

[524] J.S. Bell, "A new approach to quantum logic", *Brit. J. Phil. Sci.* **37** 83–99 (1986).

[525] H. Reichenbach, *Philosophic Foundations of Quantum Mechanics*, University of California Press (1965).

[526] C.F. von Weizsäcker, *Göttingische Gelehrte Anzeigen*, **208**, 117–136 (1954).

[527] R. Haag, *Local quantum physics : Fields, particles, algebras*, Springer (1996).

[528] P. Jordan, J. von Neumann and E. Wigner, "An algebraic generalization of the quantum mechanical formalism", *Ann. Math.* **35**, 29–64 (1934).

[529] I.M. Gelfand and M.A. Naimark, "On the embedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space", *Mat. Sbornik* **12**, 197–213 (1943).

[530] I.E. Segal, "Irreductible representations of operator algebras", *Bull. Amer. Math. Soc.* **61**, 69–105 (1947) ; "Postulates for general quantum mechanics", *Ann. Math.* **48**, 930–948 (1947).

[531] R. Haag and D. Kastler, "An algebraic approach to quantum field theory", *J. Math. Phys.* **7**, 848–861 (1964).

[532] F.J. Murray and J. von Neumann, "On rings of operators", *Ann. Math.* **37**, 116–229 (1936).

[533] A. Connes, "Une classification des facteurs du type III", *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **6**, 133–252 (1973).

[534] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press (1994).

[535] G. Mackey, *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Benjamin, New York and Amsterdam (1963).

[536] C. Piron, "Axiomatique quantique", *Helv. Phys. Acta* **37**, 439–468 (1964).

[537] J.M. Jauch and C. Piron, "On the structure of quantal proposition systems", *Helv. Phys. Acta* **42**, 842–848 (1969).

[538] M.P. Solèr, "Characterization of Hilbert spaces by orthomodular spaces", *Comm. Algebra* **23**, 219–243 (1995).

[539] B. Coecke and E.O. Paquette, "Categories for the practicing physicist", arXiv:0905.3010v2 [quant-ph] ; in *New Structures for Physics*, Springer (2011), pp. 173–286.

[540] B. Coecke, "Quantum picturalism", *Contemp. Phys.* **51**, 59–83 (2010).

[541] H. Barnum and A. Wilce, "Information processing in convex operational theories", *Electronic Notes in Theor. Computer Sci.* **12**, 3–15 (2011).

[542] A. Wilce, "Quantum logic and probability theory", *Stanford encyclopedia of philosophy* (2008), http ://plato.stanford.edu/entries/qt-quantlog/.

[543] A.M. Gleason, "Measures on the closed subspaces of a Hilbert space", *J. Math. and Mech.* **6**, 885–893 (1957).

[544] P. Bush, "Quantum states and generalized observables : a simple proof of Gleason's theorem", *Phys. Rev. Lett.* **91**, 120403 (2003).

[545] A. Auffèves and P. Grangier, "Contexts, systems and modalities : a new ontology for quantum mechanics", *Found. Phys.* **46**, 121–137 (2015) ; "Recovering the quantum formalism from physically realist axioms", arXiv:1610.06164v2.

[546] R. Omnès, "Logical reformulation of quantum mechanics", *J. Stat. Phys.* **53**, "I : Foundations", 893–932 ; "II : Interferences and the EPR experiments", 933–955 ; "III : Classical limit and irreversibility", 957–975 (1988).

[547] M. Gell-Mann and J.B. Hartle, "Classical equations for quantum systems", *Phys. Rev.* **D 47**, 3345–3382 (1993).

[548] R. Omnès *The Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton University Press (1994) ; *Understanding Quantum Mechanics*, Princeton University Press (1999).

[549] R.B. Griffiths and R. Omnès, "Consistent histories and quantum measurements", *Phys. Today* **52**, 26–31 (August 1999).

[550] P.C. Hohenberg, "*Colloquium :* An introduction to consistent quantum theory", *Rev. Mod. Phys.* **82**, 2835–2844 (2010).

[551] Y. Aharonov, P.G. Bergmann and J.L. Lebowitz, "Time symmetry in the quantum process of measurement", *Phys. Rev.* **B 134**, 1410–1416 (1964).

[552] R.B. Griffiths, "Consistent histories and quantum reasoning", *Phys. Rev.* **A 54**, 2759–2774 (1996).

[553] R.B. Griffiths, "Choice of consistent family, and quantum incompatibility", *Phys. Rev.* **A 57**, 1604–1618 (1998).

[554] "Observant readers take the measure of novel approaches to quantum theory : some get Bohmed", *Phys. Today* **52**, 11–15 et 89–92 (February 1999).

[555] R.B. Griffiths, "Correlations in separated quantum systems : a consistent history analysis of the EPR problem", *Am. J. Phys.* **55**, 11–17 (1987).

[556] F. Dowker and A. Kent, "Properties of consistent histories", *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3038–3041 (1995) ; "On the consistent histories approach to quantum mechanics", *J. Stat. Phys.* **82**, 1575–1646 (1996).

[557] A. Kent, "Quasiclassical dynamics in a closed quantum system", *Phys. Rev.* **A 54**, 4670–4675 (1996).

[558] T.A. Brun, "Continuous measurements, quantum trajectories, and decoherent histories", *Phys. Rev.* **A 61**, 042107 (2000).

[559] J.S. Bell, "Are there quantum jumps ?", in *Schrödinger–Centenary Celebration of a Polymath*, C.W. Kilmister ed., Cambridge University Press (1987), p. 41 ; voir aussi le Chapitre 22 de [6].

[560] J.S. Bell, "Beables for quantum field theory", CERN-TH.4035/84 (August 2 1984) ; *Phys. Rep.* **137**, 49–54 (1986) ; Chapitre 19 de [6].

[561] L. de Broglie, "La mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement", *J. Physique et le Radium*, série VI, tome VIII, 225–241 (1927) ; "Interpretation of quantum mechanics by the double solution theory", *Ann. Fond. Louis de Broglie* **12**, n° 4 (1987).

[562] L. de Broglie, *Tentative d'Interprétation Causale et Non-linéaire de la Mécanique Ondulatoire*, Gauthier-Villars, Paris (1956).

[563] L. de Broglie, *Les Incertitudes d'Heisenberg et l'Interprétation Probabiliste de la Mécanique Ondulatoire*, Gauthier-Villars et Bordas, Paris (1982).

[564] J.T. Cushing, *Quantum Mechanics*, The University of Chicago Press (1994).

[565] D. Bohm, "Proof that probability density approaches $|\Psi|^2$ in causal interpretation of quantum theory", *Phys. Rev.* **89**, 458–466 (1953).

[566] E. Madelung, "Quantentheorie in hydrodynamische Form", *Z. Phys.* **40**, 322–326 (1927).

[567] D. Dürr, S. Goldstein and N. Zanghì, "Quantum equilibrium and the origin of absolute uncertainty", *J. Stat. Phys.* **67**, 843–907 (1992).

[568] A. Valentini, "Signal-locality in hidden-variables theories", *Phys. Lett.* **A 297**, 273–278 (2002) ; "Beyond the quantum", *Physics World* 32–37 (November 2009).

[569] J.S. Bell, Chapitre 18 de [55] (page 128 de [6]).

[570] J. Bricmont, *Making sense of quantum mechanics*, Springer (2016).

[571] D. Dürr, S. Goldstein and N. Zanghi, *Quantum physicis without quantum philosophy*, Springer (2012), chapitre 12 ; voir également S. Goldstein and N. Zanghi, "Reality and the role of the wavefunction in quantum theory", arXiv:1101.4575v1

[572] P. Holland, "Hamiltonian theory of wave and particle in quantum mechanics II : Hamilton–Jacobi theory and particle back-reaction", *Nuov. Cim.* **B 116**, 1143–1172 (2001).

[573] C. Philippidis, C. Dewdney and B.J. Hiley, "Quantum interference and the quantum potential", *Nuov. Cim.* **52 B**, 15–23 (1979).

[574] P.R. Holland, *The Quantum Theory of Motion*, Cambridge University Press (1993).

[575] J.S. Bell, "De Broglie–Bohm, delayed choice double slit experiment, and density matrix", *International Journal of Quantum Chemistry* **18**, supplement symposium 14, 155–159 (1980) ; Chapitre 14 de [6].

[576] B.J. Hiley, "Welcher Weg experiments from the Bohm perspective", contribution à la conférence de Växjö (2005),

http ://www.bbk.ac.uk/tpru/BasilHiley/WelcherWegBohmBJH2.pdf.

[577] D. Greenberger, M. Horne and A. Zeilinger, "Multiparticle interferometry and the superposition principle", *Phys. Today* **46**, 22-29 (1993).

[578] K. Gottfried, "Two particle interference", *Am. J. Phys.* **68**, 143-147 (2000).

[579] E. Guay and L. Marchildon, "Two-particle interference in standard and Bohmian quantum mechanics", *J. Phys.* **A 36**, 5617-5624 (2003).

[580] L. Vaidman, "The reality of Bohmian quantum mechanics or Can you kill with an empty wave bullet ?", *Found. Phys.* **35**, 299–312 (2005).

[581] E. Deotto and G.C. Ghirardi, "Bohmian mechanics revisited", *Found. Phys.* **28**, 1–30 (1998).

[582] P. Holland, "Uniqueness of paths in quantum mechanics", *Phys. Rev.* **A 60**, 4326–4330 (1999) ; "Uniqueness of conserved currents in quantum mechanics", *Ann. Phys. (Leipzig)* **12**, 446-462 (2003).

[583] P. Holland and C. Philippidis, "Implications of Lorentz covariance for the guidance equation in two-slit quantum interference", **A 67**, 062105 (2003).

[584] H.M. Wiseman, "Grounding Bohmian mechanics in weak values and bayesianism", New J. Phys. **9**, 165 (2007].

[585] T. Nikuni and J.E. Williams, "Kinetic theory of a spin 1/2 Bose-condensed gas", *J. Low Temperature Phys.* **133**, 323-374 (2003).

[586] B.G. Englert, M.O. Scully, G. Süssmann and H. Walther, "Surrealistic Bohm trajectories", *Z. Naturforschung* **47a**, 1175–1186 (1992).

[587] C. Dewdney, P.R. Holland and A. Kyprianidis, "What happens in a spin measurement ?", *Phys. Lett.* **A 119**, 259–267 (1986).

[588] E.P. Wigner, "Rejoinder", *Am. J. Phys.* **39**, 1097 (1971).

[589] J. Clauser, "von Neumann's informal hidden-variable argument", *Am. J. Phys.* **39**, 1095 (1971) ; "Reply to Dr Wigner's objections", *Am. J. Phys.* **39**, 1098 (1971).

[590] J.S. Bell, "De Broglie-Bohm, delayed-choice double-slit experiment, and density matrix", *Int. J. Quant. Chem.*, Quantum Chemistry Symposium **14**, 155-159 (1980) ; reproduit dans [6].

[591] J. des Cloizeaux, "A reformulation of Schrödinger and Dirac equations in terms of observable local densities and electromagnetic fields : a step towards a new interpretation of quantum mechanics ?", *J. Physique* **44**, 885-908 (1983).

[592] S. Colin and W. Struyve, "A Dirac sea pilot-wave model for quantum field theory", *J. Phys. A Math. Theor.* **40**, 7309-7341 (2007).

[593] D. Dürr, S. Goldstein, R. Tumulka and N. Zanghì, "Trajectories and particle creation and annihilation in quantum field theory", *J. Phys. A Math. Gen.* **36**, 4143–4149 (2003).

[594] D. Dürr, S. Goldstein, R. Tumulka and N. Zanghì, "Bohmian mechanics and quantum field theory", *Phys. Rev. Lett.* **93**, 090402 (2004).

[595] W. Struyve, "Field beables for quantum field theory", *Rept. Prog. Phys.* **73**, 106001 (2010) ; arXiv:0707.3685v2 [quant-ph] (2007).

[596] K. Berndl, D. Dürr, S. Goldstein and N. Zhanghi, "Nonlocality, Lorentz invariance, and Bohmian quantum theory", *Phys. Rev.* **A 53**, 2062–2073 (1996).

[597] H. Nikolić, "Relativistic quantum mechanics and the Bohmian interpretation", *Found. Phys. Lett.* **18**, 549–561 (2005) ; "QFT as pilot-wave theory of particle creation and destruction", *J. Mod. Phys.* **A 25**, 1477–1505 (2010) ; "Bohmian mechanics in relativistic quantum mechanics, quantum field theory and string theory ", *J. Phys. Conference Series* **67**, 012035 (2007).

[598] P. Peter, E. Pinho and N. Pinto-Neto, "Tensor perturbations in quantum cosmological backgrounds", *JCAP* **07**, 014 (2005), "Gravitational

wave background in perfect fluid quantum cosmologies", *Phys. Rev.* **D73**, 104017 (2006).

[599] E. Pinho and N. Pinto-Neto, "Scalar and Vector Perturbations in Quantum Cosmological Backgrounds ", *Phys. Rev.* **D76**, 023506 (2007).

[600] J. Acacio de Barros, N. Pinto-Neto and M.A. Sagioro-Leal, "The causal interpretation of dust and radiation fluid non-singular quantum cosmologies", *Phys. Lett.* **A241**, 229-239 (1998).

[601] D. Bohm and J.P. Vigier, "Model of the causal interpretation of quantum theory in terms of a fluid with irregular fluctuations", *Phys. Rev.* **96**, 208–216 (1954).

[602] A. Valentini, "Signal-locality, uncertainty, and the subquantum *H*-theorem" I, *Phys. Lett.* **A 156**, 5–11 (1991) ; II, *Phys. Lett.* **A 158**, 1–8 (1991) .

[603] A. Valentini and H. Westman, "Dynamical origin of quantum probabilities", *Proc. Roy. Soc.* **A 461**, 253–272 (2004).

[604] M.D. Towler, N.J. Russel and A. Valentini, "Time scales for dynamical relaxation to the Born rule", *Proc. Royal Soc.* **A 468**, 990-1013 (2015).

[605] S. Goldstein, "Bohmian mechanics", Stanford Encyclopedia of Philosophy, https ://plato.stanford.edu/entries/qm-bohm/ (2001 and 2013).

[606] M.O. Scully, "Do Bohm trajectories always provide a trustworthy physical picture of particle motion ?", *Phys. Scripta* **T 76**, 41-46 (1998).

[607] C. Dewdney, L. Hardy and E.J. Squires, "How late measurements of quantum trajectories can fool a detector", *Phys. Lett.* **A 184**, 6–11 (1993).

[608] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloë, *Mécanique quantique*, Hermann (1973 and 1977) ; *Quantum mechanics*, Wiley (1977).

[609] N. Bohr, "Discussions with Einstein on epistemological problems in atomic physics", in [2], 200-241 ; reproduit dans *Quantum Theory and Measurement*, J.A. Wheeler and W.H. Zurek editors, Princeton University Press (1983), pp. 9-49.

[610] R.B. Griffiths, "Bohmian mechanics and consistent histories", *Phys. Lett.* **A 261**, 227–234 (1999).

[611] N. Gisin, "Why Bohmian mechanics ? one and two-time measurements, Bell inequalities, philosophy and physics", arXiv:1509.00767 [quant-ph].

[612] G. Tastevin and F. Laloë, "Surrealistic Bohmian trajectories do not occur with macroscopic pointers", à paraître.

[613] Y. Aharonov and L. Vaidman, "About position measurements which do not show the Bohmian particle position", in J.T. Cushing *et al.* eds *Bohmian theory, an appraisal*, Kluwer (1996) ; arXiv:quant-ph/9511005 (1995).

[614] Y. Aharonov, B-G. Englert and M.O. Scully, "Protective measurements and Bohm trajectories", *Phys. Lett.* **A 263**, 137-146 (1999).

[615] M. Correggi and G. Morchio, "Quantum mechanics and stochastic mechanics for compatible observables at different times", *Ann. Physics* **296**, 371–389 (2002).

[616] A. Neumaier, "Bohmian mechanics contradicts quantum mechanics", arXiv:quant-ph/0001011 (2000).

[617] G. Brida, E. Cagliero, G. Falzetta, M. Genovese, M. Gramegna and C. Novero, "Experimental realization of a first test of de Broglie-Bohm theory", *J. Phys. B* **35**, 4751-4756 (2002) ; "A first experimental test of the de Broglie–Bohm theory against standard quantum mechanics", arXiv:quant-ph/0206196 (2002).

[618] G. Brida, E. Cagliero, G. Falzetta, M. Genovese, M. Gramegna and E. Prerdazzi, "Biphoton double slit experiment", *Phys. Rev.* **A 68**, 033803 (2003).

[619] P. Ghose, "An experiment to distinguish between de Broglie–Bohm and standard quantum mechanics", arXiv:quant-ph/0003037 (2003).

[620] I. Fényes, "Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung und Interpretation der Quantenmechanik", *Zeit. Physik* **132**, 81–106 (1952).

[621] E. Nelson, "Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics", *Phys. Rev.* **150**, 1079–1085 (1966).

[622] R. Werner, "A generalization of stochastic mechanics and its relation to quantum mechanics", *Phys. Rev.* **D 34**, 463–469 (1986).

[623] T.C. Wallstrom, "Inequivalence between the Schrödinger equation and the Madelung hydrodynamic equations", *Phys. Rev.* **A 49**, 1613–1617 (1994).

[624] P. Damgaard and H. Hüffel eds., *Stochastic Quantization*, World Scientific (1988).

[625] M. Masujima, *Path Integral Quantization and Stochastic Quantization*, Springer Verlag (2000 et 2009).

[626] G. Parisi and Y-S. Wu, "Perturbation theory without gauge fixing", *Sci. Sin.* **24**, 483–496 (1981).

[627] E. Gozzi, "Functional-integral approach to Parisi-Wu stochastic quantization : scalar theory", *Phys. Rev.* **D 28**, 1922–1930 (1983).

[628] M. Dickson and D. Dieks, "Modal interpretation of quantum mechanics", *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (2007) : http ://plato.stanford.edu/entries/qm-modal/ (maintenant remplacé par la référence suivante, mais toujours accessible sur le site de l'Encyclopédie).

[629] O. Lombardi and D. Dieks, "Modal interpretations of quantum mechanics", *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (2017) : https ://plato.stanford.edu/entries/qm-modal/

[630] B.C. van Fraassen, "A formal approach to the philosophy of science", in *Paradigms and Paradoxes : The Philosophical Challenge of the Quantum Domain*, R. Colodny ed., University of Pittsburg Press (1972), pp. 303–366 ; "The Einstein–Podolsky–Rosen paradox", *Synthese*, **29**, 291–309 (1974) ; *Quantum Mechanics : An Empiricist View*, Oxford, Clarendon Press (1991).

[631] S. Kochen, "A new interpretation of quantum mechanics", in *Symposium on the Foundations of Modern Physics*, P. Mittelstaedt and P. Lahti eds., World Scientific (1985), pp. 151–169.

[632] D. Dieks, "The formalism of quantum theory : an objective description of reality ?", *Annalen der Physik* **500**, 174–190 (1988) ; "Quantum mechanics without the projection postulate and its realistic interpretation", *Found. Phys.* **19**, 1397–1423 (1989) ; "Resolution of the measurement problem through decoherence of the quantum state", *Phys. Lett.* **A 142**, 439–446 (1989) ; "Modal interpretation of quantum mechanics, measurements, and macroscopic behaviour", *Phys. Rev.* **A 49**, 2290–2300 (1994).

[633] R. Healey, *The Philosophy of Quantum Mechanics : An Interactive Interpretation*, Cambridge University Press (1989) ; "Measurement and quantum indeterminateness", *Found. Phys. Lett.* **6**, 307–316 (1993).

[634] G. Bacciagaluppi, "Topics in the modal interpretation of quantum mechanics", dissertation, Cambridge University (1996) ; "Delocalized properties in the modal interpretation of a continuous model of decoherence", *Found. Phys.* **30**, 1431–1444 (2000).

[635] M. Dickson, "Wavefunction tails in the modal interpretation", *Proceedings of the Philosophy of Science Association 1994*, D. Hull, M. Forbes and R. Burian eds., Vol. 1, 366–376 (1994).

[636] J. Berkovitz and M. Hemmo, "Modal interpretations of quantum mechanics and relativity : a reconsideration", *Found. Phys.* **35**, 373–397 (2005).

[637] R. Healey, "Modal interpretation, decoherence, and the quantum measurement problem", in *Quantum Measurement : Beyond Paradox*, R. Healey and G. Hellmann eds., *Minnesota Studies in the Philosophy of Science* **17**(1998), pp. 52–86.

[638] W. Myrvold, "Modal interpretation and relativity", *Found. Phys.* **32**, 1173–1784 (2002).

[639] R. Clifton, "The modal interpretation of algebraic quantum field theory", *Phys. Lett.* **A 271**, 167–177 (2000).

[640] L. Diosi, "Quantum stochastic processes as models for state vector reduction", *J. Phys.* **A 21**, 2885–2898 (1988).

[641] R. Haag, "Fundamental irreversibility and the concept of events", *Comm. Math. Phys.* **132**, 245–251 (1990) ; "An evolutionary picture for quantum physics", *Comm. Math. Phys.* **180**, 733–743 (1996).

[642] A. Jadczyk, "On quantum jumps, events, and spontaneous localization models", *Found. Phys.* **25**, 743–762 (1995).

[643] P. Pearle, "How stands collapse I", *J. Phys. A : Math. Theor.* **40**, 3189–3204 (2007).

[644] P. Pearle, "On the time it takes a state vector to reduce", *J. Stat. Phys.* **41**, 719–727 (1985).

[645] A. Barchielli, L. Lanz and G.M. Prosperi, "A model for the macroscopic description and continual observations in quantum mechanics", *Nuov. Cim.* **42 B**, 79–121 (1982).

[646] A. Barchielli, "Continual measurements for quantum open systems", *Nuov. Cim.* **74 B**, 113–138 (1983) ; "Measurement theory and stochastic differential equations in quantum mechanics", *Phys. Rev.* **A 34**, 1642–1648 (1986).

[647] F. Benatti, G.C. Ghirardi, A. Rimini and T. Weber, "Quantum mechanics with spontaneous localization and the quantum theory of measurement", *Nuov. Cim.* **100 B**, 27–41 (1987).

[648] F. Benatti, G.C. Ghirardi, A. Rimini and T. Weber, "Operations involving momentum variables in non-hamiltonian evolution equations", *Nuov. Cim.* **101 B**, 333–355 (1988).

[649] P. Blanchard, A. Jadczyk and A. Ruschhaupt, "How events come into being : EEQT, particle tracks, quantum chaos and tunneling time", in *Mysteries, Puzzles and Paradoxes in Quantum Mechanics*, R. Bonifacio ed., American Institute of Physics, AIP Conference Proceedings, n° 461 (1999) ; *J. Mod. Optics* **47**, 2247–2263 (2000).

[650] P. Pearle, "Combining stochastic dynamical state-vector reduction with spontaneous localization", *Phys. Rev.* **A 39**, 2277–2289 (1989).

[651] G.C. Ghirardi, P. Pearle and A. Rimini, "Markov processes in Hilbert space and continuous spontaneous localization of systems of identical particles", *Phys. Rev.* **A 42**, 78–89 (1990).

[652] P. Pearle, "Cosmogenesis and collapse", arXiv:1003.5582v2 [gr-qc] (2010) ; *Found. Phys.* **42**, 4–18 (2012).

[653] *Experimental Metaphysics : Quantum Mechanical Studies for Abner Shimony*, Festschrift volumes 1 and 2, R.S. Cohen, M.A. Horne and J.J. Stachel eds., *Boston Studies in the Philosophy of Science*, vol. 193 and 194, Kluwer Academic Publishers (1997) ; P. Pearle, vol. 1, p. 143 ; G. Ghirardi and T. Weber, vol. 2, p. 89.

[654] A. Shimony, "Desiderata for a modified quantum dynamics", pp. 49–59 in "*PSA 1990* vol. 2, *Proceedings of the 1990 Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, A. Fine, M. Forbes and L. Wessel eds., Philosophy of Science Association, East Lansing, MI (USA).

[655] P. Pearle, "How stands collapse II", in *Quantum Reality, Relativistic Causality and Closing the Epistemic Circle : Essays in Honour of Abner Shimony*, W. Mryvold and J. Christian eds., Springer (2009), pp. 257–292.

[656] L.F. Santos and C.O. Escobar, "A proposed solution to the tail problem of dynamical reduction models", *Phys. Lett.* **A 278**, 315–318 (2001).

[657] L. Diosi, "Continuous quantum measurement and Itô formalism", *Phys. Lett.* **129 A**, 419–423 (1988).

[658] L. Diosi, "Models for universal reduction of macroscopic quantum fluctuations", *Phys. Rev.* **A 40**, 1165–1174 (1989).

[659] G.C. Ghirardi, R. Grassi and A. Rimini, "Continuous-spontaneous-reduction model involving gravity", *Phys. Rev.* **A 42**, 1057–1064 (1990).

[660] R. Penrose, *The Emperor's New Mind*, Oxford University Press (1989) ; *Shadows of the Mind*, Oxford University Press (1994).

[661] R. Penrose, "On gravity's role in quantum state reduction", *General Relativity and Gravitation* **28**, 581–600 (1996).

[662] N. Gisin, "Stochastic quantum dynamics and relativity", *Helv. Phys. Acta* **62**, 363–371 (1989).

[663] G.C. Ghirardi, R. Grassi and P. Pearle, "Relativistic dynamical reduction models : general framework and examples", *Found. Phys.* **20**, 1271–1316 (1990).

[664] P. Pearle, "Completely quantized collapse and consequences", *Phys. Rev.* **A 72**, 022112 (2005).

[665] D.J. Bedingham, "Relativistic state reduction dynamics", *Found. Phys.* **41**, 686–704 (2011) ; arXiv:1003.2774v2 [quant-ph] (2010). "Relativistic state reduction model", *J. Phys. Conf. Series* **306**, 012034 (2011).

[666] D.J. Bedingham, D. Dürr, G. Ghirardi, S. Goldstein, R. Tumulka and N. Zanghì, "Matter density and relativistic models of wave function collapse", *J. Stat. Phys.* **154**, 623–631 (2014) ; arXiv:1111.1425v2 [quant-ph] (2011).

[667] N. Gisin, "Weinberg's non-linear quantum mechanics and supraluminal communications", *Phys. Lett.* **A 143**, 1-2 (1990).

[668] J. Polchinski, "Weinberg's nonlinear quantum mechanics and the Einstein-Podolsky-Rosen paradox", *Phys. Rev. Lett.* **66**, 397–400 (1991).

[669] R. Tumulka, "On spontaneous wave function collapse and quantum field theory", *Proc. Roy. Soc.* **A 462**, 1897–1908 (2006) ; "A relativistic version of the Ghirardi–Rimini–Weber model", *J. Stat. Phys* **125**, 821–840 (2006) ; "Collapse and relativity", arXiv:quant-ph/0602208 (2006).

[670] A. Bassi and G. Ghirardi, "Dynamical reduction models", *Phys. Rep.* **379**, 257–426 (2003).

[671] S. Weinberg, "Precision tests of quantum mechanics", *Phys. Rev. Lett.* **62**, 485–488 (1989) ; "Testing quantum mechanics", *Ann. of Phys.* **194**, 336–386 (1989).

[672] K. Wódkiewicz and M.O. Scully, "Weinberg's nonlinear wave mechanics", *Phys. Rev.* **A 42**, 5111–5116 (1990).

[673] P. Pearle, J. Ring, J.I Collar and F.T. Avignone, "The CSL collapse model and spontaneous radiation : an update", *Found. Phys.* **29**, 465–80 (1998).

[674] H.S. Miley, F.T. Avignone, R.L. Brodzinski, J.I. Collar and J.H. Reeves, "Suggestive evidence for the two-neutrino double-$\beta$ decay of $^{76}$Ge", *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3092–3095 (1990).

[675] F. Laloë, W. Mullin and P. Pearle, "Heating of trapped ultracold atoms by collapse dynamics", *Phys. Rev.* **A 90**, 052119 (2014).

[676] K. Hornberger, S. Gerlich, P. Haslinger, S. Nimmrichter and M. Arndt, "Quantum interference of clusters and molecules", *Rev. Mod. Phys.* **84**, 157–173 (2012).

[677] A. Bassi, K. Lochan, S. Satin, T.P. Singh and H. Ulbricht, "Models of wave-function collapse, underlying theories, and experimental tests", *Rev. Mod. Phys.* **85**, 471-527 (2013).

[678] G.C. Ghirardi, "Quantum superpositions and definite perceptions : envisaging new feasible tests", *Phys. Lett.* **A 262**, 1–14 (1999).

[679] J. Dalibard, Y. Castin and K. Mølmer, "Wave function approach to dissipative processes in quantum optics", *Phys. Rev.* Lett. **68**, 580–583 (1992).

[680] K. Mølmer, Y. Castin and J. Dalibard, "Monte Carlo wave-function method in quantum optics", *Journ. Optical. Soc. Am. B* **10**, 524–538 (1993).

[681] H.J. Carmichael, *An Open System Approach to Quantum Optics*, Lectures notes in Physics, monograph 18, Springer-Verlag (1993).

[682] M.B. Plenio and P.L. Knight, "The quantum-jump approach to dissipative dynamics in quantum optics", *Rev. Mod. Phys.* **70**, 101–141 (1998).

[683] N. Gisin and I.C. Percival, "The quantum-state diffusion model applied to open systems", *J. Phys.* **A 25**, 5677–5691 (1992) ; "Quantum state diffusion, localization and quantum dispersion entropy", **26**, 2233–2243 (1993) ; "The quantum state diffusion picture of physical processes", **26**, 2245–2260 (1993).

[684] I.C. Percival, *Quantum State Diffusion*, Cambridge University Press (1998).

[685] F. Laloë, "Modified Schrödinger dynamics with attractive densities", *Eur. Phys. J.* **D 69**, 162 (2015).

[686] J.G. Cramer, "The transactional interpretation of quantum mechanics", *Rev. Mod. Phys.* **58**, 647–687 (1986) ; dans un appendice, cet article contient une revue des diverses interprétations de la mécanique quantique.

[687] J.G. Cramer, "Generalized absorber theory and the Einstein–Podolsky–Rosen paradox", *Phys. Rev.* **D 22**, 362–376 (1980).

[688] H. Everett III, "Relative state formulation of quantum mechanics", *Rev. Mod. Phys.* **29**, 454–462 (1957) ; reproduit dans *Quantum Theory and Measurement*, J.A. Wheeler and W.H. Zurek eds., Princeton University Press (1983), pp. 315–323.

[689] B.S. DeWitt and N. Graham *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton Series in Physics (1973).

[690] H. Everett III, lettre à L.D. Raub du 7 avril 1983, http ://dspace.nacs.uci.edu/xmlui/handle/10575/1205.

[691] D. Deutsch, "The structure of the multiverse", *Proc. Roy. Soc. London* **A 458**, 2911–2923 (2002).

[692] A. Kent, "Against many world interpretations", *Int. Journ. Mod. Phys* **A 5**, 1745–1762 (1990).

[693] P. Van Esch, "On the Born rule and the Everett programme", *Ann. Fond. Louis de Broglie* **32**, 51–59 (2007).

[694] D. Deutsch, "Quantum theory of probability and decisions", *Proc. Roy. Soc. London* **A 455**, 3129–3137 (1999).

[695] M.A. Rubin, "Relative frequency and probability in the Everett interpretation of Heisenberg–picture quantum mechanics", *Found. Phys.* **33**, 379–405 (2002).

[696] D. Wallace, "Everettian rationality : defending Deutsch's approach to probability in the Everett interpretation", *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.* **34**, 415–438 (2003).

[697] S. Saunders, "Derivation of the Born rule from operational assumptions", *Proc. Roy. Soc. London* **A 460**, 1771–1788 (2004).

[698] W.H. Zurek, "Probabilities from entanglement, Born's rule $p_k = |\Psi_k|^2$ from envariance", *Phys. Rev.* **A 71**, 052105 (2005).

[699] D. Wallace, "Quantum probability from subjective likelihood : improving on Deutsch's proof of the probability rule", *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **38**, 311–332 (2007).

[700] H. Price, "Probability in the Everett world : comments on Wallace and Greaves", arXiv:quant-ph/0604191 (2006); "Decisions, decisions, decisions : can Savage salvage the Everettian probability ?", arXiv:quant-ph/0802.1390 (2008).

[701] H.D. Zeh, "Roots and fruits of decoherence", *Séminaire Poincaré* **1**, 115–129 (2005) ; disponible à http ://www.bourbaphy.fr/.

[702] D. Deutsch and P. Hayden, "Information flow in entangled quantum systems", *Proc. Roy. Soc. London* **A 456**, 1759–1774 (2000).

[703] B. DeWitt, *The Global Approach to Quantum Field Theory*, vol. 1, Clarendon Press (2003), p. 144.

[704] M. Tegmark, "Parallel universes", in *Science and Ultimate reality : From Quantum to Cosmos*, J.D. Barrow, P.C.W. Davies and C.L. Harper eds., Cambridge University Press (2003) ; "Many worlds in context", arXiv:0905.2182v2 [quant-ph] (2009); également dans *Many Worlds ? Everett, Quantum Theory and Reality*, S. Saunders, J. Barrett, A. Kent and D. Wallace eds., Oxford University Press (2010).

[705] T. Damour, "Einstein 1905–1955 : son approche de la physique", *Séminaire Poincaré* **1**, 1–25 (2005) ; disponible à http ://www.bourbaphy.fr/.

[706] J.S. Bell, "The measurement theory of Everett and de Broglie's pilot wave", in *Quantum Mechanics, Determinism, Causality, and Particles*, M. Flato *et al.* eds., Dordrecht-Holland, D. Reidel (1976), pp. 11–17 ; chapitre 11 de l'édition 2004 de [6].

[707] A. Einstein, "Quantentheorie des einatomigen idealen Gases", *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* **1**, 3–14 (1925).

[708] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman and E.A. Cornell, "Observation of Bose–Einstein condensation in a dilute atomic vapor", *Science* **269,** 198–201 (1995).

[709] K.B. Davis, M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn and W. Ketterle, "Bose–Einstein condensation in a gas of sodium atoms", *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969–3973 (1995).

[710] H. Hertz, *Miscellaneous Papers*, translated from first German edition (1895) by D.E. Jones and G.A. Schott, MacMillan (London, 1896), vol. **1**, p. 318.

## Index


Aharonov, 195, 325
algébrique (théorie), 334
algorithme de Grover, 256
algorithme de Shor, 256
algorithmes quantiques, 256
Allahverdyan, 325
ambiguous entanglement, 209
ami de Wigner, 35
Anandan, 195, 325
Araki, 269
Aspect, 94, 118
axiomatique (théorie), 334

Bacciagaluppi, 396
Ballentine, 324
Barrett, 196
bayésianisme quantique, 330
BB84, 245
BCHSH, 82, 463
beable, 352
Belavkin, 292
Bell, 47, 79, 111, 130, 184, 352
Bell (jeu de), 148
Bell-Kochen-Specker (théorème), 184
Berkovitz, 396
bi-orthonormale (décomposition), 212
biaisé, 114
Birkhoff, 332
BKS, 184
Bohm, 353
Bohm-Bub, 398
bohmienne (mesure), 367
bohmiennes (trajectoires), 360
Bohr, 3, 13, 44, 50, 65
boîte de Popescu-Rohrlich, 162
boîtes déterministes, 160
boîtes logiques, 159
boîtes stochastiques, 161
Born, 45, 440
borne de Cirelson, 153
Bose-Einstein, 6, 432
brownien (mouvement), 286
Bub, 398
Bush (théorème de), 337

Cabello, 177
cachées (variables), 352
calcul quantique, 254
Caldeira-Leggett (modèle), 266
Caldeira-Leggett, 229
caractérisation de l'intrication, 209
caractériser la théorie quant., 164
CH-E (inégalité), 147
chaîne infinie de von Neumann, 26
chat de Schrödinger, 29, 35, 225
Cirelson, 150
Clauser, 93, 374
Clauser et Horne (inégalité), 136
clés cryptographiques, 244
clonage, 240
codes de correction, 258
cohérentes (histoires), 339
Colbeck et Renner, 199
Coleman-Hepp (modèle), 266
Commins, 93
commutateur, 438
complémentarité, 45
condensation de Bose-Einstein, 6, 304
condensats de Bose-Einstein, 76
conditions NS, 158
conspiration des polariseurs, 117
conspirations, 113
contenu logique du th. de Bell, 90
contextualité, 97, 171, 185, 193
continues (mesures), 279
contrafactualité, 96, 125
Copenhague (interprétation), 5, 17, 44
correction quantique, 258

corrélations, 57, 60, 80, 170, 208, 497
corrélations (interprétation), 317
corrélations (th. de Bohm), 497
corrélations bohmiennes, 387
corrélations localement explicables, 98
corrélations superquantiques, 162
cosmologie quantique (dBB), 377
coupure de Heisenberg, 28
courant de probabilité, 454
création et perte d'intrication, 218
crédibilité des échappatoires, 125
critère de séparabilité, 217
cryptographie quantique, 243
CSL, 404, 513
cyclotron, 298

d'Espagnat, 34, 131, 338
dBB (théorie), 353
de Broglie, 4, 47, 353
décohérence, 223
décohérence macroscopique, 315
décomposition de Schmidt, 211
Dehmelt, 294
detection loophole, 115
Deutsch, 256, 425
Deutsch-Josza, 256
DeWitt, 429
Dickson, 396
Dieks, 395
Diosi, 407
Dirac, 7, 47
Dirac (équation de), 375
distillation, 230
distribution de clés, 244
double solution (théorie de la), 353
dynamique de Schrödinger attractive, 415, 523
dynamique de Schrödinger modif., 396

Eberhard (inégalités), 141
échange d'intrication, 220
échantillon biaisé, 114
échappatoire, 113, 475
efficiency loophole, 114
einselection, 267
Einstein, 3, 47, 63, 65, 323, 432
Einstein, Podolsky et Rosen, 53
électron unique piégé, 298
éléments de réalité, 54, 90
Englert, 461
entanglement swapping, 220
entropie, 214, 446
envariance, 267, 425
épistémique (vecteur d'état), 195
EPR, 53
EPR macroscopique, 76
EPRB, 60
équation de Dirac, 375
équation de Schrödinger, 8, 9, 441, 454
équilibre quantique (condition), 356
espace des états, 436
et-ou (question), 30, 34, 226
état relatif, 419
état singulet, 80
état W, 222
états de Fock, 76, 304
états purs, 444
Everett, 419
évolution (opérateur), 442
exclusivité (résultats de mesure), 34
expérience de Stern et Gerlach, 455
expériences, 92, 293

factorisation des probabilités, 465
faible (valeur), 279, 281
faibles (mesures), 279
fair sampling assumption, 115
fair sampling loophole, 115
familles cohérentes, 342
familles d'histoires, 340, 519
fatalisme, 118
Feynman, 229

Fine, 200
flash ontology, 409
Fock (états), 76
fonction d'onde, 453
fonction d'onde universelle, 419
forme de Lindblad, 235
formelle (théorie), 334
formes du théorème de Bell, 95
formule de Wigner, 319, 487
Freedman, 93
Fuchs, 321, 322, 462

Gabrielse, 299
Gell-Mann, 340
Ghirardi-Pearle-Rimini, 406
Ghirardi-Rimini-Weber, 399
GHZ, 167
GHZ, généralisations, 174
Gisin, 400, 409
Gleason (théorème), 335
Gottfried, 48
gravité, 407
Greenberger, 167
Greenberger-Horne-Zeilinger, 167
Griffiths, 340
Grover, 256
GRW, 399

Hadamard (porte de), 256
Hardy, 180, 200, 473
Harrigan, 195
Hartle, 340
Healey, 395
Heisenberg, 7, 46, 67, 205
Heisenberg cut, 28
Hemmo, 396
hermitique (opérateur), 438
Hertz, 432
histoires cohérentes, 339, 519
hitting processes, 400
Holt, 93
Horne, 93, 167
Horodecki, 218
Hund, 267
hypothèses du théorème de Bell, 95

impossibilités de Hardy, 180
indépendance des paramètres de mesure, 465
indépendance des résultats de mesure, 466
indirectes (mesures), 273
inégalité BCHSH, 82
inégalité CH-E, 147
inégalité de Bell (1964), 130
inégalité de Mermin, 134
inégalités de Bell, 80
inégalités de Cabello, 177
inégalités de Wigner, 131
information, 322, 328
information quantique, 254
informationnel (contenu du vecteur d'état), 25, 322, 328
interprétation d'Everett, 419
interprétation de Copenhague, 5, 17
interprétation des corrélations, 317
interprétation des histoires, 339
interprétation modale, 393
interprétation relationnelle, 326
interprétation statistique, 323
interprétation transactionnelle, 418
interrompre la chaîne de V.N., 315
intrication (mesures), 215
intrication quantique, 203, 208, 218
ion Barium, 294
ion dans un piège, 294
Itô, 289

Jammer, 3, 27, 44, 45, 50, 54, 96
jeu de Bell, 148
Jordan, 7, 46

Ketterle, 306
Kochen, 184, 395
Kochen-Specker (théorème), 184
Kocher, 93
Kraus (opérateurs de), 231

Kraus (somme de), 234

Landau (niveaux de), 299
Landau et Lifchitz, 46
Leggett, 49, 324, 431
Leggett et Garg, 109
Leggett et Sols, 307
libre arbitre, 91, 95, 118, 428
limite de Cirelson, 150, 164
Lindblad (forme de), 235, 406
local (indéterminisme), 98
localisation spontanée, 399, 513, 517
localisation spontanée continue, 404
localité, 69, 90, 98, 125, 154, 465
logique quantique, 332
London-Bauer, 316
loopholes, 113, 115

Mackey, 334
Madelung, 355, 392, 493
manipulations variables supplem., 493
matrice de Pauli, 447
mécanique de Nelson, 391
mécanique ondulatoire, 4
mélanges statistiques, 444
Mendel, 433
Mendel (parabole de), 56, 112
Mermin, 48, 134
mesure (problème de la), 34
mesure (von Neumann), 10, 262
mesure bohmienne, 367
mesure du nombre de photons, 301
mesure non destructive, 302
mesure protectrice, 325
mesures continues, 279, 283
mesures de l'intrication, 215
mesures faibles, 279
mesures indirectes, 273
mesures instants différents, 487
mesures négatives, 37
mesures sans interaction, 37
modale (interprétation), 393
modalité, 339
molécule chirale, 267
mondes multiples, 419
monogamie, 216
mouvement brownien, 286
MWI, 419

négatives (mesures), 37
Nelson, 391
Neumann (von), 11, 26, 262, 332, 446
non déterministes (théories), 97
non-clonage, 240
non-détermination d'un état, 242
non-déterminisme et inégalités, 463
non-localité, xiii, 125
non-localité de la phase, 308
non-localité en théorie de Bohm, 365, 375, 388
non-séparabilité, 71, 217
non-transmission instantanée, 158
NS (conditions), 158

objective local theories, 136
observateur, 25, 46–48
Omnès, 340
onde pilote, 354
ondes vides, 365, 367, 368
ontique (vecteur d'état), 195
opérateur d'évolution, 442
opérateur densité, 443
opérateur hermitique, 438
opérateur unitaire, 438
opérateurs, 437
opérateurs de Kraus, 231
origine des corrélations, 208
outcome independence, 466
ouverts (systèmes quantiques), 415

pair detection loophole, 115
paradoxe de Hund, 267
parameter independence, 465
Parisi-Wu, 393
partie et le tout (la), 205

Pauli (matrices), 447
PBR (théorème), 196
Pearle, 35, 68, 116, 398, 399, 404, 406
Penrose, 408
Peres, 17, 88, 191, 218, 321, 322, 328, 431, 462
phase spontanée des condensats, 304
photons dans une cavité, 301
Planck, 3
pointeurs (états), 265
Popescu-Rohrlich, 162, 164
Popper, 332
porte de Hadamard, 256
portes quantiques, 256
potentialités, 46
pouvoir rotatoire, 268
POVM, 277, 338
pragmatisme dans les labos, 314
predictive completeness, 466
probabilités, 10, 422, 440
problème et-ou, 30, 34, 226
processus de Markov, 406
processus de Wiener, 286
produit tensoriel, 448
projecteur, 441
propres(vecteurs), 438
protectrice (mesure), 325
protocole BB84, 245
protocole EPR, 249
protocoles cryptographiques, 245
purification, 230
Pusey, 196

QND, 265, 302
quantification stochastique, 393
quantum Bayesianism, 330
quantum non-demolition, 265, 302
QuBisme, 330
qubit, 255
question et-ou, 30, 34, 226

ramification du vecteur d'état, 422
réalisme local, 82, 169, 178
réalisme macroscopique, 109
réduction du vecteur d'état, 11, 23, 36, 112, 293
réduction spontanée, 513
réel voilé, 338
règle de Born, 10, 440, 489
règle de Born généralisée, 489
règle de non-croisement, 363
règle des probabilités de Born, 10, 440
règle du produit, 172, 191
régression infinie von Neumann, 26
Reichenbach, 333
relationnelle (interprétation), 326
relativité, 70, 154, 157
remote context independence, 465
remote outcome independence, 466
résolution de l'unité, 336
rétrodictive (théorie bohmienne), 380
réunion de plusieurs systèmes, 448
Rimini, 399, 406
Rosenfeld, 48
Rovelli, 326
Rudolph, 196
Rydberg (atomes de), 301

Saunders, 425
Schlosshauer et Fine, 200
Schmidt, 211
Schrödinger, 8, 29, 35, 47, 204, 298
Schrödinger (équation), 9, 441, 454
Scully, 461
sélection des paires, 475
séparabilité, xii, 69, 217, 469
Shimony, 48, 93
Shor, 256
signaux instantanés, 157
simulation quantique, 259
singulet, 80, 450
somme de Kraus, 234
Specker, 184
Spekkens, 195

spin, 455
spin (en théorie dBB), 371
spin 1, 185
spin 1/2, 447
spineur, 457
Stapp, 48
statistique (interprétation), 323
statut du vecteur d'état, xii, 14
Stern et Gerlach, 27, 373, 455
stochastiques (théories), 97
subadditivité de l'entropie, 214
sujet et objet, 47
superdéterminisme, 92, 118
superluminal, 157, 481
superquantique, 162
supplémentaires (variables), 96, 306, 352, 391, 398, 415
surréalistes (trajectoires dBB), 382
systèmes quantiques ouverts, 415

téléportation, 251
théorème de Bell, 79
théorème de Bell-Kochen-Specker, 184
théorie de De Broglie-Bohm, 353
théorie des champs, 154, 156
théorie des champs (dBB), 376
trace d'un opérateur, 440
trace partielle, 223, 451
trajectoires bohmiennes, 360, 380
trajectoires dBB surréalistes, 382
transactionnelle (interprétation), 418
transmission superluminale, 157, 481
Tumulka, 409

unicité (résultat de mesure), 34, 226
unicité du monde macroscopique, 30, 411, 419
unicité macroscopique, 34, 109, 225
unitaire (matrice), 439
unitaire (opérateur), 438
Unruh, 195

Vaidman, 195, 325
valeur faible, 279, 281
Van Fraassen, 393
Van Kampen, 49, 461
variables cachées, 352
variables supplém. (manipulation), 493
variables supplémentaires, 96, 306, 352, 391, 398, 415
vecteur d'état, 8, 14, 50, 436
vecteur d'état épistémique, 195
vecteur d'état ontique, 195
vecteurs propres, 438
Vernon, 229
vides (ondes), 365, 368
violation maximale, 152
vitesse quantique (terme), 355
voilé (réel), 338
von Neumann, 11, 26, 262, 332, 446
Von Weizsäcker, 50, 333

W state, 222
Wallace, 425
Walther, 461
Weber, 399
Weinberg, 409
Werner states, 110
Wiener (processus de), 286
Wiener et Siegel, 398
Wigner, 35, 88, 131, 316, 319, 374, 487
Wigner (formule de), 319
Wigner-Araki-Yanase (théorème), 269

Yanase, 269

Zeh, 266
Zeilinger, 167
Zénon (effet), 269
Zurek, 266, 425
Zwicky, 332