

EXERCICES — CORRIGÉ

Centre de Montrouge — Année Universitaire 2019–2020

Intervenant : L. Le Guillou (Sorbonne Université / LPNHE)

1^{ère} Partie

La transformation de Galilée — L'expérience de Michelson et Morley — Les postulats d'Einstein — Les équations de Lorentz — Contraction des longueurs, dilatation du temps — Les diagrammes d'espace-temps : diagrammes de Minkowski, diagrammes de Loedel.

1. Mécanique "classique" : transformation de Galilée

Un navire manœuvre dans un port, et se déplace à vitesse constante $v = 3$ m/s parallèlement au quai.

1.1 — Sur le quai, un enfant court à la vitesse $u = 2$ m/s par rapport au référentiel du quai, dans le même sens que le bateau. Quelle est sa vitesse dans le référentiel du navire ?

Soit \mathcal{R} le référentiel du quai, et \mathcal{R}' celui du navire, qui se déplace parallèlement au quai à la vitesse v . On prendra les axes Ox et Ox' parallèles au quai et au mouvement relatif du navire.

La vitesse de l'enfant est $u = u_x = 2$ m/s dans \mathcal{R} ; d'après la loi galiléenne de composition des vitesses, elle vaut :

$$u'_x = u_x - v = 2 \text{ m/s} - 3 \text{ m/s} = -1 \text{ m/s}$$

dans le référentiel \mathcal{R}' du navire.

1.2 — Un objet tombe en chute libre du haut du grand mât ($h = 10$ m). Décrivez sa trajectoire pour un observateur immobile sur le quai, et pour un marin de l'équipage. Où tombe-t-il ? Ecrivez et résolvez les équations du mouvement dans le référentiel du quai et dans celui du bateau (on pourra utiliser la transformation de Galilée).

Dans le référentiel \mathcal{R}' du navire, l'objet en chute libre qui se décroche du haut du mât ne subit que son propre poids $\mathbf{P} = m\mathbf{g} = -mg\mathbf{e}_z$ (on néglige ici les frottements de l'air). L'équation de son mouvement est donc :

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = m\mathbf{g} = -mg\mathbf{e}_z \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \ddot{x}' = 0 \\ \ddot{y}' = 0 \\ \ddot{z}' = -g \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}' = 0 \\ \dot{y}' = 0 \\ \dot{z}' = -gt \end{cases} \quad \begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \\ z'(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

en prenant le pied du grand mât comme origine O' des coordonnées dans \mathcal{R}' .

Au bout d'un temps $t = \sqrt{2h/g} \approx 1.4$ s, l'objet tombe au pied du mât en O' .

On peut obtenir la trajectoire du même objet dans le référentiel du quai en appliquant la transformation de Galilée,

$$\begin{cases} x(t) = x'(t) + vt = vt \\ y(t) = y'(t) = 0 \\ z(t) = z'(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad z(x) = h - \frac{1}{2} \frac{g}{v^2} x^2$$

ce qui correspond dans \mathcal{R} à un arc de parabole.

1.3 — L'enfant s'arrête sur le quai, puis lance son ballon à la verticale au dessus de lui à la vitesse w ($w = 10$ m/s), puis le rattrape. Ecrivez et résolvez les équations du mouvement du ballon dans les deux référentiels.

Dans le référentiel du quai, comme précédemment, le ballon de vitesse initiale $\mathbf{w} = w \mathbf{e}_z$ n'est soumis qu'à son poids $\mathbf{P} = m\mathbf{g} = -mg \mathbf{e}_z$. En supposant que l'enfant est en $x = x_0$ lorsqu'il lance son ballon, les équations du mouvement du ballon dans \mathcal{R} s'écrivent :

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg \mathbf{e}_z \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = w - gt \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = x_0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = wt - \frac{1}{2}gt^2 + h_{\text{enfant}} \end{cases}$$

Le ballon suit ainsi une trajectoire verticale ascendante jusqu'à $t = +w/g \simeq 1$ s, où il atteint la hauteur $w^2/(2g) \simeq 5$ m au dessus de l'enfant, puis retombe dans ses mains à $t = 2w/g \simeq 2$ s.

Vu du navire, les équations du mouvement du ballon deviennent (Galilée) :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - vt = x_0 - vt \\ y'(t) = y(t) = 0 \\ z(t) = wt - \frac{1}{2}gt^2 + h_{\text{enfant}} \end{cases}$$

Ce qui correspond dans \mathcal{R}' à une trajectoire parabolique.

2. Pêche à la ligne

On traitera ce problème en mécanique classique (relativité galiléenne).

Un pêcheur s'adonne à son loisir favori dans sa barque, au milieu d'une rivière. Ayant fait bonne pêche, il décide de rentrer chez lui, et il remonte le courant à la rame, en ramant à la vitesse constante w par rapport à la rivière.

Passant sous un pont, il perd sans s'en rendre compte son chapeau, qui tombe à l'eau, et est emporté par le courant.

Le pêcheur réalise la perte de son chapeau au bout de 30 minutes. Il décide alors de redescendre la rivière et, en ramant toujours à la même vitesse w par rapport au courant, il parvient à rattraper son chapeau 5 km en aval du pont.

Quelle est la vitesse du courant (par rapport aux berges) ?

Notons \mathcal{R} le référentiel des berges de la rivière, et \mathcal{R}' le référentiel de la rivière, en translation uniforme à la vitesse $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ par rapport au référentiel \mathcal{R} des berges.

La première approche consiste à analyser les trajectoires du pêcheur et de son chapeau dans \mathcal{R} . Ce n'est pas la méthode la plus directe comme nous le verrons plus loin.

On prendra comme origine des temps $t = 0$ le moment de la perte du chapeau sous le pont, et la position de cet événement comme origine des abscisses, dans les deux référentiels. On notera t_C l'instant où le pêcheur récupère son chapeau, et $D = 5 \text{ km}$ la distance en aval du pont atteinte par le chapeau quand le pêcheur le ramasse dans l'eau; on notera $\Delta t_A = 30 \text{ minutes}$ le temps écoulé entre la perte du chapeau sous le pont et le moment où le pêcheur fait demi-tour et Δt_R le temps nécessaire ensuite au pêcheur pour rejoindre son chapeau à la dérive. La succession des événements vu dans \mathcal{R} est représentée sur la figure 1.

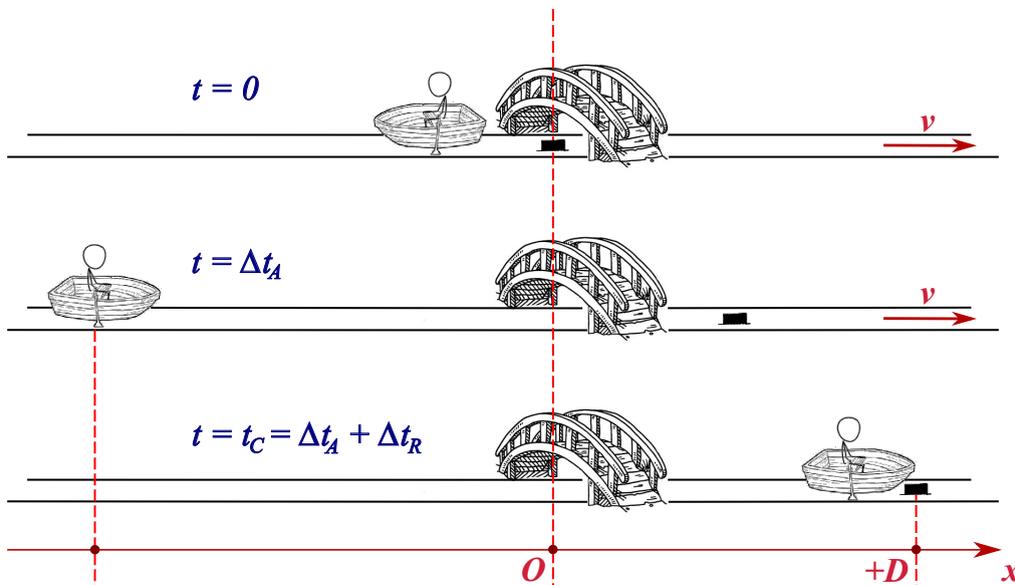


FIGURE 1 – Trajectoires du pêcheur et de son chapeau vues dans le référentiel des berges.

Dans le référentiel des berges \mathcal{R} , le pêcheur remonte tout d'abord la rivière à la vitesse $u = u' + v = -w + v$ jusqu'à l'abscisse $x = (-w + v)\Delta t_A$. Il prend alors conscience de la perte de son chapeau, et parcourt ensuite la rivière en sens inverse, à la vitesse $u = u' + v = w + v$, pour atteindre l'abscisse $x = +D$ lorsqu'il rattrape son chapeau, à $t = t_C$. On a ainsi :

$$x_{\text{pêcheur}}(t_C) = +D = (-w + v)\Delta t_A + (w + v)\Delta t_R$$

Par ailleurs, au même instant le chapeau a descendu la rivière à la vitesse v , et se trouve ainsi à la même abscisse,

$$x_{\text{chapeau}}(t_C) = +D = v(\Delta t_A + \Delta t_R)$$

De ces deux équations, on déduit :

$$D = (-w + v)\Delta t_A + (w + v)\Delta t_R = v(\Delta t_A + \Delta t_R) \quad \text{d'où} \quad w(-\Delta t_A + \Delta t_R) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \Delta t_R = \Delta t_A$$

D'où on déduit la vitesse d'écoulement de la rivière,

$$D = 2v\Delta t_A \quad v = \frac{D}{2\Delta t_A} = \frac{5 \text{ km}}{1 \text{ h}} = 5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

La seconde approche, plus élégante et plus immédiate, consiste à analyser les trajectoires dans le **référentiel de la rivière**, où, une fois tombé à l'eau sous le pont, **le chapeau est immobile**. La succession des événements vus dans \mathcal{R}' est représentée figure 2.

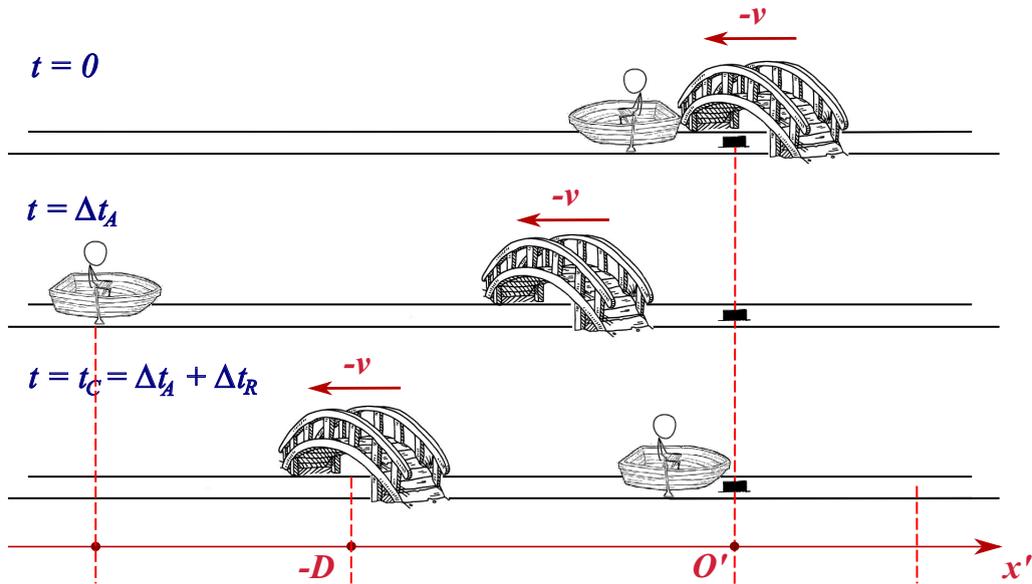


FIGURE 2 – Trajectoires du pont, du pêcheur et de son chapeau vues dans le référentiel de la rivière.

Entre la perte de son chapeau et sa récupération, la trajectoire du pêcheur consiste en un aller-retour sur l'eau, à la vitesse $u'_x = -w$ à l'aller, puis $u'_x = +w$ au retour, jusqu'à rejoindre son chapeau. Dans le référentiel de la rivière, il est évident que les durées des voyages aller et retour **sont égales**. On retrouve alors le résultat précédent, de manière immédiate,

$$x'_{\text{pêcheur}}(t_C) = 0 = -w\Delta t_A + w\Delta t_R \quad \text{d'où} \quad \Delta t_A = \Delta t_R$$

À ce moment, le pont, qui était à l'abscisse $x' = 0$ au moment de la chute du chapeau, est désormais à l'abscisse :

$$x'_{\text{pont}}(t_C) = -D = -v(\Delta t_A + \Delta t_R) = -2v\Delta t_A$$

D'où on déduit immédiatement la vitesse de la rivière par rapport à ses berges :

$$v = \frac{D}{2\Delta t_A} = \frac{5 \text{ km}}{1 \text{ h}} = 5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Ce problème souligne l'importance du choix du référentiel dans l'analyse d'un problème de cinématique, que ce soit en mécanique classique ou relativiste.

3. L'expérience de Michelson et Morley

Une source lumineuse est placée à une distance L d'un miroir et émet un rayon lumineux dans sa direction. Le rayon est réfléchi et revient vers la source.

3.1 — Quel est le temps mis par la lumière pour effectuer l'aller-retour entre la source et le miroir ?

La vitesse de la lumière étant c , le temps Δt_A mis pour le trajet aller est le même que celui pour le trajet retour Δt_R ,

$$\Delta t_A = \frac{L}{c} \quad \Delta t_R = \frac{L}{c} \quad \text{et pour l'aller-retour} \quad \Delta t_{AR} = \Delta t_A + \Delta t_R = \frac{2L}{c}$$

La source et le miroir sont maintenant en translation rectiligne et uniforme dans une direction perpendiculaire à l'axe source-miroir et avec une vitesse v .

3.2 — Représenter graphiquement la situation telle que la voit un observateur immobile. Pour cet observateur, compte-tenu de ce qu'il observe, quel est le temps T_{\perp} mis par le rayon lumineux pour faire l'aller-retour entre la source et le miroir ?

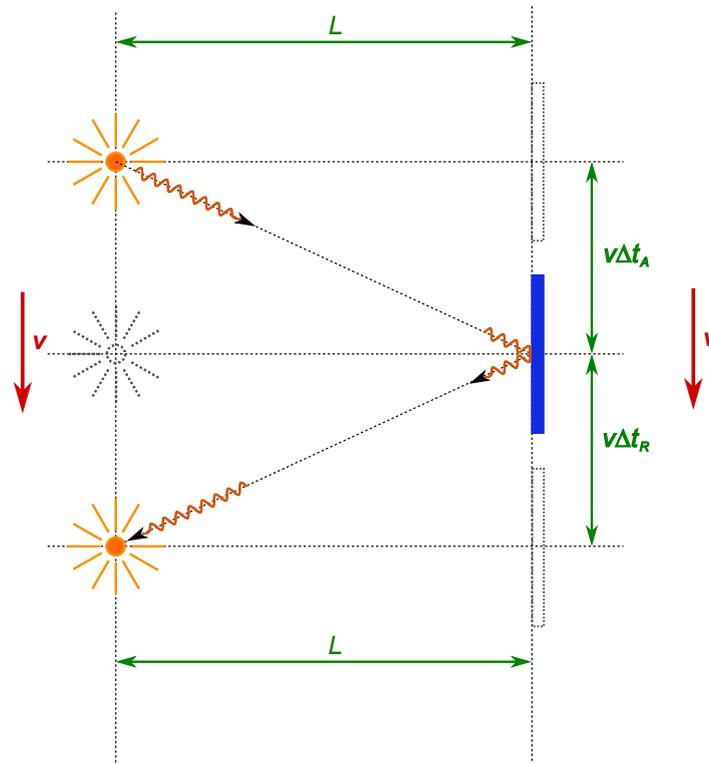


FIGURE 3 – Trajectoire aller-retour du rayon lumineux entre la source et le miroir. Dans le référentiel considéré (éther), la source et le miroir sont en translation uniforme à la vitesse v , dans une direction perpendiculaire à l'axe source-miroir. À l'aller comme au retour, on obtient la distance parcourue par le rayon par le théorème de Pythagore.

Considérons la situation depuis le référentiel de l'observateur immobile, qui est aussi celui de l'éther, dans l'interprétation classique pré-relativiste, et par conséquent, le référentiel où la vitesse de la lumière est c .

En appliquant le théorème de Pythagore sur le trajet aller (de durée Δt_A), on obtient :

$$L^2 + v^2 \Delta t_A^2 = c^2 \Delta t_A^2$$

D'où on déduit l'expression Δt_A de la durée du trajet aller,

$$\Delta t_A = \frac{L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Pour le trajet retour, de durée Δt_R , le raisonnement est identique,

$$\Delta t_R = \frac{L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Et le temps total aller-retour est ainsi :

$$T_{\perp} = \Delta t_{AR} = \Delta t_A + \Delta t_R = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1}$$

3.3 — Répondre à la même question dans le cas où le déplacement se fait dans la direction source-miroir, si cette distance vaut L' . On nomme la durée trouvée T_{\parallel} .

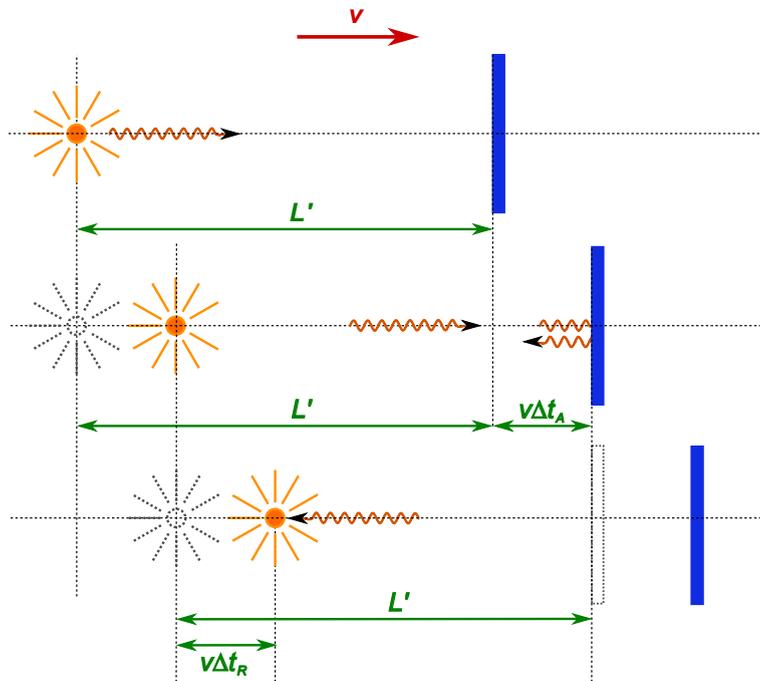


FIGURE 4 – Trajectoire aller-retour du rayon lumineux entre la source et le miroir. Dans le référentiel considéré (éther), la source et le miroir sont en translation uniforme à la vitesse v , dans une direction parallèle à l’axe source-miroir. À l’aller, le rayon lumineux parcourt une distance $L' + v\Delta t_A$, car le miroir s’est éloigné de $v\Delta t_A$ pendant le trajet; au retour, au contraire, comme la source vient à la rencontre du rayon lumineux, le trajet parcouru est $L' - v\Delta t_R$.

Comme précédemment, on raisonne dans le référentiel de l’éther où la vitesse de la lumière est c . Pendant le trajet aller, de durée Δt_A , le rayon lumineux parcourt une distance $L' + v\Delta t_A$, car le miroir s’est éloigné de $v\Delta t_A$ pendant le trajet :

$$c\Delta t_A = L' + v\Delta t_A \quad \text{d'où} \quad \Delta t_A = \frac{L'}{c - v}$$

Au retour, au contraire, la source vient à la rencontre du rayon lumineux, le trajet parcouru par la lumière est réduit d’autant et vaut $L' - v\Delta t_R$. Ce qui donne :

$$c\Delta t_R = L' - v\Delta t_R \quad \text{d'où} \quad \Delta t_R = \frac{L'}{c + v}$$

Le temps nécessaire pour l’aller-retour du rayon lumineux est donc :

$$T_{\parallel} = \Delta t_{AR} = \Delta t_A + \Delta t_R = \frac{2L'}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{2}$$

3.4 — On suppose pour cette question que $L = L'$. Comparer T_{\perp} et T_{\parallel} . Commenter ce résultat en faisant le lien avec l'expérience de Michelson et Morley.

L'expérience de Michelson et Morley vise à mettre en évidence le mouvement de l'interféromètre (solidaire de la Terre) par rapport au référentiel de l'éther, le milieu hypothétique de propagation des ondes lumineuses. Dans le référentiel de l'éther, la durée de parcours des rayons lumineux le long des deux bras est affectée par le mouvement, et $T_{\perp} \neq T_{\parallel}$. D'après ce qui précède, la différence de temps de parcours est :

$$T_{\parallel} - T_{\perp} = \frac{2L}{c} \left[\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] \quad (3)$$

Ce qui implique une différence de marche δ :

$$\delta = c(T_{\parallel} - T_{\perp}) = 2L \left[\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] \approx 2L \left[1 + \frac{v^2}{c^2} - 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right] = L \frac{v^2}{c^2} \quad (4)$$

et induit un décalage du motif des franges de δ/λ où λ est la longueur d'onde de la source monochromatique utilisée. On a ici supposé v^2/c^2 petit, ce qui n'est pas déraisonnable : par exemple, si le référentiel de l'éther est solidaire du système solaire, on s'attend à une vitesse relative de l'ordre $v_{\oplus} \approx 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, i.e. $v_{\oplus}/c \approx 10^{-4}$ soit $v_{\oplus}^2/c^2 \approx 10^{-8}$. Bien sûr, sous cette hypothèse (éther solidaire du système solaire), la vitesse relative de l'interféromètre dépend de l'orientation du montage optique, ainsi que de la période de l'année du fait du mouvement de la terre sur son orbite¹.

On ne peut évidemment pas mesurer le décalage du motif des franges par rapport à la situation où l'interféromètre serait immobile par rapport à l'éther ; par contre, on peut très bien échanger les bras perpendiculaire et parallèle de l'interféromètre en le faisant pivoter sur lui-même de 90° . Dans ce cas, la différence de marche entre les deux configurations sera 2δ , et le motif de franges se décalera de :

$$\Delta p = 2 \frac{\delta}{\lambda} \approx \frac{2L}{\lambda} \frac{v^2}{c^2} \quad (5)$$

Ainsi, si les bras de l'interféromètre font 1 m, pour une source monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 500 \text{ nm}$, lorsqu'on fait tourner l'interféromètre de 90° , on s'attend à un décalage du motif des franges de :

$$\Delta p = 2 \frac{\delta}{\lambda} \approx \frac{2L}{\lambda} \frac{v^2}{c^2} \approx 0.04 \text{ interfrange} \quad (6)$$

ce qui est tout à fait mesurable. En pratique, on mesure la position des franges pour différentes positions azimutales de l'interféromètre (typiquement 16 angles différents dans les expériences de Miller), et on note la position des franges pour chaque angle.

Lorsque Michelson et Morley réalisent l'expérience, ils ne constatent aucun décalage du motif de franges. L'expérience sera répétée de nombreuses fois, à différentes périodes de l'année, avec des interféromètres de plus en plus grands (la sensibilité augmente avec la longueur L des bras) et de sensibilité croissante, mais jamais aucun décalage significatif dû au *vent d'éther* n'a pu être mis en évidence, ce qui invalide l'hypothèse de l'existence de l'éther et d'un référentiel privilégié associé au support de propagation de la lumière.

Le tableau ci-dessous (tiré de Shankland, et al., *Rev. Mod. Phys.* 27, 167 (1955)) regroupe les résultats obtenus par Michelson et Morley, ainsi que ceux des tentatives suivantes au début du 20^{ème} siècle.

1. On pourrait évidemment considérer que l'éther est solidaire du référentiel galactique plutôt que du système solaire, mais l'effet serait encore plus conséquent, avec $v_{\odot} \approx 200 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

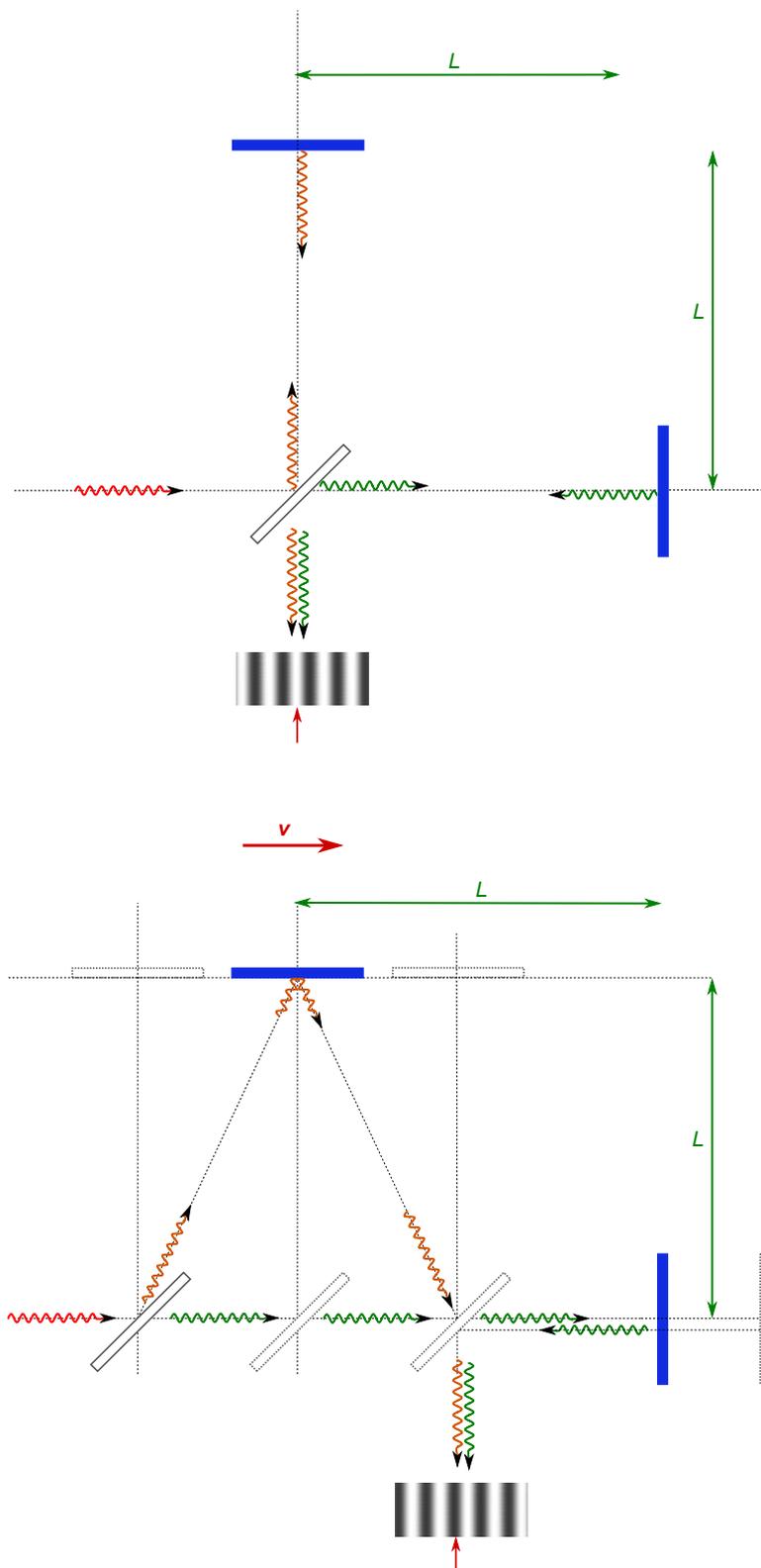


FIGURE 5 – *Interféromètre de Michelson. En haut : trajectoires des rayons sur les deux bras, vus dans le référentiel où le dispositif est au repos. En bas : trajectoires des rayons sur les deux bras, lorsque l'interféromètre est en mouvement à la vitesse v par rapport au référentiel de l'éther. En orange, trajectoire des rayons sur le bras perpendiculaire au mouvement relatif; en vert, trajectoire des rayons sur le bras parallèle au mouvement relatif à l'éther.*

Expérience	Longueur des bras L	Décalage attendu	Observation	Rapport
Michelson (1881)	1.20 m	0.04 frange	0.02 frange	2
Michelson & Morley (1887)	11.00 m	0.40 frange	0.01 frange	40
Morley & Miller (1902-04)	32.20 m	1.13 frange	0.015 frange	80
Illingworth (1927)	2.00 m	0.07 frange	0.0004 frange	175
Joos (1930)	21.00 m	0.75 frange	0.002 frange	375

3.5 — On suppose maintenant que $L \neq L'$. Quelle devrait être la valeur de L' pour que la condition $T_{\perp} = T_{\parallel}$ soit vérifiée ?

Pour qu'il n'y ait aucun décalage des franges, soit $\Delta p = 0$, comme constaté expérimentalement, il faut que $T_{\parallel} = T_{\perp}$, c'est à dire :

$$L' = L_{\parallel} = L_{\perp} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < L_{\perp} = L$$

et ce, même lorsqu'on échange les bras par rotation du montage. Il faut donc imaginer que le bras parallèle au mouvement relatif par rapport à l'éther voit sa longueur contractée d'un facteur $\sqrt{1 - v^2/c^2}$; autrement dit, que les objets physiques se contractent longitudinalement dans le vent d'éther de telle sorte qu'on obtienne exactement le résultat négatif de l'expérience de Michelson.

Cette proposition (ainsi que la possibilité que l'éther soit entraîné par les objets en mouvement), quelque peu *ad hoc*, sera avancée notamment par FitzGerald (1889) et par Lorentz (1892) pour sauver la théorie de l'éther luminifère, avant la formulation de la relativité restreinte par Einstein (1905).

4. Invariance de l'intervalle d'espace-temps

4.1 — Montrez que la transformation de Lorentz entraîne l'invariance de l'intervalle élémentaire d'espace-temps ds^2 :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{7}$$

Considérons un événement quelconque E , de coordonnées (ct, x, y, z) dans un référentiel inertiel \mathcal{R} . Dans un autre référentiel inertiel \mathcal{R}' , en translation uniforme à la vitesse v par rapport au référentiel \mathcal{R} , les coordonnées du même événement E s'obtiennent par la transformation de Lorentz :

$$\begin{cases} ct' = \gamma (ct - \beta x) \\ x' = \gamma (x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Considérons un intervalle élémentaire d'espace-temps $(c dt, dr) = (c dt, dx, dy, dz)$ entre deux événements infiniment proches, vus dans le référentiel inertiel \mathcal{R} . Dans \mathcal{R}' cet intervalle devient :

$$\begin{cases} c dt' = \gamma (c dt - \beta dx) \\ dx' = \gamma (dx - \beta c dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases}$$

Écrivons la pseudo-norme carrée de cet intervalle dans \mathcal{R}' :

$$\begin{aligned} ds'^2 &= c^2 dt'^2 - dr'^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = \gamma^2 (c dt - \beta dx)^2 - \gamma^2 (dx - \beta c dt)^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= \gamma^2 c^2 dt^2 + \gamma^2 \beta^2 dx^2 - 2\gamma^2 \beta c dt dx - \gamma^2 dx^2 - \gamma^2 \beta^2 c^2 dt^2 + 2\gamma^2 \beta c dt dx - dy^2 - dz^2 \\ &= \gamma^2 (1 - \beta^2) c^2 dt^2 - \gamma^2 (1 - \beta^2) dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds^2. \end{aligned}$$

La pseudo-norme carrée de l'intervalle élémentaire d'espace-temps est un invariant de Lorentz.

5. À la croisée des destinées : lignes d'univers et diagrammes de Minkowski

Leia et Han Solo se déplacent avec une vitesse relative constante v . L'axe e_x des abscisses de Leia est orienté selon la vitesse de Han, l'axe $e_{x'}$ des abscisses de Han étant opposé à la vitesse de Leia.

5.1 — Tracez les lignes d'univers, c'est à dire les lignes constituées de l'ensemble des événements des vies respectives de Leia et de Han :

(i) sur un graphe d'espace-temps (x, t) dans le repère de Leia.

(ii) sur un graphe d'espace-temps (x', t') dans le repère de Han.

Han et Leia mettent leurs montres à $t = t' = 0$ lorsqu'ils se croisent : autrement dit, $x = x' = 0$ quand $t = t' = 0$.

Pour un événement de coordonnées (ct, x, y, z) dans \mathcal{R} , ses coordonnées deviennent (ct', x', y', z') dans \mathcal{R}' avec (transformation de Lorentz) :

$$\left\{ \begin{array}{l} ct' = \gamma (ct - \beta x) \\ x' = \gamma (x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right. \quad \text{et, réciproquement} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct = \gamma (ct' + \beta x') \\ x = \gamma (x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \end{array} \right.$$

Construisons le diagramme d'espace-temps dit "de Minkowski" étape par étape.

On place traditionnellement l'axe d'espace (Ox) en abscisse, et l'axe du temps ($Oxct$) en ordonnée. L'axe des temps t' du référentiel \mathcal{R}' se confond avec la *ligne d'Univers* de Han; c'est l'ensemble des points-événements pour lesquels $x' = 0$. D'après ce qui précède,

$$x' = 0 \quad \text{implique} \quad \gamma(x - \beta ct) = 0 \quad \text{i.e.} \quad x = \beta ct \quad \text{ou encore} \quad ct = \frac{1}{\beta}x$$

ce qui correspond à une droite de pente $+1/\beta$ (en général β est petit devant 1, et par conséquent $1/\beta$ est grand), passant par l'origine.

De la même manière, l'axe des x' correspond à l'ensemble des points-événements pour lesquels $t' = 0$, ce qui implique :

$$t' = 0 \quad \text{implique} \quad \gamma(ct - \beta x) = 0 \quad \text{i.e.} \quad ct = \beta x.$$

On peut ainsi tracer les axes Ox' et $Oxct'$ dans le repère $(Ox, Oxct)$ (fig. 6, haut).

En procédant de même cette fois dans le repère $(Ox', Oxct')$, on montre que l'axe des t correspond à la droite $ct' = -(1/\beta)x'$, et que l'axe des x est la droite $ct' = -\beta x$ dans le repère $(Ox', Oxct')$ (fig. 6, bas).

5.2 — Représentez, sur le graphe (x, t) , deux événements A et B. Calculez les intervalles de coordonnées $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ entre A et B, pour Leia, en fonction des intervalles $\Delta t', \Delta x', \Delta y', \Delta z'$ pour Han. Calculez $c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2$.

Voir figure 6.

La transformation de Lorentz nous donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} c\Delta t' = \gamma (c\Delta t - \beta\Delta x) \\ \Delta x' = \gamma (\Delta x - \beta c\Delta t) \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} c\Delta t = \gamma (c\Delta t' + \beta\Delta x') \\ \Delta x = \gamma (\Delta x' + \beta c\Delta t') \\ \Delta y = \Delta y' \\ \Delta z = \Delta z' \end{array} \right.$$

Et, de manière immédiate,

$$c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2.$$

par invariance de $(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$ (cf. exercice précédent).

5.3 — Représentez, sur le graphe (x, t) , deux événements C et D de la vie de Han. Calculez la valeur de l'intervalle Δt entre C et D pour Leia, en fonction de $\Delta t'$, pour Han, et de la vitesse de celui-ci par rapport à celle-là. Pour donner une idée de l'effet en question, envisagez le cas $v = 3c/5$, et $\Delta t' = 1$ s.

Comme vu précédemment, on aura :

$$c\Delta t = \gamma (c\Delta t' + \beta\Delta x') \quad \text{i.e.} \Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{\beta\Delta x'}{c} \right)$$

Comme les événements C et D se produisent tous deux en $x' = 0$, sur la ligne d'univers de Han, on a $\Delta x' = 0$ et par conséquent,

$$\Delta t = \gamma\Delta t' = \gamma\Delta\tau$$

où τ est le *temps propre* de Han.

Pour $v = 3c/5$, et $\Delta t' = 1$ s, on trouve numériquement :

$$\gamma(v) = \frac{5}{4} = 1.25 \quad \text{et} \quad \Delta t = 1.25 \text{ s.}$$

Deux événements séparés d'une seconde dans le référentiel de Han apparaissent ainsi séparés de 1.25 s dans le référentiel de Leia ("dilatation du temps").

Bien évidemment, la situation est symétrique : deux événements séparés d'une seconde dans le référentiel de Leia apparaîtront aussi comme séparés de 1.25 s dans le référentiel de Han (absence de référentiel privilégié). Malgré les apparences, il n'y a là aucune contradiction.

Dans cette description élémentaire, les deux référentiels sont galiléens, donc en translation uniforme l'un par rapport à l'autre, les deux protagonistes ne pourront jamais se croiser et comparer le temps écoulé à leurs horloges respectives.

Pour que les deux personnages puissent de nouveau se croiser, il est nécessaire que l'un des deux fasse demi-tour, mais dans ce cas son référentiel n'est plus galiléen (cf. l'étude détaillée du "paradoxe" des jumeaux).

5.4 — Han garde un bras tendu vers l'avant (c'est à dire selon l'axe e_x'). Déterminez et représentez la ligne d'univers du bout de l'index de Han sur le graphe (x, t) . Quelle définition peut adopter

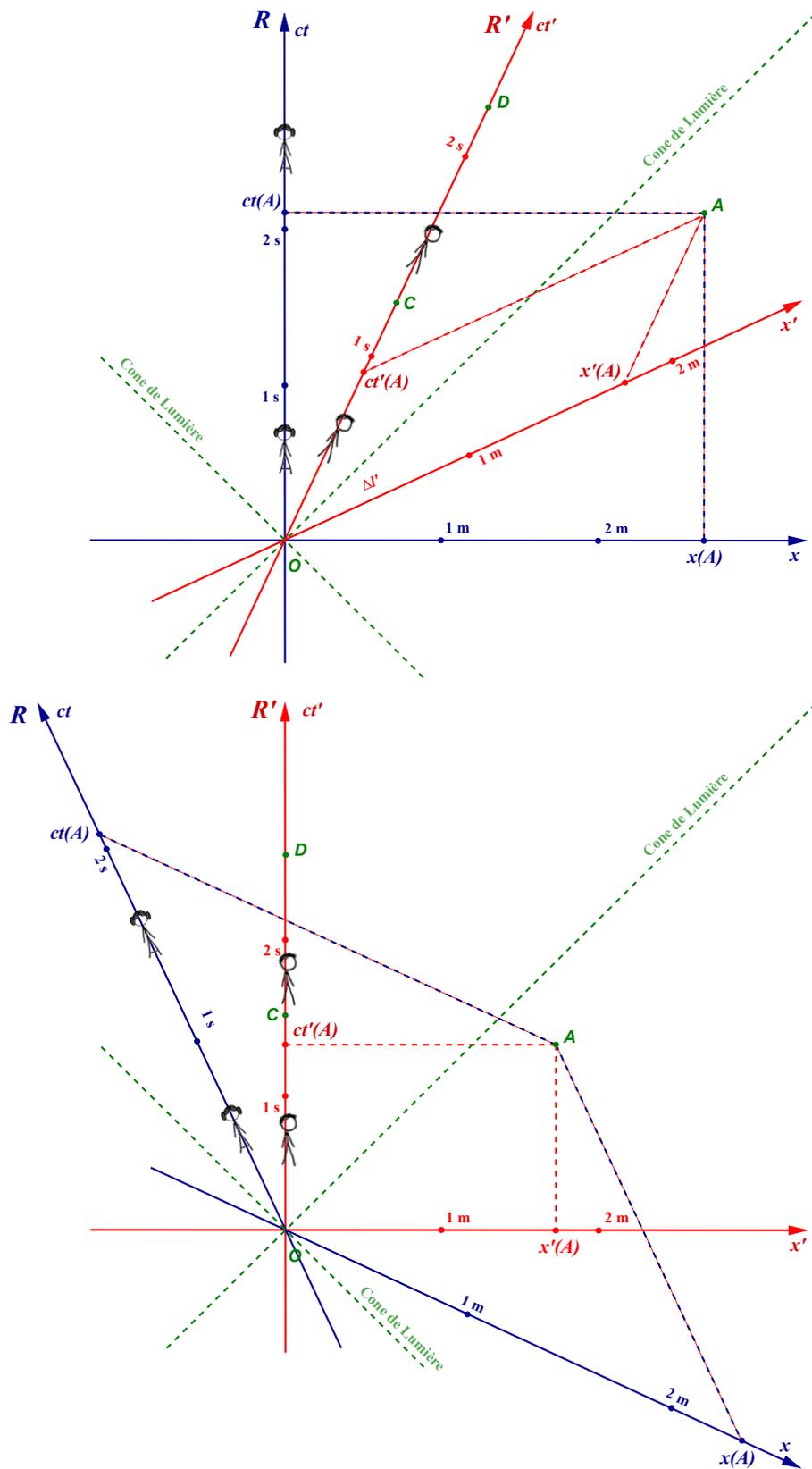


FIGURE 6 – Diagrammes de Minkowski. (Haut) : diagramme du point de vue de Leia, dans le référentiel \mathcal{R} ; (Bas) : diagramme du point de vue de Han, dans le référentiel \mathcal{R}' .

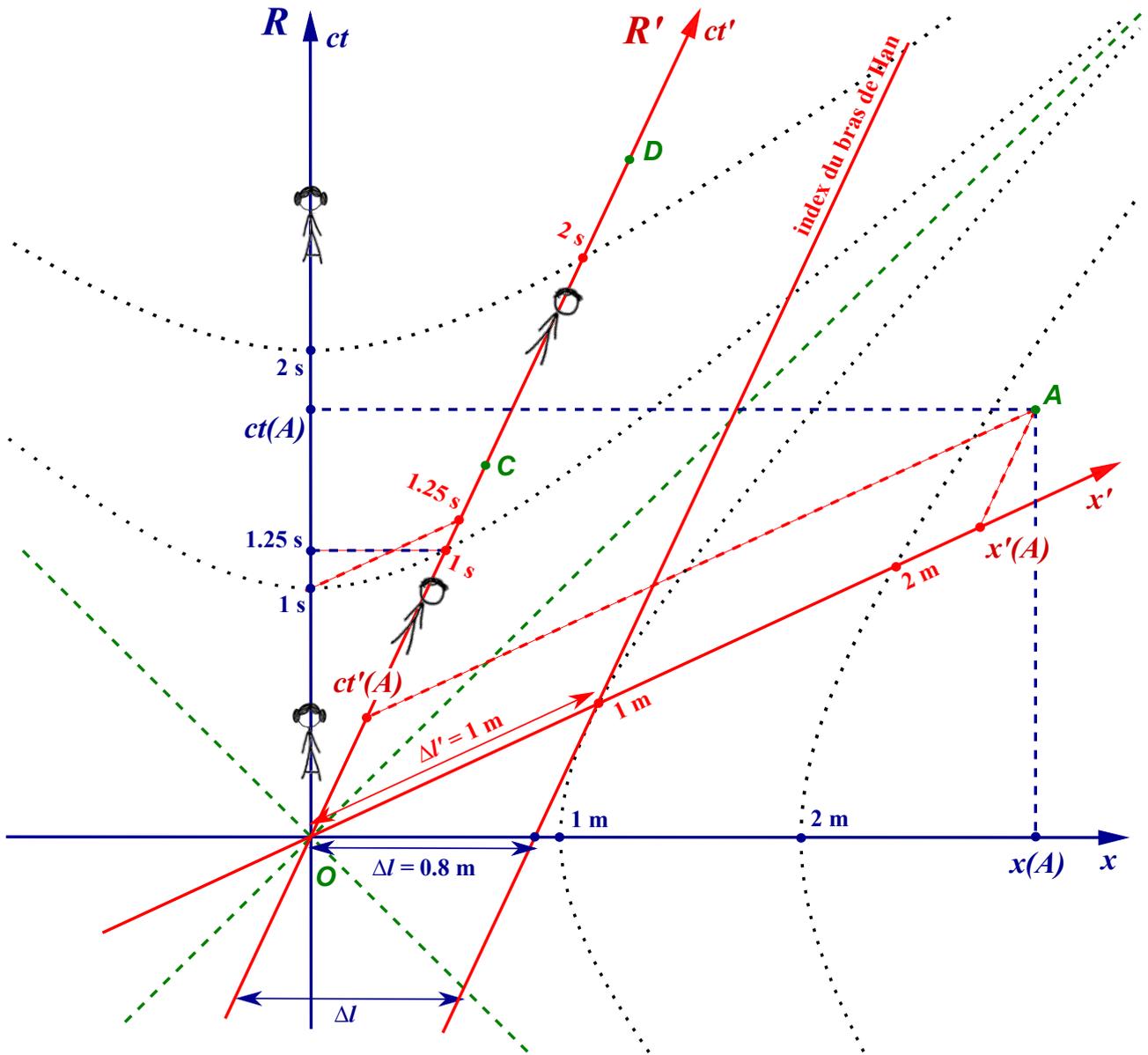


FIGURE 7 – Diagramme d’espace-temps (diagramme de Minkowski). Lignes d’univers de Leïa, restée en $x = 0$ (en bleu, axe Oct) et de Han, en translation uniforme à la vitesse $v = v(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ par rapport à Leïa. Les familles d’hyperboles $t^2 - x^2/c^2 = cte$ et $x^2 - c^2t^2 = cte$ permettent de graduer les axes. On constate ainsi que deux événements de la vie de Han séparés d’une seconde dans son référentiel (temps propre) sont séparés par 1.25 s dans le référentiel \mathcal{R} de Leïa. On constate aussi qu’un objet de longueur $\Delta l' = 1\text{ m}$ dans \mathcal{R}' ne mesure que $\Delta l = 0.8\text{ m}$ dans \mathcal{R} . Han aboutira bien sûr à des conclusions similaires pour des événements de la vie de Leïa et pour un objet fixe dans \mathcal{R}' (tous les référentiels galiléens étant équivalents).

Leia pour la grandeur qu'elle va appeler "longueur du bras de Han"? Calculez cette longueur $\Delta\ell$ en fonction de la longueur $\Delta\ell'$ pour Han et de sa vitesse. Envisagez le cas $v = 3c/5$, $\Delta\ell' = 1$ m.

Une mesure de longueur s'effectue en repérant *simultanément* les positions des deux extrémités de l'objet à mesurer. Comme la simultanéité est un concept relatif en relativité restreinte, des observateurs placés dans des référentiels différents mesurent ainsi des longueurs différentes pour un même objet (fig. 7).

Dans le référentiel \mathcal{R}' , la trajectoire de Han est donnée par $x'_{\text{Han}}(t') = 0$, tandis que celle du bout de son index est $x'_{\text{index}}(t) = \Delta\ell'$.

Si on utilise la transformation de Lorentz, on peut écrire, à tout instant t dans \mathcal{R} :

$$\begin{cases} x'_{\text{Han}} = \gamma(x_{\text{Han}} - \beta ct) \\ x'_{\text{index}} = \gamma(x_{\text{index}} - \beta ct) \end{cases}$$

Si on se place à un instant t donné dans le référentiel de Leia (simultanéité dans \mathcal{R}), on peut alors écrire (l'expression se simplifie car il s'agit du même instant t) :

$$\Delta\ell' = x'_{\text{index}} - x'_{\text{Han}} = \gamma(x_{\text{index}} - x_{\text{Han}}) = \gamma\Delta\ell \quad \text{soit} \quad \Delta\ell = \frac{1}{\gamma}\Delta\ell' \leq \Delta\ell'$$

Numériquement, pour $v = 3c/5$, et $\Delta\ell' = 1$ m, on obtient :

$$\Delta\ell = \frac{1}{\gamma}\Delta\ell' = 0.8 \text{ m} < 1 \text{ m}$$

C'est l'effet de "contraction des longueurs". De la même manière, l'effet est symétrique : un objet de 1 m de long immobile dans le référentiel de Leia apparaîtra contracté du même facteur $1/\gamma$ pour Han.

Pour la dilatation du temps comme pour la contraction des longueurs, on parle parfois d'un "effet de perspective dans l'espace-temps".

5.5 — Tracez sur le graphe (x, t) :

- (i) quelques lignes d'univers du réseau $x' = \text{cte}$ pour Han.
- (ii) quelques lignes du réseau $t' = \text{cte}$ pour Han.

Cf. figure 7.

5.6 — Quelles sont, sur ce graphe, les lignes qui représentent les axes t' et x' de Han? Soit un événement A. Représentez, sur le graphe (x, t) , ses coordonnées pour Leia et pour Han respectivement.

Cf. figure 7.

5.7 — Reste à graduer les axes t' et x' sur le graphe (x, t) .

- (i) Représentez sur le graphe la partie $t > 0$ de l'hyperbole $t^2 - x^2/c^2 = 1 \text{ s}^2$. à quelle valeur de t correspond son intersection avec l'axe t ? A quelle valeur de t' correspond son intersection avec la représentation de l'axe t' ?
- (ii) Mêmes questions à propos de l'hyperbole $x^2 - c^2t^2 = 1 \text{ m}^2$ et de ses intersections avec les axes x et x' .

Considérons la branche $t > 0$ de l'hyperbole d'équation $t^2 - x^2/c^2 = 1 \text{ s}^2$. De manière immédiate, l'intersection avec l'axe des t se produit lorsque $x = 0$, ce qui correspond à la graduation $t = 1$ s (ou plus précisément $ct = c \times 1$ s).

Par ailleurs, on a, par invariance de l'intervalle d'espace-temps, pour n'importe quel point événement E de coordonnées (ct, x) dans \mathcal{R} et (ct', x') dans \mathcal{R}' (on considère ici l'intervalle entre E et l'origine) :

$$t'^2 - x'^2/c^2 = t^2 - x^2/c^2 = 1 \text{ s}^2$$

L'intersection de l'hyperbole $t^2 - x^2/c^2 = 1 \text{ s}^2$ avec l'axe des t' a lieu quand $x' = 0$, et par conséquent quand $t'^2 = t^2 - x^2/c^2 = 1 \text{ s}^2$, c'est à dire pour $t' = 1 \text{ s}$. Ce qui nous permet de graduer l'axe des t' (fig. 7).

On peut montrer de même que l'hyperbole $x^2 - c^2t^2 = 1 \text{ m}^2$ coupe l'axe des x en $x = 1 \text{ m}$, et coupe aussi l'axe des x' en $x' = 1 \text{ m}$, ce qui permet de graduer l'axe des x' .

5.8 — Représentez sur le graphique :

- (i) le temps t de l'événement ($t' = 1 \text{ s}$, $x' = 0$) de la vie de Han.
- (ii) la longueur ℓ attribuée au bras de Han par Leia.

Voir figure 7. La figure 8 présente la même situation décrite dans une variante de ces diagrammes d'espace-temps, les diagrammes symétriques de Loedl.

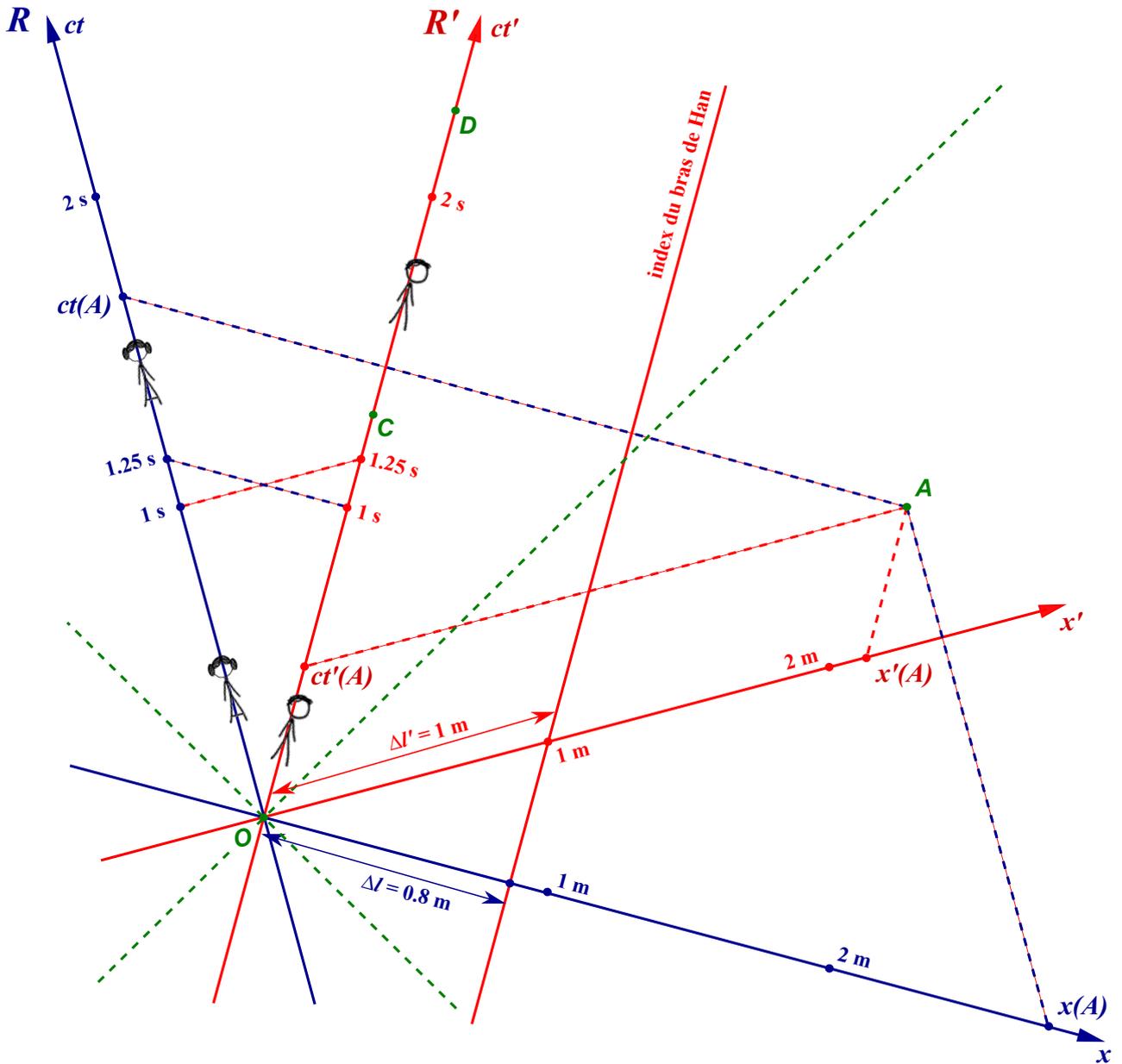
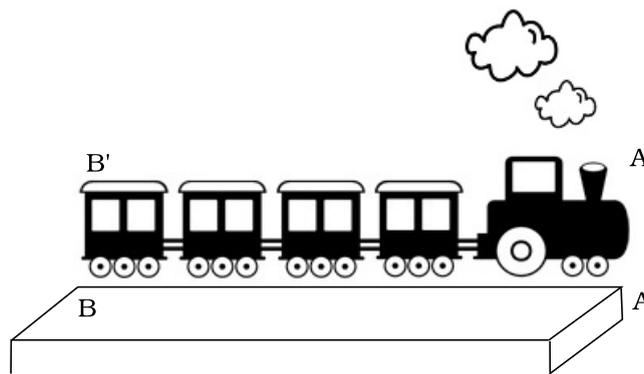


FIGURE 8 – Diagramme d’espace-temps, variante dite “diagramme de Loedl”. Contrairement aux diagrammes précédents, ce type de diagramme d’espace-temps présente l’avantage de ne pas favoriser graphiquement l’un des référentiels par rapport à l’autre, ce qui est plus conforme à la symétrie effective entre les référentiels. Les graduations sont aussi identiques sur tous les axes, ce qui en simplifie la construction et l’interprétation. Dans la suite des exercices, nous utiliserons ces deux types de diagrammes.

6. Contraction des longueurs et ordre temporel des événements

L'exercice suivant est un "classique académique" : il n'existe bien évidemment pas de train suffisamment rapide pour que les effets relativistes soient raisonnablement mesurables. Cet exemple permet toutefois d'illustrer les effets de perspectives dans l'espace-temps. Il existe un certain nombre de variantes de ce problème, avec par exemple deux trains qui se croisent, etc. Une variante plus complexe est le problème célèbre de "la règle et du trou", traité plus loin dans une déclinaison "science-fiction".

On considère un train de longueur L se déplaçant à la vitesse v et passant devant un quai de gare sans s'arrêter. La longueur du quai est aussi L et lors d'un précédent voyage, le train s'étant arrêté, le chef de gare et le chauffeur du train ont pu vérifier à l'arrêt que train et quai avaient exactement la même longueur.



Lors de ce passage par la station, le train se déplace à vitesse constante et ne s'arrête pas en gare. On considère donc 4 événements :

- (p) La tête du train A' coïncide avec l'arrière du quai B .
- (q) La tête du train A' (avec la locomotive et le conducteur) coïncide avec l'avant du quai A (où se tient le chef de gare).
- (r) La queue du train B' coïncide avec l'arrière du quai B .
- (s) La queue du train B' coïncide avec l'avant du quai A .

Pour simplifier l'analyse, on supposera que le chef de gare (A) et le conducteur du train (A') synchronisent leurs horloges respectives à $t = t' = 0$ lorsqu'ils se croisent. On supposera aussi qu'on dispose d'observateurs et d'horloges en queue de train et à l'arrière du quai, et que toutes les horloges d'un référentiel donné ont été préalablement synchronisées entre elles (par des échanges de signaux lumineux).

6.1 — Établissez les coordonnées spatio-temporelles des 4 événements (p), (q), (r) et (s) dans les deux référentiels, \mathcal{R} (le quai) et \mathcal{R}' (le train). On pourra se servir de la transformation de Lorentz.

On appellera \mathcal{R} le référentiel du quai, et \mathcal{R}' celui du train.

Du fait du choix des coordonnées spatiales et temporelles dans les deux référentiels considérés, les coordonnées de l'événement (q) (à savoir la coïncidence de l'avant du train A' avec la tête du quai A) sont, de manière immédiate, dans \mathcal{R} et dans \mathcal{R}' respectivement :

$$x(q) = 0 \quad t(q) = 0 \quad \text{et} \quad x'(q) = 0 \quad t'(q) = 0$$

De même, les coordonnées spatiales des événements (p) , (r) et (s) sont immédiates :

$$\begin{aligned}x(p) &= x(B) = -L & x'(p) &= x'(A') = 0 \\x(r) &= x(B) = -L & x'(r) &= x'(B') = -L \\x(s) &= x(A) = 0 & x'(s) &= x'(B') = -L\end{aligned}$$

Pour déterminer les coordonnées temporelles de ces trois événements, on peut utiliser le fait que *le quai a pour longueur L dans le référentiel du quai, et le train a pour longueur L dans le référentiel du train.*

Ainsi, entre les événements $(p) : A' \equiv B$ et $(q) : A' \equiv A$, l'avant du train A' a parcouru toute la longueur du quai, **qui mesure L dans le référentiel du quai \mathcal{R}** , à la vitesse v . L'intervalle de temps $\Delta t(p \rightarrow q)$ entre ces deux événements, **vu dans le référentiel du quai \mathcal{R}** , vaut donc $\Delta t(p \rightarrow q) = L/v$. On en déduit la coordonnée temporelle de l'événement (p) dans le référentiel \mathcal{R} :

$$t(p) = t(q) - \Delta t(p \rightarrow q) = 0 - L/v = -L/v$$

Puis, en utilisant la transformation de Lorentz, on établit la coordonnée $t'(p)$ du même événement, mais dans le référentiel du train \mathcal{R}' :

$$t'(p) = \gamma \left(t(p) - \frac{\beta x(p)}{c} \right) = \gamma \left(-\frac{L}{v} + \frac{vL}{c^2} \right) = -\frac{L\gamma}{v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = -\frac{1}{\gamma} \frac{L}{v}$$

On peut tenir un raisonnement analogue pour l'intervalle de temps entre les événements $(q) : A' \equiv A$ et $(s) : B' \equiv A$. Entre ces deux événements, l'avant du quai A a parcouru toute la longueur du train, qui mesure L **dans le référentiel du train \mathcal{R}'** , à la vitesse $-v$. L'intervalle de temps $\Delta t'(q \rightarrow s)$ entre ces deux événements, **vu cette fois dans le référentiel du train \mathcal{R}'** , vaut donc $\Delta t'(q \rightarrow s) = +L/v$. On en déduit la coordonnée temporelle de l'événement (s) cette fois dans le référentiel \mathcal{R}' :

$$t'(s) = t(q) + \Delta t'(q \rightarrow s) = 0 + L/v = +L/v$$

Puis, en utilisant la transformation de Lorentz inverse, on établit la coordonnée $t(q)$ du même événement dans le référentiel du quai \mathcal{R} :

$$t(s) = \gamma \left(t'(s) + \frac{\beta x'(s)}{c} \right) = \gamma \left(\frac{L}{v} - \frac{vL}{c^2} \right) = \frac{L\gamma}{v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = +\frac{1}{\gamma} \frac{L}{v}$$

Enfin, on peut établir les coordonnées temporelles de l'événement (r) de deux manières : soit à partir de celles de l'événement (p) en raisonnant dans \mathcal{R}' , ou à partir de celles de (s) en raisonnant dans \mathcal{R} . Suivons cette dernière voie : entre les événements (r) et (s) , l'arrière du train B' a parcouru toute la longueur du quai, qui mesure L **dans le référentiel du quai \mathcal{R}** , à la vitesse v . L'intervalle de temps $\Delta t(r \rightarrow s)$ entre ces deux événements, **vu cette fois dans le référentiel du quai \mathcal{R}** , vaut donc $\Delta t(r \rightarrow s) = +L/v$. On en déduit la coordonnée temporelle de l'événement (r) dans le référentiel \mathcal{R} :

$$t(r) = t(s) - \Delta t(r \rightarrow s) = \frac{1}{\gamma} \frac{L}{v} - L/v = \frac{L\gamma}{v} \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right)$$

Puis, en utilisant la transformation de Lorentz, on établit la coordonnée $t'(r)$ du même événement dans le référentiel du train \mathcal{R}' :

$$t'(r) = \gamma \left(t(r) - \frac{\beta x(r)}{c} \right) = \gamma \left(\frac{1}{\gamma} \frac{L}{v} - \frac{L}{v} + \frac{vL}{c^2} \right) = \frac{L\gamma}{v} \left[\frac{1}{\gamma} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right] = \frac{L}{v} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right)$$

Les coordonnées des 4 événements considérés sont regroupées dans le tableau suivant :

Événement	\mathcal{R}	\mathcal{R}'
<p>(p) : $A' \equiv B$</p>	$x = -L$ $t = -\frac{L}{v}$	$x' = 0$ $t' = -\frac{1}{\gamma} \frac{L}{v}$
<p>(q) : $A' \equiv A$</p>	$x = 0$ $t = 0$	$x' = 0$ $t' = 0$
<p>(r) : $B' \equiv B$</p>	$x = -L$ $t = \frac{L}{v} \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) < 0$	$x' = -L$ $t' = \frac{L}{v} \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) > 0$
<p>(s) : $B' \equiv A$</p>	$x = 0$ $t = \frac{1}{\gamma} \frac{L}{v}$	$x' = -L$ $t' = \frac{L}{v}$

Il est aussi possible d'établir les coordonnées temporelles de tous les événements en résolvant pour chaque événement le système de deux équations à deux inconnues (t, t') formé par les équations de la transformation de Lorentz, ce qui donne bien sûr le même résultat.

6.2 — Quelle est la longueur du train dans son référentiel \mathcal{R}' ? vu du quai (référentiel \mathcal{R}) ?

Dans son propre référentiel, la longueur du train est sa longueur propre, à savoir L . Vu dans le référentiel du quai, il apparaît contracté et sa longueur dans \mathcal{R} est L/γ . C'est cohérent par exemple avec l'intervalle de temps entre les événements (q) et (s) mesuré dans \mathcal{R} : le train a défilé devant l'avant du quai en un temps $L/(\gamma v)$, car sa longueur dans \mathcal{R} est justement L/γ .

6.3 — Quelle est la longueur du quai vu dans le référentiel \mathcal{R}' du train ?

De la même manière, le quai est contracté dans \mathcal{R}' et sa longueur y est L/γ .

6.4 — Commentez l'ordre des événements (q) et (r) dans les 2 référentiels. Qu'en concluez-vous ? Est-ce cohérent avec les points de vue des deux observateurs sur les longueurs du train et du quai ?

On note que $t(r) < 0$ dans le référentiel \mathcal{R} du quai, tandis que $t'(r) > 0$ dans le référentiel du train \mathcal{R}' . Autrement dit, la coïncidence de l'arrière du train avec celle de l'arrière du quai se produit **avant** celle de la tête du train avec l'avant du quai dans le référentiel du quai, mais elle se produit **après** dans le référentiel du train. L'ordre de ces deux événements s'inverse selon le référentiel considéré. C'est cohérent avec l'effet de contraction des longueurs : dans le référentiel du quai, le train est plus court que le quai et la coïncidence des extrémités arrières du quai et du train se produit donc avant celle de leurs extrémités avant ; au contraire, dans le référentiel du train, c'est le quai qui est plus court, et la coïncidence des extrémités arrières du quai et du train se produit après celle de leurs extrémités avant. Il n'y a là aucune contradiction.

6.5 — Quelle est nécessairement la nature de l'intervalle d'espace-temps $\tilde{q}r$? Quelles sont les conséquences en terme de causalité ?

L'ordre des événements (q) et (r) s'inversant entre les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' , l'intervalle d'espace-temps $\tilde{q}r$ est nécessairement de **genre espace**. On peut vérifier algébriquement que $\tilde{q}r^2 < 0$. Les événements (q) et (r) n'appartiennent pas au même cône de lumière, et il ne peut exister aucun lien causal entre ces deux événements.

6.6 — Tracez une représentation des tubes d'Univers du train et du quai dans les deux référentiels. Commentez.

La succession des événements qui se produisent lors du croisement du train et du quai est représentée sur les figures 9 (diagramme de Loedl) et 10 (diagramme de Minkowski).

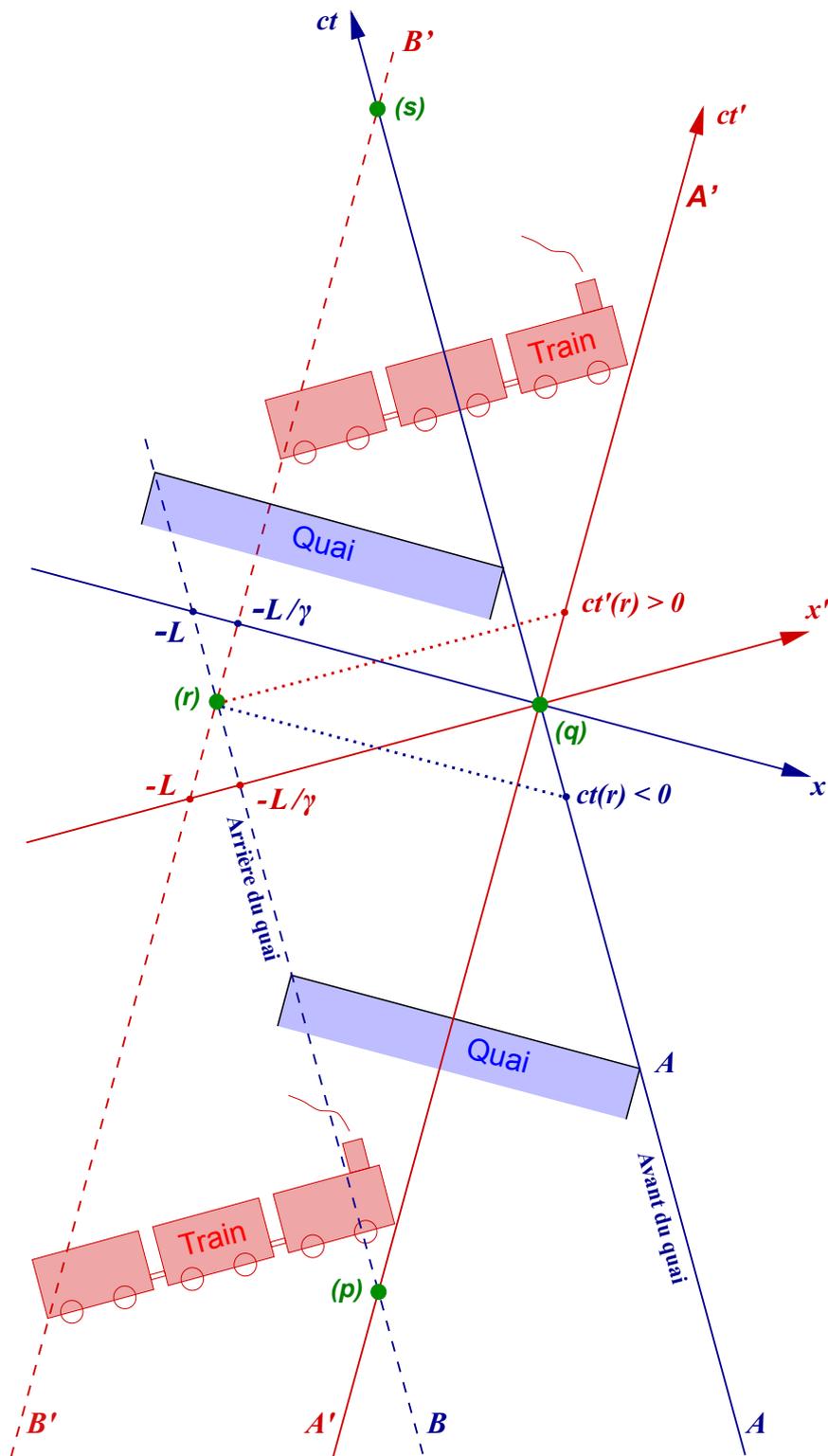


FIGURE 9 – Diagramme d’espace-temps (diagramme de Loedl). Trajectoires du quai (en bleu, dans \mathcal{R}) et du train (en rouge, dans \mathcal{R}'), avec la représentation de leurs “tubes d’Univers”. On voit directement que la longueur du quai est L/γ dans le référentiel du train, et que réciproquement, la longueur du train est L/γ dans le référentiel du quai. L’inversion de l’ordre temporel des événements q et r est aussi clairement visible.

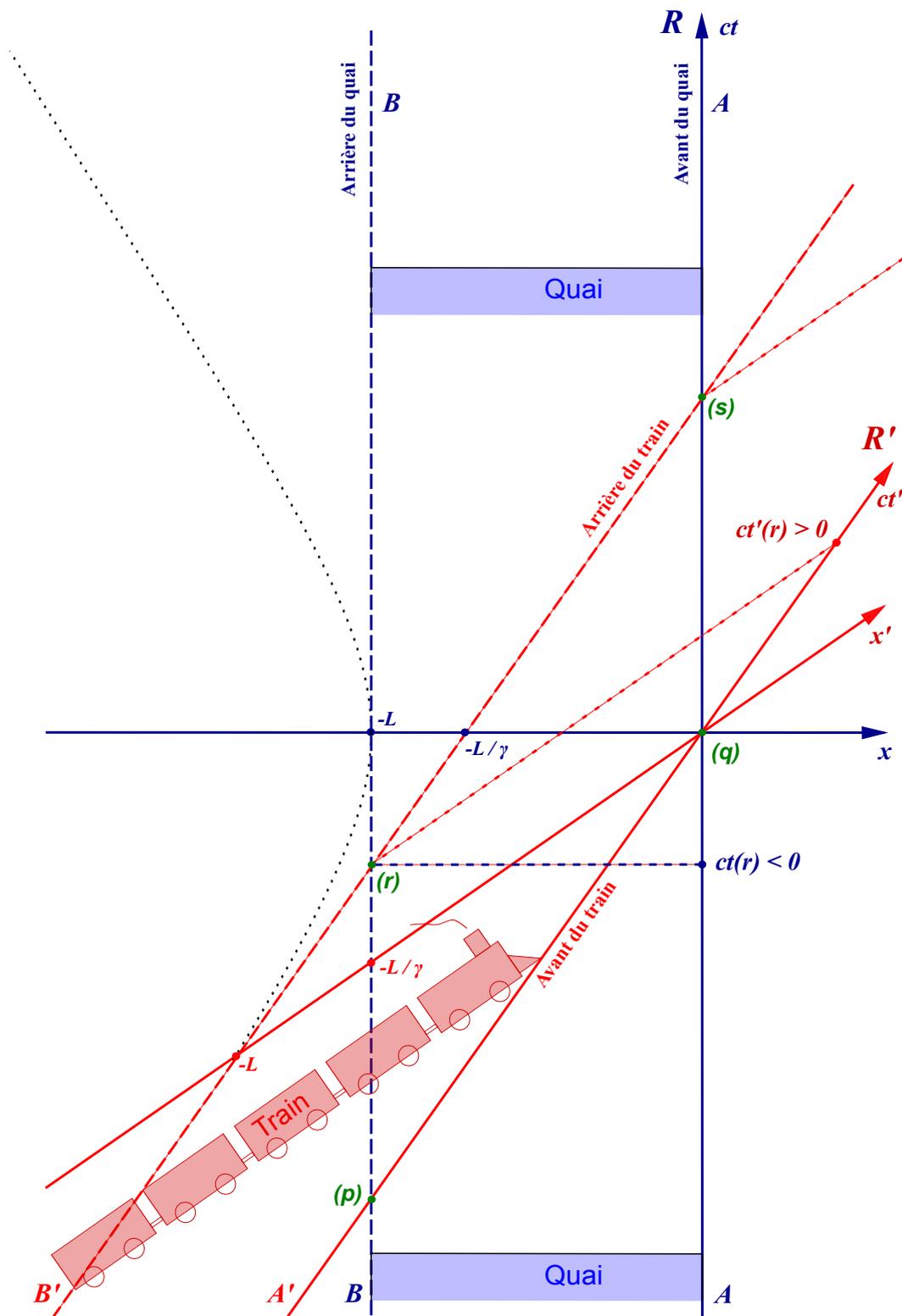


FIGURE 10 – Diagramme d’espace-temps (diagramme de Minkowski). Trajectoires du quai (en bleu, dans \mathcal{R}) et du train (en rouge, dans \mathcal{R}'), avec la représentation de leurs “tubes d’Univers”. On voit directement que la longueur du quai est L/γ dans le référentiel du train, et que réciproquement, la longueur du train est L/γ dans le référentiel du quai. L’inversion de l’ordre temporel des événements q et r est aussi visible. La branche $x < 0$ de l’hyperbole $x^2 - c^2t^2 = L^2$ permet de graduer l’axe des x' .

7. Forme vectorielle des transformations de Lorentz

On considère deux référentiels \mathcal{R} ($Oxyz$) et \mathcal{R}' ($O'x'y'z'$). \mathcal{R}' se déplace par rapport à \mathcal{R} à une vitesse \mathbf{v} . On note le point P de vecteur position \mathbf{r} dans \mathcal{R} et \mathbf{r}' dans \mathcal{R}' .

En utilisant la propriété d'isotropie de l'espace, et en décomposant les vecteurs \mathbf{r} et \mathbf{r}' selon des composantes perpendiculaires et parallèles au mouvement, établissez les transformations de Lorentz sous forme vectorielle, c'est-à-dire donnant t' et \mathbf{r}' en fonction de t et \mathbf{r} et \mathbf{v} , la vitesse relative du repère (x', y', z') par rapport au repère (x, y, z) .

NB : on pourra commencer par étudier le cas particulier où \mathcal{R}' se déplace le long de l'axe x de \mathcal{R} .

Lorsqu'on choisit les axes x et x' parallèles au mouvement relatif entre les deux référentiels, la transformation permettant de passer des coordonnées d'un événement dans \mathcal{R} à celles dans \mathcal{R}' s'écrit :

$$\begin{cases} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases}$$

On peut généraliser au cas où les axes des repères sont quelconques. La transformation de la coordonnée temporelle s'écrit naturellement :

$$ct' = \gamma(\mathbf{v})(ct - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) \quad \text{où} \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c} \quad \gamma(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\beta}^2}}$$

Pour les coordonnées d'espace $\mathbf{r} = (x, y, z)$, seule la composante $\mathbf{r}_{//}$ de \mathbf{r} parallèle au mouvement relatif entre référentiel est affectée, selon la même transformation que pour x précédemment, tandis que la composante transverse \mathbf{r}_{\perp} n'est pas modifiée (comme y et z précédemment) :

$$\begin{cases} \mathbf{r}'_{//} &= \gamma(\mathbf{v})[\mathbf{r}_{//} - \boldsymbol{\beta}ct] \\ \mathbf{r}'_{\perp} &= \mathbf{r}_{\perp} \end{cases}$$

où on peut écrire \mathbf{r} comme la somme de ses composantes $\mathbf{r}_{//}$ parallèle à $\boldsymbol{\beta}$ et \mathbf{r}_{\perp} orthogonale à $\boldsymbol{\beta}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{//} + \mathbf{r}_{\perp} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathbf{r}_{//} &= \left[\frac{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\beta}} \right] \frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\beta}^2} = \frac{(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\beta}^2} \\ \mathbf{r}_{\perp} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}_{//} \end{cases}$$

Ce qui permet d'en déduire le vecteur position du même événement exprimé dans \mathcal{R}' :

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{//} + \mathbf{r}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{v})[\mathbf{r}_{//} - \boldsymbol{\beta}ct] + \mathbf{r}_{\perp} \tag{8}$$

$$= \mathbf{r} + [\gamma(\mathbf{v}) - 1]\mathbf{r}_{//} - \gamma(\mathbf{v})\boldsymbol{\beta}ct = \mathbf{r} + [\gamma(\mathbf{v}) - 1] \frac{(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\beta}^2} - \gamma(\mathbf{v})\boldsymbol{\beta}ct \tag{9}$$

On en déduit la forme générale de la transformation de Lorentz, pour des repères choisis d'orientation quelconque dans \mathcal{R} et \mathcal{R}' :

$$\begin{cases} ct' &= \gamma(\mathbf{v})(ct - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + [\gamma(\mathbf{v}) - 1] \frac{(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\beta}^2} - \gamma(\mathbf{v})\boldsymbol{\beta}ct = \mathbf{r} + [\gamma(\mathbf{v}) - 1] \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2} - \gamma(\mathbf{v})\mathbf{v}t \end{cases}$$

8. Effet Doppler

Leia et Han ont une vitesse relative v constante. Leur coïncidence est prise, par tous deux, comme événement origine O . Leia choisit son axe x selon la vitesse de Han qui, lui, choisit son axe x' opposé à la vitesse de Leia. À intervalles réguliers à sa montre Han émet (événements O, E_1, E_2, E_3, \dots) des éclats lumineux que Leia reçoit (événements O, R_1, R_2, R_3, \dots).

8.1 — Représentez ce scénario (lignes d'univers de Leia, de Han, de la lumière et événements divers) sur un graphe d'espace-temps (x, t) dans le repère de Leia et sur un graphe d'espace-temps (x', t') dans le repère de Han.

8.2 — Indiquez sur le graphe de Leia les intervalles de coordonnées Δx et Δt entre les deux événements O et E_1 observés par Leia.

Voir figure 11.

8.3 — Calculez sans transformation de Lorentz, Δt en fonction de v et de l'intervalle $\Delta\tau$ entre les deux émissions O et E_1 à la montre de Han.

Pendant un intervalle de temps Δt , Han a parcouru la distance $\Delta x = v\Delta t$ dans le référentiel de Leia. En utilisant l'invariance de l'intervalle d'espace-temps entre les événements O et E_1 , on obtient :

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\Delta\tau^2 \quad \text{soit} \quad c^2\Delta t^2 - v^2\Delta t^2 = c^2\Delta\tau^2$$

D'où,

$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{\Delta t^2}{\gamma^2} \quad \text{soit} \quad \Delta t = \gamma\Delta\tau \geq \Delta\tau.$$

8.4 — Calculez l'intervalle de temps Δt_R entre deux réceptions O et R_1 de ces éclats vus par Leia. Interprétez.

Le temps Δt_R écoulé entre deux réceptions par Leia est la somme du temps Δt entre deux émissions (mesuré dans son référentiel) et du temps nécessaire à la propagation de l'onde lumineuse pour parcourir la distance $\Delta x = v\Delta t$ qui la sépare de Han. On a ainsi :

$$\Delta t_R = \Delta t + \frac{\Delta x}{c} = \Delta t + \frac{v}{c}\Delta t = \gamma\Delta\tau \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \Delta\tau\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

8.5 — Déduisez-en la relation entre la fréquence d'émission des signaux ν_E par Han et la fréquence de réception ν_R par Leia.

La fréquence d'émission ν_E (resp. de réception ν_R) est l'inverse de l'intervalle de temps entre deux émissions (resp. deux réceptions). On trouve ainsi :

$$\nu_R = \frac{1}{\Delta t_R} = \frac{1}{\Delta\tau} \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \quad \text{i.e.} \quad \nu_R = \nu_E \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

Qu'on peut encore écrire :

$$\nu_R = \nu_E \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

La fréquence des signaux perçue par Leia est donc inférieure à celle émise par Han qui s'éloigne d'elle. C'est l'effet Doppler relativiste, valable pour les signaux électromagnétiques.

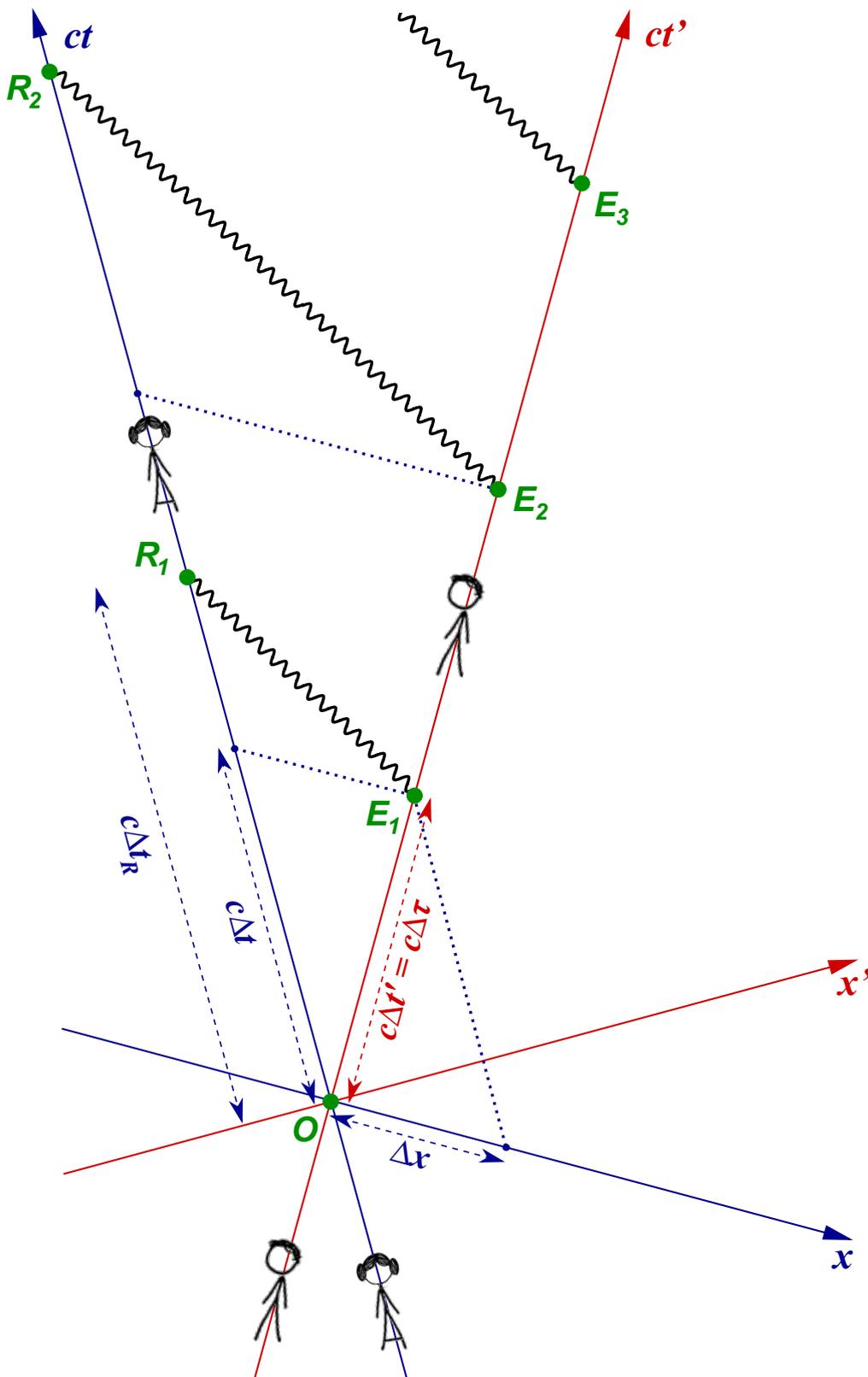


FIGURE 11 – Diagramme d'espace-temps (diagramme de Loedel). Trajectoires de Leia (en bleu, dans \mathcal{R}) et de Han (en rouge, dans \mathcal{R}'). La ligne d'Univers de Leia se confond avec l'axe ct , tandis que celle de Han se confond avec l'axe ct' .

Par comparaison, l'effet Doppler classique s'écrit :

$$\nu_R = \frac{c - v_R}{c - v_E} \nu_E$$

où c est la célérité des ondes considérées (vitesse du son par exemple) dans le milieu de propagation, tandis que v_E et v_R sont les vitesses de l'émetteur et du récepteur *par rapport au référentiel du milieu de propagation des ondes*. Ce résultat n'est évidemment pas transposable en relativité restreinte, notamment parce que la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels, et qu'on ne peut pas définir de *référentiel du milieu de propagation* des ondes lumineuses.

9. L'attaque de l'Étoile Noire

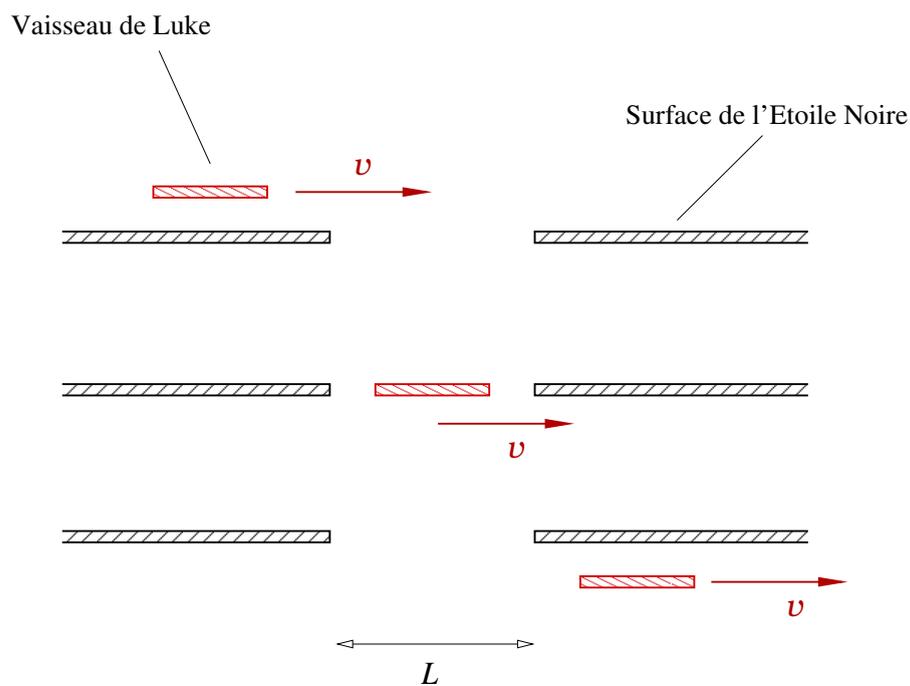


FIGURE 12 – Plan d'attaque de Luke, du point de vue du référentiel de l'Étoile Noire.

Pour détruire l'Étoile Noire, Luke envisage de survoler parallèlement sa surface afin de faire pénétrer discrètement son vaisseau (de longueur L) par un orifice de l'Étoile de même diamètre L (figure 12). Son vaisseau atteignant sans difficulté la vitesse $v = \sqrt{3}c/2 \simeq 0.87c$, Luke compte profiter de la contraction des longueurs : dans le référentiel de l'Étoile Noire, son vaisseau apparaîtra plus court et pourra donc passer sans difficulté par l'ouverture de largeur L .

9.1 — Que vaut le facteur $\gamma(v)$ du vaisseau de Luke dans le référentiel de l'Étoile Noire (supposé galiléen) ?

La vitesse du vaisseau étant $v = \sqrt{3}c/2$, le facteur $\gamma(v)$ correspondant vaut :

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}}} = 2.$$

9.2 — Dans le référentiel de l'Étoile Noire, quelle sera la longueur du vaisseau de Luke (assimilé à un segment de droite)? Le vaisseau pourra-t-il pénétrer par l'ouverture de diamètre L ?

Dans le référentiel de l'Étoile Noire, le vaisseau de Luke apparaît plus court. Sa longueur est réduite d'un facteur $1/\gamma(v)$: la longueur du vaisseau dans le référentiel de l'Étoile Noire est par conséquent de $L/\gamma(v)$ soit $L/2$. Le vaisseau doit donc pouvoir passer facilement par le trou de diamètre L .

9.3 — L'amiral de la flotte fait toutefois remarquer que dans le référentiel de son vaisseau, c'est le trou à la surface de l'Étoile Noire qui paraîtra plus petit et que le plan de Luke est par conséquent voué à l'échec. Quelle est effectivement la longueur apparente du trou dans le référentiel \mathcal{R}' du vaisseau de Luke?

Dans le référentiel de Luke, la vitesse de la surface de l'Étoile Noire est $-v$, et le facteur γ associé vaut 2 (on suppose ici le mouvement du vaisseau parallèle à la surface). La longueur de l'orifice est donc réduite d'un facteur $1/\gamma(v) = 1/2$, et vaut $L/\gamma(v) = L/2$. On peut alors légitimement se demander comment le vaisseau pourrait passer par le trou qui est deux fois plus petit que le vaisseau...

Afin de réconcilier les deux points de vue, on se propose de modéliser les trajectoires respectives du vaisseau et de la surface de l'Étoile Noire dans les deux référentiels suivants :

- Le référentiel \mathcal{R} représenté sur la figure 13 : dans \mathcal{R} , la surface de l'Étoile Noire se déplace en translation uniforme selon \mathbf{e}_z avec une vitesse faible $u \ll c$. À $t = 0$, la surface de l'Étoile Noire se confond avec le plan xOy . Dans ce même référentiel \mathcal{R} , le vaisseau de Luke se déplace sur l'axe Ox , à la vitesse $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$, de telle sorte que le centre du vaisseau se trouve à l'origine O à $t = t' = 0$.
- Le référentiel \mathcal{R}' solide du vaisseau de Luke, en translation uniforme par rapport au référentiel \mathcal{R} : $\mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v \mathbf{e}_x$. L'origine O' du référentiel \mathcal{R}' est prise au centre du vaisseau. Elle se confond avec O à $t = t' = 0$.

9.4 — Écrivez la transformation de Lorentz permettant de passer du référentiel \mathcal{R} au référentiel \mathcal{R}' . De même, écrivez la transformation inverse.

La transformation de Lorentz pour passer de \mathcal{R} à \mathcal{R}' s'écrit (avec $\beta = v/c$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right. \quad \text{et réciproquement} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(x' + \beta ct') \\ y = y' \\ z = z' \end{array} \right.$$

9.5 — Dans le référentiel \mathcal{R} , quelle est la position $x(O')$ du centre du vaisseau en fonction du temps t ? À $t = 0$, que valent les abscisses des extrémités avant $x(A')$ et arrière $x(B')$ du vaisseau, dans le référentiel \mathcal{R} ? Au même instant $t = 0$, que valent les abscisses $x(P)$ et $x(Q)$ des extrémités du trou? De ce point de vue, le vaisseau peut-il effectivement passer par le trou?

Dans le référentiel du vaisseau \mathcal{R}' , le centre du vaisseau est pris pour origine : $x'(O') = 0$. En appliquant la transformation de Lorentz, on a par ailleurs :

$$x'(O') = \gamma(x(O') - vt) = 0$$

D'où on déduit la position de O' dans \mathcal{R} ,

$$x(O') = vt$$

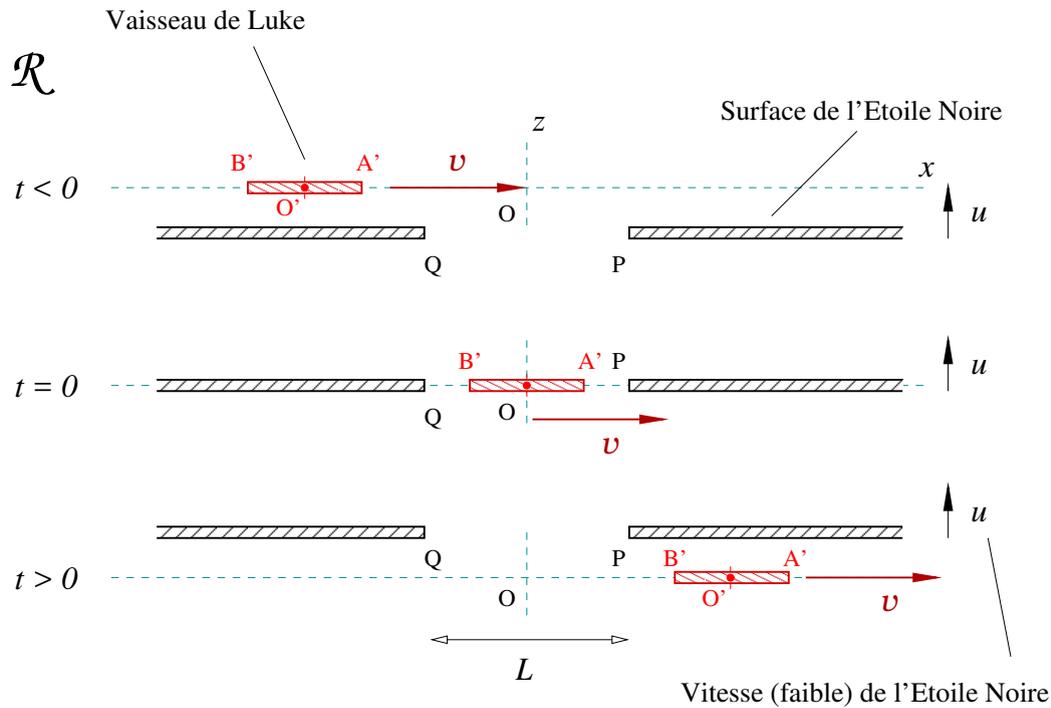


FIGURE 13 – Plan d’attaque de Luke pour détruire l’étoile noire, vu dans le référentiel \mathcal{R} . Dans ce référentiel, le vaisseau se déplace à la vitesse v le long de l’axe des x , tandis que la surface de l’Étoile Noire se déplace à la vitesse faible $u \ll c$ selon l’axe des z .

On peut raisonner de même pour les extrémités A' et B' du vaisseau. Dans le référentiel du vaisseau \mathcal{R}' , on a :

$$x'(A') = +\frac{L}{2} \quad \text{et} \quad x'(B') = -\frac{L}{2}$$

En appliquant Lorentz, on a par ailleurs :

$$x'(A') = +\frac{L}{2} = \gamma(x(A') - vt) \quad x'(B') = -\frac{L}{2} = \gamma(x(B') - vt)$$

D’où,

$$x(A') = +\frac{1}{\gamma} \frac{L}{2} + vt = +\frac{L}{4} + vt \quad x(B') = -\frac{1}{\gamma} \frac{L}{2} + vt = -\frac{L}{4} + vt$$

Et en particulier, à $t = 0$,

$$x(A') = +\frac{1}{\gamma} \frac{L}{2} = +\frac{L}{4} \quad x(B') = -\frac{1}{\gamma} \frac{L}{2} = -\frac{L}{4}$$

Par ailleurs, dans le référentiel \mathcal{R} , les extrémités P et Q du trou sont fixes, aux abscisses $x(P) = +L/2$ et $x(Q) = -L/2$. Il paraît donc évident que dans le référentiel \mathcal{R} , le vaisseau passe sans difficulté à travers le trou (fig. 13).

On s’intéresse maintenant aux mêmes événements, mais vus dans le référentiel \mathcal{R}' solidaire du vaisseau.

9.6 — Dans le référentiel \mathcal{R}' dessinez dans le plan $x'O'z'$ le vaisseau de longueur L , en repérant la position de ses 2 extrémités. Faites un dessin assez large, que l’on complétera aux questions suivantes.

Le vaisseau est fixe dans le référentiel \mathcal{R}' : voir figure 14 ci-après.

9.7 — Soit un point $M(x, y, z)$ quelconque de la surface de l'Étoile Noire. On a nécessairement x dans l'intervalle $] -\infty, -L/2] \cup [L/2, +\infty[$. Que vaut z en fonction du temps t dans \mathcal{R} ?

Dans le référentiel \mathcal{R} , tous les points de la surface de l'Étoile Noire se déplacent en translation uniforme à la vitesse $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_z$. Pour tous les points $M(x, y, z)$ de la surface, on a donc simplement $z = ut$.

9.8 — Déterminez les coordonnées (x', y', z') des points M de la surface de l'Étoile Noire en fonction du temps t' dans \mathcal{R}' . Quel est le lieu des points M de la surface à l'instant $t' = 0$ dans le plan $x'O'z'$? Dessinez la position du plan de la surface de l'Étoile Noire à $t' = 0$ sur le dessin précédent.

Pour tout point $M(x, y, z)$ appartenant à la surface de l'Étoile Noire, on a $x \in]-\infty, -L/2] \cup [L/2, +\infty[$, et $z = ut$. Si on écrit la transformation de Lorentz inverse,

$$\begin{cases} t &= \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right) \\ x &= \gamma (x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' = ut \end{cases} \quad \text{où} \quad t = \frac{z}{u} = \frac{z'}{u}.$$

Et par conséquent, en utilisant les deux équations donnant t ,

$$t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right) = \frac{z'}{u} \quad \text{soit} \quad z' = \gamma \frac{vux'}{c^2} + \gamma ut'.$$

Dans le référentiel du vaisseau, à un instant t' donné, les points $M(x', y', z')$ de la surface de l'étoile noire appartiennent au plan défini par l'équation :

$$z' = \gamma \frac{vux'}{c^2} + \gamma ut'.$$

En particulier, à $t' = 0$, il s'agit du plan :

$$z' = \gamma \frac{vux'}{c^2}.$$

La pente de l'intersection de la surface avec le plan $x'O'z'$ vaut

$$+\gamma \frac{vu}{c^2} = +\sqrt{3} \frac{u}{c} \ll 1.$$

Cette pente est évidemment très petite car $u \ll c$ (voir fig. 14).

9.9 — Que valent les coordonnées des extrémités P et Q du trou dans le référentiel \mathcal{R} ? Déduisez-en l'équation de la trajectoire $z' = f(x')$ pour chacun de ces deux points dans le référentiel \mathcal{R}' .

Dans le référentiel \mathcal{R} , les extrémités P et Q du trou ont pour coordonnées :

$$\begin{cases} x(P) &= +\frac{L}{2} \\ z(P) &= ut \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(Q) &= -\frac{L}{2} \\ z(Q) &= ut \end{cases}$$

En appliquant Lorentz, et en utilisant $t = z/u = z'/u$, on trouve :

$$x'(P) = \gamma(x(P) - vt) = \gamma \left(x(P) - \frac{vz'}{u} \right) = \gamma \left(\frac{L}{2} - \frac{vz'}{u} \right)$$

Et, de même,

$$x'(Q) = \gamma(x(Q) - vt) = \gamma\left(x(Q) - \frac{vz'}{u}\right) = \gamma\left(-\frac{L}{2} - \frac{vz'}{u}\right)$$

Ce qui donne la trajectoire des points P et Q dans le plan $x'O'z'$:

$$\begin{cases} z'(P) = -\frac{1}{\gamma} \frac{u}{v} x'(P) + \frac{u}{v} \frac{L}{2} \\ z'(Q) = -\frac{1}{\gamma} \frac{u}{v} x'(Q) - \frac{u}{v} \frac{L}{2} \end{cases}$$

La pente de ces trajectoires vaut :

$$-\frac{u}{\gamma v} = -\frac{u}{2 \times c\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{u}{c} \quad \text{avec} \quad \frac{u}{c} \ll 1$$

Pour le dessin, on notera que cette pente est négative, et qu'elle vaut en norme le tiers de la pente (positive) trouvée précédemment pour le plan de la surface de l'Étoile Noire à $t' = 0$ (fig. 14).

9.10 — Calculez la position de l'intersection des trajectoires des extrémités P et Q avec l'axe des x' . Dessinez les trajectoires de P et Q dans le plan $x'O'z'$.

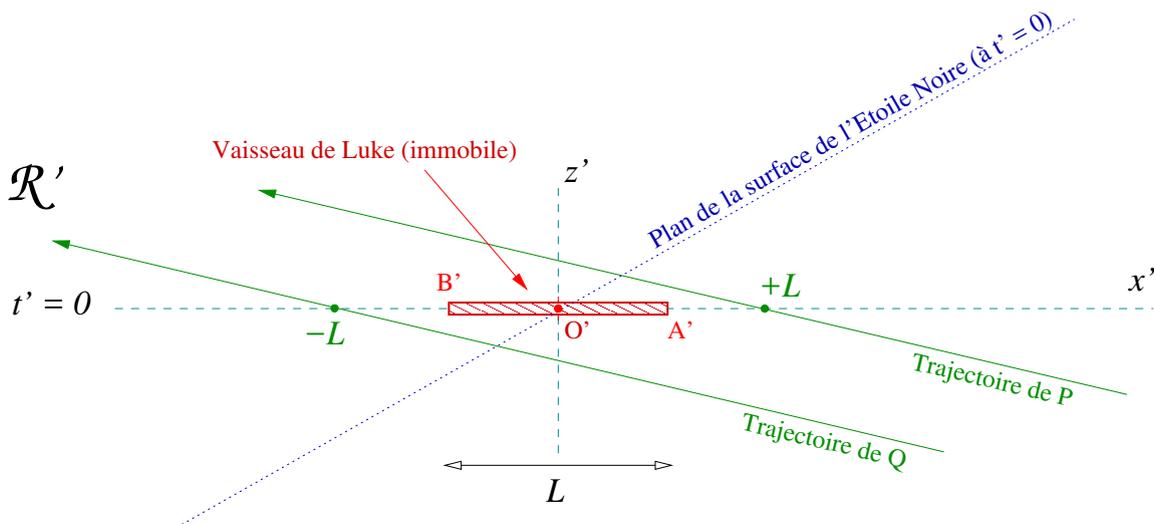


FIGURE 14 – Point de vue dans le référentiel du vaisseau, à $t' = 0$. Les points de la surface de l'Étoile Noire, appartiennent au plan d'équation $z' = \gamma v u x' / c^2$ avec $u \ll c$. Les trajectoires des extrémités du trou P et Q sont aussi représentées : l'intersection de la trajectoire de P avec l'axe des x' se produit en $x' = +L$, et celle de la trajectoire de Q avec l'axe des x' se produit en $x' = -L$.

En utilisant les équations des trajectoires des points P et Q , et on trouve immédiatement l'intersection de ces trajectoires avec l'axe des x' , en posant respectivement $z'(P) = 0$ et $z'(Q) = 0$.

L'intersection de la trajectoire de P avec l'axe des x' a lieu à l'abscisse :

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{u}{v} x'(P) + \frac{u}{v} \frac{L}{2} = 0 \quad \text{soit} \quad x'(P) = \gamma \frac{L}{2} = L.$$

Et pour Q , elle a lieu à l'abscisse :

$$-\frac{1}{\gamma} \frac{u}{v} x'(Q) - \frac{u}{v} \frac{L}{2} = 0 \quad \text{soit} \quad x'(Q) = -\gamma \frac{L}{2} = -L.$$

9.11 — Décrivez la trajectoire de la surface de l'Étoile Noire dans le référentiel \mathcal{R}' du vaisseau. À votre avis, qui a raison de l'amiral de la flotte ou de Luke ? Luke doit-il retourner sur Dagobah auprès de Yoda parfaire sa maîtrise de la relativité restreinte ?

Dans le référentiel \mathcal{R}' solidaire du vaisseau, la surface de l'Étoile Noire apparaît inclinée ; même si la longueur du trou est inférieure à L , le mouvement de la surface est tel que le passage du vaisseau dans le trou est possible, et qu'aucune collision n'a lieu (figure 15). Luke a donc raison, et dans la mesure où son vaisseau peut être assimilé à un segment de droite de longueur L , il pourra franchir la surface de l'Étoile Noire.

Cet exercice est une déclinaison *GeorgeLucaesque* du célèbre problème relativiste connu comme "*le paradoxe de la règle et du trou*", où on considère une règle de longueur L que l'on fait glisser sur une table, dans laquelle il y a un trou de même longueur. Ce paradoxe a notamment été discuté en détail par Rindler (*American Journal of Physics* 29, 365 (1961); <https://doi.org/10.1119/1.1937789>).

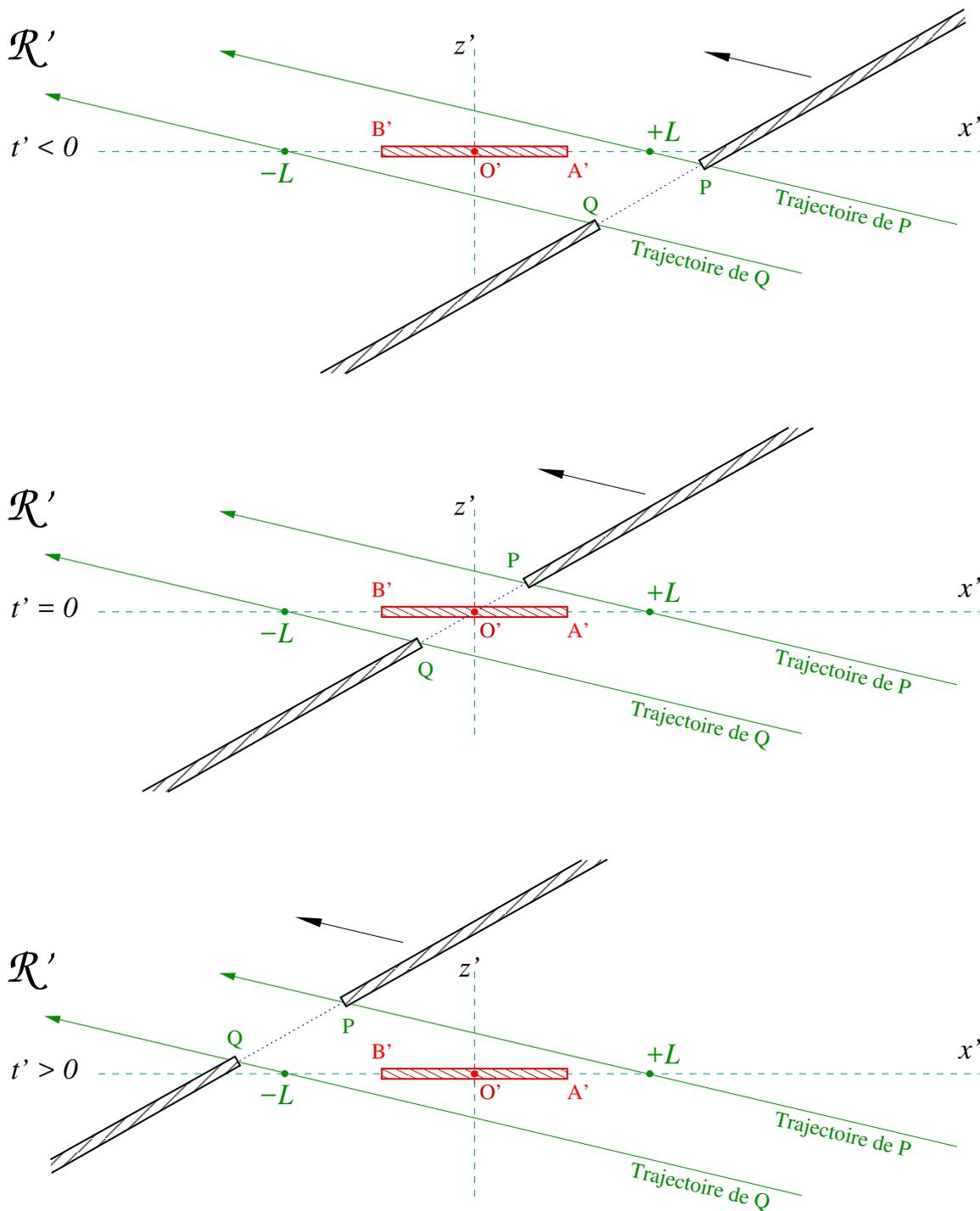


FIGURE 15 – Succession des événements dans le référentiel \mathcal{R}' solide du vaisseau. L’orifice dans la surface de l’Étoile Noire est effectivement plus petit que la longueur L du vaisseau, mais la surface apparaît inclinée dans \mathcal{R}' , de telle sorte que le vaisseau passe sans difficulté.

2^{ème} Partie

Composition des vitesses — Mouvement hyperbolique — Paradoxe des jumeaux — Voyages intersidéraux.

1. Composition des vitesses

Vues dans le laboratoire, deux particules A et B s'éloignent de l'origine choisie O dans des directions opposées avec chacune une vitesse $3c/4$ mesurée dans le référentiel du laboratoire.

1.1 — Est-il correct de dire que la vitesse relative de A par rapport à B est $3c/2$, c'est à dire supérieure à c ? Quelle est la vitesse de A par rapport à B ? Et réciproquement?

Utilisons la loi relativiste de composition des vitesses. Dans le référentiel \mathcal{R} du laboratoire, si on choisit l'axe des abscisses orienté parallèlement à la vitesse de A , les vitesses des particules A et B sont :

$$\mathbf{u}_A = +\frac{3c}{4} \mathbf{e}_x \quad \mathbf{u}_B = -\frac{3c}{4} \mathbf{e}_x$$

Plaçons nous maintenant dans $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_B$ le référentiel de la particule B , en translation uniforme à la vitesse \mathbf{u}_B par rapport à \mathcal{R} . La composition des vitesses donne la vitesse de A dans le référentiel $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_B$:

$$u(A/B) = u'(A) = \frac{u(A) - v(B/A)}{1 - \frac{u(A)v(B/A)}{c^2}} = \frac{\frac{3c}{4} - \left(-\frac{3c}{4}\right)}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{3c/2}{1 + 9/16} = \frac{24}{25} c < c$$

On trouve bien une vitesse inférieure à c pour la particule A dans le référentiel de B , contrairement à ce que donnerait la règle galiléenne de composition des vitesses.

Par symétrie, on aura de même, pour la particule B vue dans le référentiel de A :

$$u(B/A) = -\frac{24}{25} c < c.$$

1.2 — En partant de la loi de composition des vitesses, montrez que la vitesse d'un objet ne peut dépasser c quel que soit le référentiel où on mesure cette vitesse.

Considérons un mobile se déplaçant à la vitesse $u' < c$ dans un référentiel \mathcal{R}' . Sa vitesse u mesurée dans un référentiel \mathcal{R} tel que $v(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v < c$ est donc (en supposant les vitesses \mathbf{u} , \mathbf{u}' et \mathbf{v} colinéaires) :

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \quad \frac{u}{c} = \frac{\frac{u'}{c} + \frac{v}{c}}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Posons $a = u'/c$ et $\beta = v/c$. On a :

$$0 \leq a = \frac{u'}{c} < 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \beta = \frac{v}{c} < 1$$

Comme $0 \leq a < 1$, on en déduit que $0 < 1 - a \leq 1$; En multipliant l'inégalité $\beta < 1$ par $(1 - a) > 0$, on obtient ainsi :

$$(1 - a)\beta < 1 - a \quad \text{d'où} \quad \beta - a\beta < 1 - a \quad \text{soit} \quad a + \beta < 1 + a\beta$$

Et par conséquent,

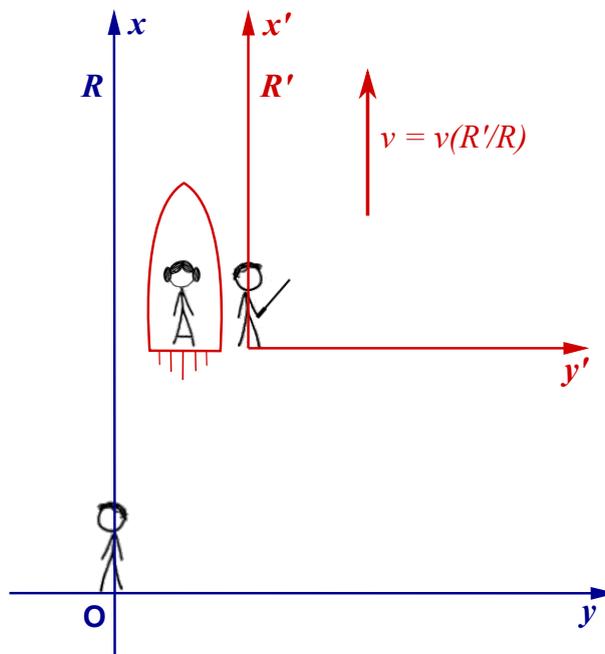
$$\frac{u}{c} = \frac{\frac{u'}{c} + \frac{v}{c}}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{a + \beta}{1 + a\beta} < 1 \quad \text{i.e.} \quad u < c$$

Pour un mobile se déplaçant à une vitesse $u' < c$ dans un référentiel \mathcal{R}' , sa vitesse u mesurée dans tout autre référentiel sera elle aussi inférieure à c .

2. Mouvement accéléré, référentiel tangent, mouvement hyperbolique

Leia effectue avec son vaisseau un mouvement rectiligne accéléré (donc non uniforme). À un instant donné (événement E_1), sa vitesse est v par rapport à Han, inertiel (i.e. dépourvu d'accélération), et sa vitesse est nulle par rapport à Luke, lui aussi inertiel. Un peu plus tard (événement E_2), après un temps dt' pour Luke, la vitesse de Leia est passée à $v + dv$ pour Han, et à dv' pour Luke.

2.1 — En utilisant la composition des vitesses, établissez l'expression de dv' en fonction de v et dv .



Soit \mathcal{R} le référentiel de Han, resté à la base, qu'on supposera inertiel; on appelle \mathcal{R}' le référentiel de Luke, c'est à dire le référentiel inertiel qui se confond avec celui de Leia à l'instant de l'événement E_1 . On désigne en général ce référentiel comme le référentiel inertiel tangent. Comme le mouvement de Leia est quelconque, le référentiel de Leia ne se confond avec \mathcal{R}' qu'à cet instant précis (événement E_1); mais rien n'empêche de procéder de même pour tous les événements qui constituent la trajectoire de Leia dans l'espace-temps, et de définir à chaque instant un référentiel galiléen tangent (différent à chaque instant).

Lors de l'événement E_1 , qui se produit à l'instant t dans \mathcal{R} et t' dans \mathcal{R}' , la vitesse u du vaisseau de Leia est v (vitesse relative de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} , par construction), tandis qu'elle est bien évidemment nulle dans \mathcal{R}' .

Un instant plus tard, à l'événement E_2 , qui se produit à l'instant $t + dt$ dans \mathcal{R} et à l'instant $t' + dt'$ dans \mathcal{R}' , la vitesse du vaisseau de Leia est désormais $u = v + dv$ dans \mathcal{R} , et $u' = dv'$ dans le même référentiel tangent \mathcal{R}' défini en E_1 (avec τ le temps propre de Leia).

	\mathcal{R}	\mathcal{R}'
E_1	t	t'
	$u = v$	$u' = 0$
E_2	$t + dt$	$t' + dt'$
	$u = v + dv$	$u' = dv'$

Pour déterminer dv' , on applique la loi de composition des vitesses lors de l'événement E_2 , entre les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' :

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{vu}{c^2}}$$

à l'instant $t' + dt'$, avec $u = v + dv$ la vitesse du vaisseau dans \mathcal{R} , $u' = dv'$ la vitesse du vaisseau dans \mathcal{R}' . On obtient :

$$dv' = \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{v dv}{c^2}} \quad \text{d'où} \quad dv' \left[1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{v dv}{c^2} \right] = dv$$

On peut ici négliger le terme de second ordre $v dv dv'/c^2$, ce qui donne

$$dv' \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right] = dv \quad \text{soit} \quad dv' = \gamma^2(v) dv$$

2.2 — Quelle est l'expression de l'accélération propre a de Leia, en fonction de dv' et de dt' ? Quelle est l'expression de la durée dt' en fonction de v et de dt ? En déduire l'expression de la durée dt en fonction de a , v et dv .

L'accélération propre a de Leia s'écrit :

$$a = \frac{dv'}{dt'} = \frac{dv'}{d\tau}$$

où $d\tau$ est l'intervalle de temps propre de Leia entre E_1 et E_2 ; on aura $d\tau = dt'$ puisque les deux référentiels se confondent à l'instant de l'événement E_1 . Cette accélération propre peut être ressentie par Leia, sous la forme d'un poids apparent des objets dans la fusée (classiquement, on parle de *force d'entraînement*).

Par ailleurs, en utilisant l'invariance de l'intervalle d'espace-temps, on peut relier $dt' = d\tau$ et dt :

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) c^2 dt^2 \quad \text{i.e.} \quad d\tau = dt' = \frac{1}{\gamma(v)} dt$$

On a ainsi :

$$dv' = \gamma^2(v) dv \quad dt' = \frac{1}{\gamma(v)} dt \quad \text{d'où} \quad a = \frac{dv'}{dt'} = \gamma^3(v) \frac{dv}{dt}$$

Ce qu'on peut ré-écrire sous la forme :

$$a dt = \gamma^3(v) dv \quad \text{ou encore} \quad dt = \frac{\gamma^3(v)}{a} dv \quad (10)$$

Afin de pouvoir intégrer cette dernière relation, et obtenir l'évolution temporelle $v(t)$ dans le référentiel \mathcal{R} , il est nécessaire de connaître les variations temporelles de l'accélération propre a de Leia.

2.3 — En surveillant bien le poids (apparent) d'une masse test, Leia, pilote sa fusée en maintenant son accélération propre a constante. Sachant qu'elle a quitté Han en douceur, avec une vitesse $v(0)$ nulle à l'instant $t = 0$, quelle est l'expression de sa vitesse $v(t)$ à l'instant t pour Han toujours inertiel ?

On se place ici dans le cas très particulier où l'accélération propre a de Leia est supposée constante pendant toute la trajectoire. On peut alors intégrer l'équation (10).

Il est tout à fait possible d'intégrer directement l'équation (10), et d'obtenir ainsi $v(t)$ et $x(t)$. Toutefois, un changement de variable naturel et pratique dans l'étude des mouvements accélérés en relativité restreinte consiste à introduire la *rapidité* φ , définie par :

$$\tanh \varphi = \beta = \frac{v}{c} \quad \text{et par conséquent} \quad d(\tanh \varphi) = d\beta = \frac{dv}{c}.$$

On a de plus :

$$d\beta = \frac{dv}{c} = d(\tanh \varphi) = \frac{1}{\cosh^2 \varphi} d\varphi = (1 - \tanh^2 \varphi) d\varphi = (1 - \beta^2) d\varphi = \frac{1}{\gamma^2(v)} d\varphi$$

d'où,

$$dv = \frac{c}{\cosh^2 \varphi} d\varphi$$

On en déduit les relations suivantes, très pratiques :

$$\tanh \varphi = \beta = \frac{v}{c} \quad \cosh \varphi = \gamma(v) \quad \sinh \varphi = \beta\gamma(v)$$

L'équation (10) peut ainsi s'écrire :

$$a dt = \gamma^3(v) dv = \cosh^3 \varphi \times \frac{c}{\cosh^2 \varphi} d\varphi = c \cosh \varphi d\varphi$$

Avec l'hypothèse supplémentaire que l'accélération propre a est maintenue constante pendant toute la trajectoire de la fusée de Leia, on peut intégrer l'équation entre $t = 0$ (départ de la fusée) et un instant t quelconque (attention, les notations sont abusives, le t de la borne de l'intégrale est différent de la variable d'intégration) :

$$\int_0^t a dt = \int_{v(0)}^{v(t)} \gamma^3(v) dv = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \cosh \varphi d\varphi$$

D'où,

$$at = c (\sinh \varphi(t) - \sinh \varphi(0)) = c \sinh \varphi(t)$$

en considérant de plus que la vitesse initiale de la fusée dans \mathcal{R} est nulle à $t = 0 : v(0) = 0$ et $\varphi(0) = 0$. Cette dernière équation permet d’obtenir l’expression de la rapidité φ en fonction du temps dans \mathcal{R} , et donc de la vitesse $v(t)$:

$$\varphi(t) = \operatorname{argsinh} \left(\frac{at}{c} \right) = \ln \left[\frac{at}{c} + \sqrt{\left(\frac{at}{c} \right)^2 + 1} \right]$$

Pour obtenir l’expression de la vitesse, on peut partir de cette dernière expression. En utilisant l’identité remarquable $\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1$, on peut écrire les expressions de $\sinh \varphi$ et $\cosh \varphi$:

$$\sinh \varphi(t) = \frac{at}{c} \quad \cosh \varphi(t) = \sqrt{1 + \sinh^2 \varphi(t)} = \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}$$

Ce qui permet de calculer $\tanh \varphi$ et d’en déduire la vitesse de la fusée en fonction du temps :

$$\beta(t) = \frac{v(t)}{c} = \tanh \varphi = \frac{\sinh \varphi}{\cosh \varphi} = \frac{at/c}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}}$$

2.4 — En déduire l’expression de la position $x(t)$ de Leia à l’instant t pour Han.

Connaissant la vitesse $v(t)$ de la fusée dans \mathcal{R} (le référentiel de Han), on peut intégrer directement l’expression :

$$dx = v(t) dt = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}}$$

On peut aussi utiliser de nouveau la rapidité, en exprimant dx en fonction de φ , ce qui donne :

$$dx = v(t) dt = c \tanh \varphi(t) \times \frac{c}{a} \cosh \varphi d\varphi = \frac{c^2}{a} \sinh \varphi d\varphi$$

Puis, en intégrant comme précédemment entre $t = 0$ et un instant t quelconque (dans \mathcal{R}), on obtient directement :

$$\int_{x(0)}^{x(t)} dx = \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \frac{c^2}{a} \sinh \varphi d\varphi$$

Et, comme l’accélération propre a est supposée constante,

$$x(t) - x(0) = \frac{c^2}{a} (\cosh \varphi(t) - \cosh \varphi(0)) = \frac{c^2}{a} (\cosh \varphi(t) - 1) = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right).$$

Si la fusée de Leia est partie de l’origine à $t = 0$, i.e. $x(0) = 0$, sa position $x(t)$ dans \mathcal{R} est :

$$x(t) = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right).$$

2.5 — Quelles sont les expressions approchées de $x(t)$ et de $v(t)$ lorsque t est petit? lorsque t est grand? (par rapport à quoi d’ailleurs?) Représenter sur un graphe d’espace-temps dans le repère (x, t) de Han : (i) la ligne d’univers de Han, (ii) la ligne d’univers de Leia, (iii) la ligne d’univers de Luke, inertiel, qui à l’instant t_1 coïncide, en douceur, avec Leia. Pourquoi désigne-t-on ce type de mouvement comme “hyperbolique”?

Lorsque $at \ll c$, les expressions de la vitesse $v(t)$ et de la position $x(t)$ deviennent, à la limite :

$$v(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} \xrightarrow{at \ll c} at$$

et,

$$x(t) = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right) \xrightarrow{at \ll c} \frac{c^2}{a} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{a^2 t^2}{c^2} - 1 \right] = \frac{1}{2} at^2.$$

On retrouve ainsi les équations d'un mouvement rectiligne à accélération constante de la mécanique classique.

Lorsque l'accélération propre a est suffisamment grande, ou bien si le mouvement accéléré dure suffisamment longtemps, autrement dit, pour $at \gg c$, on obtient :

$$\frac{at}{c} \gg 1 \quad \frac{a^2 t^2}{c^2} \gg 1 \quad v(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} \xrightarrow{at \gg c} \frac{at}{\sqrt{\frac{a^2 t^2}{c^2}}} = c$$

et,

$$x(t) = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right) \xrightarrow{at \gg c} \frac{c^2}{a} \left[\frac{at}{c} - 1 \right] = ct - \frac{c^2}{a}.$$

Pour une accélération propre suffisamment grande, ou en attendant suffisamment longtemps, la vitesse de la fusée tend vers c (et la position $x(t)$ tend vers ct à une constante près).

Enfin, on peut remarquer que :

$$at = c \sinh \varphi(t) \quad \text{i.e.} \quad \sinh \varphi(t) = \frac{at}{c}$$

et,

$$x(t) = \frac{c^2}{a} (\cosh \varphi(t) - 1) \quad \text{i.e.} \quad \cosh \varphi(t) = \frac{a}{c^2} x(t) + 1.$$

D'où, en utilisant la même identité remarquable que précédemment,

$$\cosh^2 \varphi(t) - \sinh^2 \varphi(t) = 1 \quad \left(\frac{a}{c^2} x + 1 \right)^2 - \left(\frac{at}{c} \right)^2 = 1 \quad (11)$$

ce qui est l'équation d'une hyperbole dans le plan (x, ct) . La trajectoire de la fusée de Leia dans l'espace-temps est ainsi la branche d'hyperbole positive décrite par (11). Cette hyperbole coupe l'axe Ox à l'origine ; ses asymptotes sont les droites $ct = x - c^2/a$ et $ct = -x + c^2/a$ (voir figure 16).

Le mouvement de la fusée est bien entendu rectiligne dans le référentiel \mathcal{R} de Han, mais dans l'espace-temps, la ligne d'univers de Leia suit une hyperbole : c'est pourquoi on désigne parfois ce mouvement rectiligne à accélération propre constante comme un *mouvement hyperbolique*.

2.6 — Quelle est, en général, la durée $d\tau$ écoulée pour Leia, entre E_1 et E_2 , en fonction de dt' ? en fonction de dt et de v ? Lorsque Leia se dote d'un mouvement à accélération propre constante a , que devient cette durée $d\tau$ en fonction de dt , a et t ?

2.7 — En déduire le temps propre $\tau(t)$ à la montre de Leia, en fonction de a et de t pour Han. Quelles sont les expressions approchées de $\tau(t)$ pour t petit ? pour t grand ?

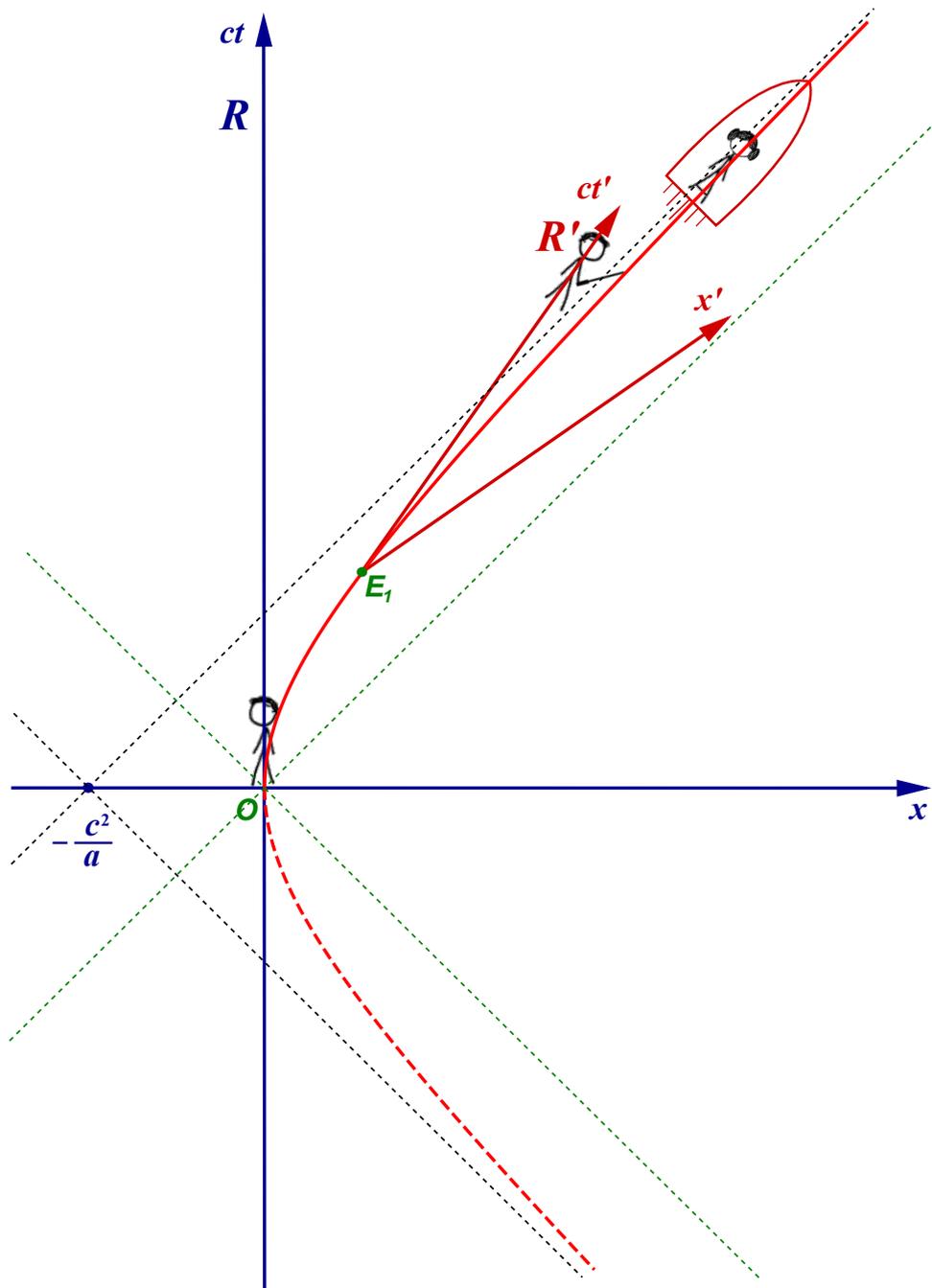


FIGURE 16 – Diagramme d’espace-temps (diagramme de Minkowski). Lignes d’univers de Han, resté en $x = 0$ (en bleu, axe Ox) et de Leia dans sa fusée (en rouge). La ligne d’univers de Leia est une hyperbole. Au point événement E_1 , le référentiel tangent (Luke) R' est tel qu’il se confond avec celui de Leia, à cet instant précis.

D'après ce qui précède, on peut exprimer $d\tau$ en fonction de la vitesse $v(t)$ ou mieux, de la rapidité $\varphi(t)$:

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma(v)} = \frac{\gamma^2(v)}{a} dv = \frac{c}{a} d\varphi.$$

Ainsi, l'intervalle élémentaire de temps propre $d\tau$ de Leia est bien directement proportionnel à l'incrément de rapidité $d\varphi$ mesuré dans \mathcal{R} .

En faisant l'hypothèse que Leia a réglé sa montre à $\tau = 0$ au décollage de sa fusée, à $t = 0$ dans \mathcal{R} , on peut par conséquent relier t et τ :

$$dt = \frac{c}{a} \cosh \varphi d\varphi \quad d\tau = \frac{c}{a} d\varphi \quad \text{d'où} \quad t = \frac{c}{a} \sinh \varphi \quad \tau = \frac{c}{a} \varphi$$

Ce qui donne :

$$t = \frac{c}{a} \sinh \left(\frac{a}{c} \tau \right) \quad \text{et} \quad \tau = \frac{c}{a} \operatorname{argsinh} \left(\frac{a}{c} t \right) = \frac{c}{a} \ln \left[\frac{at}{c} + \sqrt{\left(\frac{at}{c} \right)^2 + 1} \right].$$

Lorsque $at \ll c$, on retrouve la situation classique :

$$\tau = \frac{c}{a} \operatorname{argsinh} \left(\frac{a}{c} t \right) \xrightarrow{at \ll c} \frac{c}{a} \frac{a}{c} t = t$$

et le temps s'écoule de la même manière pour Han et pour Leia.

Pour $at \gg c$, on obtient :

$$\tau = \frac{c}{a} \operatorname{argsinh} \left(\frac{a}{c} t \right) \xrightarrow{at \gg c} \frac{c}{a} \ln \left(\frac{2at}{c} \right)$$

2.8 — Leia se donne l'accélération "de confort" $a = g = 9.8 \text{ m.s}^{-2}$. Exprimez a en ly.y^{-2} (année-lumière par année carrée). Calculez $\tau(t)$ après un mois, 3 mois, 1 an, 3 ans, 10 ans.

En utilisant l'expression qui donne τ en fonction de t ,

$$\tau = \frac{c}{a} \operatorname{argsinh} \left(\frac{a}{c} t \right) = \frac{c}{a} \ln \left[\frac{at}{c} + \sqrt{\left(\frac{at}{c} \right)^2 + 1} \right].$$

on peut calculer le temps τ écoulé pour Leia dans la fusée en fonction du temps t qui s'est écoulé pour Han, depuis le départ de Leia.

L'énoncé propose d'exprimer l'accélération propre a en année-lumière par année carrée, car dans ce cas, $a = 9.8 \text{ m.s}^{-2} \approx 1 \text{ ly.y}^{-2}$, et $a/c \approx 1 \text{ y}^{-1}$, ce qui simplifie les calculs numériques.

Si on n'effectue pas pas cette approximation, on trouve les résultats suivants :

t	1 mois 2.6297×10^6 s	3 mois 7.8892×10^6 s	1 an 3.1557×10^7 s	3 ans 9.4671×10^7 s	10 ans 3.1557×10^8 s
φ	0.08585891	0.25511692	0.90352395	1.84798136	3.02915839
τ	2.6265×10^6 s	7.8043×10^6 s	2.7640×10^7 s ≈ 10.5 mois	5.65317×10^7 s ≈ 1.8 an	9.2665×10^7 s ≈ 3 ans
$t - \tau$	3228.19 s ≈ 1 heure	84932.6 s ≈ 1 jour	3.91716×10^6 s ≈ 1.5 mois	3.81391×10^7 s ≈ 1.2 an	2.22904×10^8 s ≈ 7 ans

On constate ainsi que le temps s’écoule plus lentement pour Leia que pour Han, et que l’effet est d’autant plus important que la durée du voyage est longue et que Leia voyage longtemps à des vitesses proches de celle de la lumière. Ainsi, au bout d’un mois de voyage, l’écart n’est que d’environ 1 heure, tandis qu’au bout de 10 ans pour Han depuis le départ de Leia, il ne s’est écoulé que 3 ans pour Leia dans sa fusée (soit 7 ans de différence).

3. Le paradoxe des jumeaux

Luke et Leia dérivent dans l’espace, libres. Leia décide de quitter Luke en se donnant une accélération propre constante $a = g$ pendant une durée finie $\Delta\tau$ (temps propre de Leia). Puis elle stoppe les turbopropulseurs à l’arrière de son vaisseau, allume ceux à l’avant qui lui fournissent désormais une accélération $a = -g$, et continue son voyage avec cette accélération propre pendant la durée $2\Delta\tau$. Enfin, elle arrête les propulseurs à l’avant et rallume les propulseurs à l’arrière, se donnant ainsi une accélération propre $a = g$ pendant $\Delta\tau$ pour finir par couper ses turbopropulseurs. Pendant tout ce temps, occupé à autre chose, Luke est resté au repos.

3.1 — Représentez toute cette épopée sur un graphe d’espace-temps dans le repère de Luke.

Pendant chaque intervalle de temps $\Delta\tau$, la trajectoire de Leia est à accélération propre constante, et son mouvement est décrit par les résultats obtenus à l’exercice précédent (éventuellement, en inversant le sens du temps ou de x). Sa trajectoire dans l’espace-temps est donc constituée de quatre segments d’hyperbole identiques, comme représentée sur la figure 17.

3.2 — Calculez le temps $4\Delta\tau$ qui s’est écoulé pour Leia si toute cette histoire a duré $4\Delta t = 12$ mois pour Luke. Faites de même pour $4\Delta t = 12$ ans et pour $4\Delta t = 40$ ans. Concluez.

La vitesse v de Leia est nulle au départ (A), maximale (v_{\max}) en B lorsqu’elle éteint ses propulseurs arrière et allume les propulseurs avant, nulle au point C . Sa vitesse augmente ensuite en norme (mais est négative) de C à D , pour atteindre $v = -v_{\max}$ en D , avant de décroître jusqu’à zéro en E , fin de son épopée. On obtient ainsi une trajectoire physiquement réaliste, sans aucune discontinuité de la vitesse ou accélération infinie comme dans la présentation la plus simple du paradoxe des jumeaux.

Le temps propre de Leia qui s’est écoulé pendant toute cette aventure s’écrit :

$$\begin{aligned} \Delta_{A \rightarrow E} \tau &= \int_A^E d\tau = \int_A^E \frac{c}{a} d\varphi = \frac{c}{g} \int_A^B d\varphi - \frac{c}{g} \int_B^C d\varphi - \frac{c}{g} \int_C^D d\varphi + \frac{c}{g} \int_D^E d\varphi \\ &= \frac{c}{g} \left[(\varphi(B) - \varphi(A)) - (\varphi(C) - \varphi(B)) - (\varphi(D) - \varphi(C)) + (\varphi(E) - \varphi(D)) \right] = 4 \frac{c}{g} \varphi_{\max} = 4\Delta\tau \end{aligned}$$

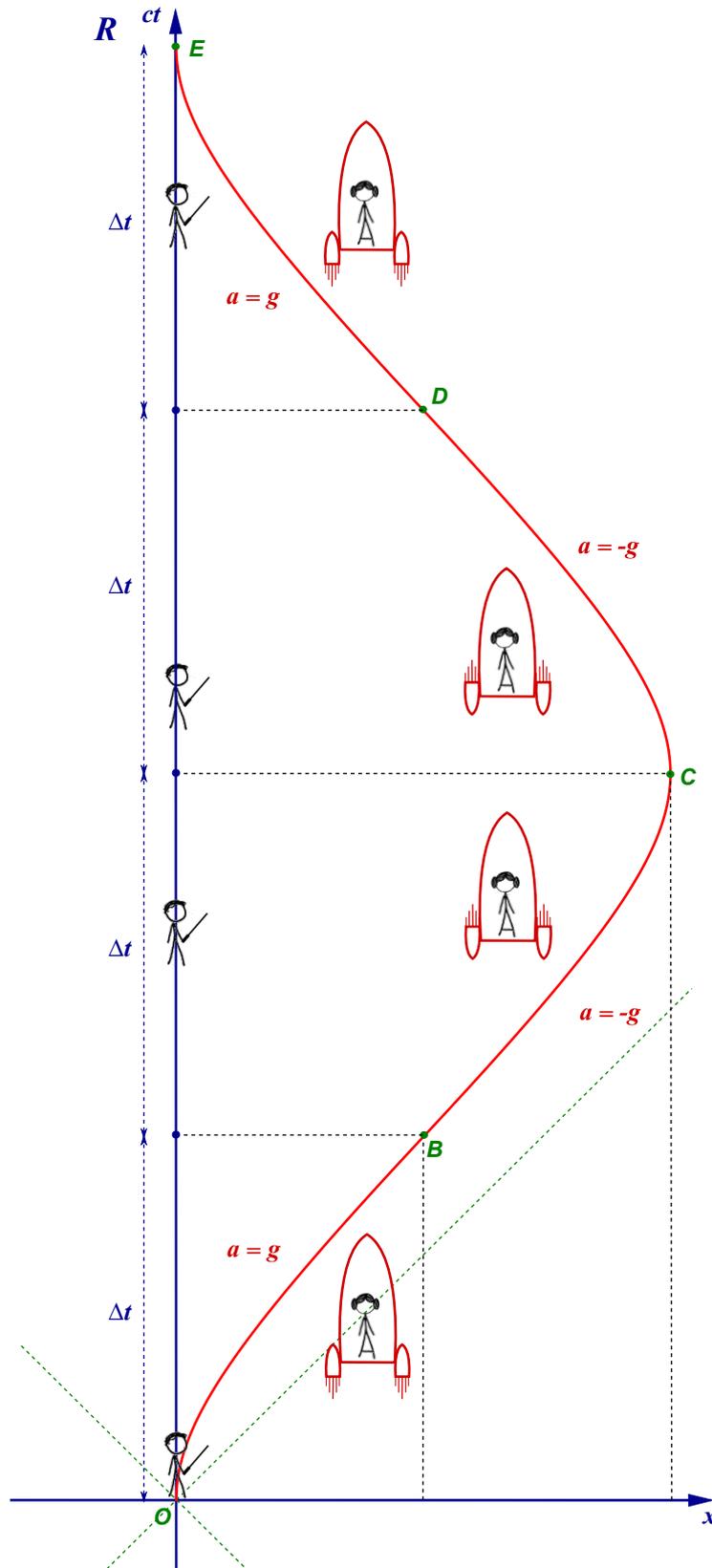


FIGURE 17 – Diagramme d’espace-temps (diagramme de Minkowski). Lignes d’univers de Luke, resté en $x = 0$ (en bleu, axe Ox) et de Leia dans sa fusée (en rouge). Entre A et B, l’accélération propre a de Leia vaut g , et sa fusée accélère, et sa vitesse est maximale en B ; entre B et C, $a = -g$ et Leia décélère jusqu’à atteindre $v = 0$ en C. De C à D, toujours avec $a = -g$, Leia voit sa vitesse devenir de plus en plus négative (elle accélère sur le chemin du retour), jusqu’à atteindre sa vitesse maximale (mais négative) en D. De D à E, $a = g$ ce qui permet à Leia d’arriver au point de départ avec une vitesse nulle.

car $\varphi(A) = \varphi(C) = \varphi(E) = 0$, $\varphi(B) = \varphi_{\max}$ et $\varphi(D) = -\varphi_{\max}$.

On peut d'autre part calculer la rapidité maximale atteinte φ_{\max} , par exemple pendant le premier segment du voyage (où $a = g$) :

$$dt = \frac{c}{a} \cosh \varphi d\varphi \quad \text{d'où} \quad \Delta t = \frac{c}{g} \int_A^B \cosh \varphi d\varphi = \frac{c}{g} (\sinh \varphi(B) - \sinh \varphi(A)) = \frac{c}{g} \sinh \varphi_{\max}$$

Ce qui permet d'exprimer φ_{\max} :

$$\varphi_{\max} = \operatorname{argsinh} \left(\frac{g}{c} \Delta t \right)$$

On en déduit le temps $4\Delta\tau$ écoulé dans la fusée pour Leia :

$$\Delta_{A \rightarrow E} \tau = 4\Delta\tau = 4 \frac{c}{g} \operatorname{argsinh} \left(\frac{g}{c} \Delta t \right)$$

Numériquement, on obtient les résultats suivants :

$4\Delta t$	12 mois	12 ans	40 ans
Δt	3 mois	3 ans	10 ans
	$7.8892 \times 10^6 \text{ s}$	$9.4671 \times 10^7 \text{ s}$	$3.1557 \times 10^8 \text{ s}$
φ_{\max}	0.25511692	1.84798136	3.02915839
$4\Delta\tau$	$3.12172 \times 10^7 \text{ s}$	$2.26127 \times 10^8 \text{ s}$	$3.70661 \times 10^8 \text{ s}$
		$\approx 7.2 \text{ ans}$	$\approx 12 \text{ ans}$
$4\Delta t - 4\Delta\tau$	339730 s	$1.5256 \times 10^8 \text{ s}$	$8.9162 \times 10^8 \text{ s}$
	$\approx 4 \text{ jours}$	$\approx 4.8 \text{ ans}$	$\approx 28 \text{ ans}$

Ainsi, si le voyage de Leia dure 40 ans pour Luke, il n'aura duré que 12 ans pour Leia lorsqu'ils se rejoindront au point de départ où Luke est demeuré pendant toute cette aventure.

Il est important de noter que les référentiels respectifs de Luke et Leia ne sont pas équivalents : celui de Leia n'est pas galiléen, et Leia en a la preuve car elle ressent dans sa fusée un poids apparent lié à son accélération propre (dont le sens change avec le signe de a), et ce tout au long du voyage ; ceci explique l'asymétrie entre les deux référentiels, et la différence d'âge à la fin du voyage.

4. Voyages intersidéraux

4.1 — Partant du système solaire, un vaisseau se rend à vitesse constante v sur une étoile située à $D = 8$ années-lumière de la terre. Pour l'équipage de ce vaisseau, le voyage dure $\Delta\tau = 8$ années. Quelle est la vitesse v du vaisseau dans le référentiel du système solaire ?

La durée du voyage vue depuis le référentiel du système solaire est :

$$\Delta t = \gamma(v)\Delta\tau.$$

Avec $\gamma(v)$ constant puisque la vitesse est considérée comme constante pendant toute la durée du voyage, et $\Delta t = D/v$. On en déduit :

$$v = \frac{D}{\Delta t} = \frac{D}{\gamma \Delta \tau} = \frac{D}{\Delta \tau} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Ainsi,

$$v^2 \left(1 + \frac{D^2}{c^2 \Delta \tau^2} \right) = \frac{D^2}{\Delta \tau^2}$$

et

$$v = \frac{D}{\sqrt{\Delta \tau^2 + D^2/c^2}} \quad \text{soit} \quad \frac{v}{c} = \frac{D/c}{\sqrt{\Delta \tau^2 + D^2/c^2}}$$

Si on exprime D en années-lumière, et $\Delta \tau$ en années, on obtient numériquement :

$$\frac{v}{c} = \frac{8 \text{ ans}}{\sqrt{(8 \text{ ans})^2 + (8 \text{ ans})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.707 \quad \text{donc} \quad v \simeq 0.707c$$

Dans la question précédente, on a négligé les phases d'accélération et de décélération du vaisseau ce qui rend le voyage irréaliste. On se propose plutôt d'effectuer le même voyage en deux phases : une phase d'accélération à accélération propre constante a jusqu'à mi-parcours, et une phase symétrique de décélération à accélération propre constante $-a$, de telle sorte que le vaisseau parte sans vitesse initiale et s'arrête à destination.

4.2 — Dessinez cette trajectoire sur un diagramme d'espace-temps dans le référentiel du système solaire.

Voir la figure 18.

On souhaite, comme précédemment, que le voyage dure $\Delta \tau = 8$ années pour les occupants du vaisseau.

4.3 — Soit \mathcal{R} le référentiel du système solaire (considéré comme galiléen) et \mathcal{R}' le référentiel tangent à la trajectoire du vaisseau à un instant t donné. Dans le référentiel tangent \mathcal{R}' , la vitesse du vaisseau est nulle à l'instant t (ou t'), et vaut dv' à l'instant $t + dt$ (ou $t' + dt'$). En utilisant la loi de composition des vitesses, montrer que

$$dv' = \gamma^2(v)dv$$

Dans le référentiel tangent, la vitesse du vaisseau est nulle à l'instant t' et vaut $dv' = a(\tau)d\tau$ à l'instant $t' + dt'$.

	\mathcal{R}	\mathcal{R}'
$t' = \tau$	v	0
$t' + dt' = \tau + d\tau$	$v + dv$	$dv' = a(\tau)d\tau$

Pour déterminer dv' , on applique la loi de composition des vitesses

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{vu}{c^2}}$$

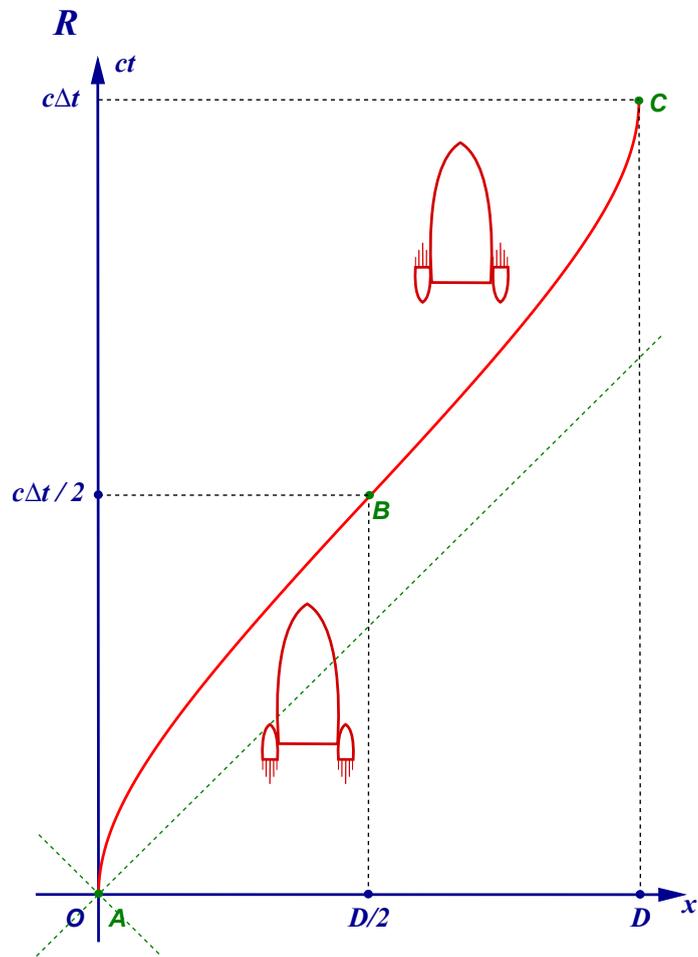


FIGURE 18 – Diagramme d'espace temps montrant la trajectoire du vaisseau dans le référentiel du système solaire. (A) départ à vitesse nulle, début de la phase d'accélération propre constante. (B) fin de la phase d'accélération, début de la décélération. (C) fin de la décélération, arrivée à vitesse nulle.

à l'instant $t' + dt' = \tau + d\tau$, avec $u = v + dv$ la vitesse du vaisseau dans \mathcal{R} , $u' = dv' = a(\tau)d\tau$ la vitesse du vaisseau dans \mathcal{R}' . Comme l'accélération est constante (mis à part le changement de signe au milieu du voyage), on a donc

$$dv' = ad\tau = \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{v dv}{c^2}} \quad \text{d'où} \quad dv' \left[1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{v dv}{c^2} \right] = dv$$

On peut ici négliger le terme de second ordre $v dv dv'/c^2$, ce qui donne

$$dv' \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right] = dv \quad \text{soit} \quad dv' = \gamma^2(v) dv$$

4.4 — Exprimez l'intervalle de temps propre $d\tau = dt'$ en fonction de dt et $\gamma(v)$. Déduisez-en une expression de dv/dt en fonction de a et $\gamma(v)$.

De manière immédiate, $d\tau = dt' = dt/\gamma(v)$. En substituant dt' , on obtient :

$$\frac{dv'}{dt'} = \gamma^3(v) \frac{dv}{dt} \quad \text{soit} \quad a = \gamma^3(v) \frac{dv}{dt}$$

4.5 — En utilisant les relations précédentes, montrez que $d\tau$ est proportionnel à $d\varphi$ où φ est la rapidité ($\beta = \tanh \varphi$). En intégrant sur la première moitié du parcours du vaisseau, exprimez $\Delta\tau$ en fonction de la rapidité à mi-parcours $\varphi_{1/2}$.

Pour ce calcul, on fait intervenir la rapidité φ :

$$\tanh \varphi = \beta = \frac{v}{c} \quad \text{et par conséquent} \quad \frac{d(\tanh \varphi)}{dv} = \frac{1}{c}.$$

Or

$$d(\tanh \varphi) = \frac{1}{\cosh^2 \varphi} d\varphi = \frac{1}{\gamma^2(v)} d\varphi.$$

D'où

$$\frac{dv}{d\varphi} = \frac{c}{\gamma^2(v)}.$$

On reprend maintenant l'expression de $d\tau$:

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma(v)} = \frac{\gamma^2(v)}{a} dv$$

Ce qui donne

$$d\tau = \frac{c}{a} d\varphi,$$

$d\tau$ est donc bien proportionnel à $d\varphi$.

En intégrant sur la première moitié du parcours,

$$\frac{\Delta\tau}{2} = \int_0^{\Delta\tau/2} d\tau = \frac{c}{a} \int_0^{\varphi_{1/2}} d\varphi = \frac{c}{a} \varphi_{1/2}.$$

Et, par symétrie, la durée totale du voyage (pour l'équipage du vaisseau) est :

$$\Delta\tau = \frac{2c}{a} \varphi_{1/2}$$

4.6 — En se souvenant que $dx = v dt$, exprimez dx en fonction de $d\varphi$. Déduisez-en une expression de $\varphi_{1/2}$ en fonction de la distance totale à parcourir D .

On reprend les expressions trouvées aux questions précédentes :

$$a dt = \gamma^3(v) dv \quad \text{et} \quad \frac{dv}{d\varphi} = \frac{c}{\gamma^2(v)} = \frac{c}{\cosh^2 \varphi}.$$

On a donc

$$\gamma^3(v) dv = \gamma(v) c d\varphi = a dt \quad \text{et} \quad dt = \frac{c}{a} \cosh \varphi d\varphi.$$

Ainsi,

$$dx = v dt = c \tanh \varphi dt = \frac{c^2}{a} \sinh \varphi d\varphi,$$

d'où,

$$\frac{D}{2} = \int_0^{D/2} dx = \frac{c^2}{a} \int_0^{\varphi_{1/2}} \sinh \varphi d\varphi \quad \text{et} \quad D = \frac{2c^2}{a} [\cosh \varphi_{1/2} - 1].$$

Ainsi,

$$\varphi_{1/2} = \operatorname{argcosh} \left[\frac{Da}{2c^2} + 1 \right].$$

4.7 — On souhaite déterminer l'accélération a qui permettra à l'équipage d'effectuer ce voyage à la distance $D = 8$ années-lumière en un temps propre de $\Delta\tau = 8$ ans. Montrez que l'équation à résoudre est de la forme :

$$8\xi = \cosh(8\xi) - 1$$

La solution de cette équation est $8\xi \simeq 1.616$ soit $\xi \simeq 0.202$. Sachant que $c \times 1 \text{ an}^{-1} \simeq 9.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, Exprimez a en unités $c \times 1 \text{ an}^{-1}$ et en unités SI.

À l'aide des résultats des deux questions précédentes, on a

$$\Delta\tau = \frac{2c}{a} \operatorname{argcosh} \left(\frac{Da}{2c^2} + 1 \right),$$

ce qui donne

$$\frac{Da}{2c^2} = \cosh \left(\frac{a\Delta\tau}{2c} \right) - 1.$$

Dans notre cas, $D = 8 \text{ a.l.}$, $\Delta\tau = 8 \text{ ans}$ et $c = 1 \text{ a.l./an}$. En posant

$$\xi = \frac{a}{2c},$$

on trouve bien l'équation :

$$8\xi = \cosh(8\xi) - 1.$$

Et on en déduit :

$$a = 2c\xi = 0.404 c/\text{an} \approx 3.84 \text{ m s}^{-2}.$$

4.8 — Combien de temps dure le voyage pour les observateurs restés sur Terre? Exprimez Δt en fonction de c , a et $\varphi_{1/2}$. Application numérique.

On donne : $c \times 1 \text{ an}^{-1} \simeq 9.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, et $\sinh(1.616) \simeq 2.417$.

On repart de l'expression trouvée pour dt :

$$dt = \frac{c}{a} \cosh \varphi d\varphi$$

On intègre :

$$\Delta t = \frac{2c}{a} \int_0^{\varphi_{1/2}} \cosh \varphi d\varphi = \frac{2c}{a} \sinh \varphi_{1/2}.$$

Ce qui donne numériquement :

$$\Delta t \approx 12 \text{ ans.}$$



3^{ème} Partie

Formalisme quadrivectoriel — Invariants — Quadrivecteurs position, vitesse, accélération — Quadri-force — Tenseurs — composantes covariantes et contravariantes.

1. Propriétés des quadrivecteurs

1.1 — Soit un quadrivecteur $\tilde{\mathbf{A}}$. Montrez que le carré de sa pseudo-norme :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}^2 &= (A_t)^2 - (A_x)^2 - (A_y)^2 - (A_z)^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 \\ &= A_0 A^0 + A_1 A^1 + A_2 A^2 + A_3 A^3 = A_\mu A^\mu\end{aligned}$$

est invariant lorsqu'on passe d'un référentiel galiléen à un autre. Montrez, de même, que pour deux quadrivecteurs $\tilde{\mathbf{A}}$ et $\tilde{\mathbf{B}}$, le produit pseudo-scalaire :

$$\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 = A_\mu B^\mu$$

est invariant de Lorentz.

Il suffit de montrer que pour deux quadrivecteurs quelconques $\tilde{\mathbf{A}}$ et $\tilde{\mathbf{B}}$, le pseudo-produit scalaire $\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = A_\mu B^\mu$ est invariant de Lorentz. La pseudo-norme carrée correspond au cas particulier $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{B}}$.

Lors d'un changement de référentiel galiléen, les composantes contravariantes B^μ de $\tilde{\mathbf{B}}$ se transforment selon :

$$B'^\mu = [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu B^\nu \quad \text{avec} \quad [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$$

À l'inverse, les composantes covariantes A_μ de $\tilde{\mathbf{A}}$ se transforment par changement de référentiel inertiel selon la relation inverse :

$$A'_\mu = [\bar{\mathbf{L}}]_\mu{}^\nu A_\nu \quad \text{avec} \quad [\bar{\mathbf{L}}]_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [\mathbf{L}][\bar{\mathbf{L}}] = \mathbf{1} \quad [\bar{\mathbf{L}}]_\mu{}^\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$$

Considérons maintenant le produit $\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{B}}$. Dans le référentiel \mathcal{R}' , il s'écrit :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}' \cdot \tilde{\mathbf{B}}' &= A'_\mu B'^\mu = A'_0 B'^0 + A'_1 B'^1 + A'_2 B'^2 + A'_3 B'^3 \\ &= \gamma^2 (A_0 + \beta A_1)(B^0 - \beta B^1) + \gamma^2 (A_1 + \beta A_0)(B^1 - \beta B^0) + A_2 B^2 + A_3 B^3 \\ &= \gamma^2 [A_0 B^0 - \beta A_0 B^1 + \beta A_1 B^0 - \beta^2 A_1 B^1 + A_1 B^1 - \beta A_1 B^0 + \beta A_0 B^1 - \beta^2 A_0 B^0] \\ &\quad + A_2 B^2 + A_3 B^3 \\ &= \gamma^2 (1 - \beta^2) (A_0 B^0 + A_1 B^1) + A_2 B^2 + A_3 B^3 = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 = A_\mu B^\mu.\end{aligned}$$

Le pseudo-produit scalaire $A_\mu B^\mu$ de deux quadrivecteurs quelconques $\tilde{\mathbf{A}}$ et $\tilde{\mathbf{B}}$ est bien invariant de Lorentz. Il s'ensuit que la pseudo-norme carrée $\tilde{\mathbf{A}}^2 = A_\mu A^\mu$ de tout quadrivecteur $\tilde{\mathbf{A}}$ l'est aussi.

1.2 — Montrez que l'intervalle de temps propre $d\tau$ est un invariant de Lorentz.

Soient deux événements E_1 et E_2 , observés depuis deux référentiels inertiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' en translation uniforme l'un par rapport à l'autre. On suppose de plus que ces deux événements se produisent au même point dans \mathcal{R}' , où ils sont séparés par un petit intervalle de temps dt' . on aura $dx' = \gamma(dx - \beta cdt) = 0$, et donc $dx = \beta cdt = vt$. L'intervalle de temps dt' vaut ainsi :

$$cdt' = \gamma(cdt - dx) = \gamma(1 - \beta^2)dt = \frac{1}{\gamma}dt \quad \text{d'où} \quad dt = \gamma dt' > dt'$$

Le temps semble s'écouler plus lentement dans le référentiel \mathcal{R}' où les deux événements ont lieu au même point.

Ainsi, pour un observateur, le temps $d\tau$ mesuré dans le référentiel qui lui est attaché semble toujours s'écouler plus lentement que dans tout autre référentiel : $dt = \gamma d\tau > d\tau$. Le temps τ est le **temps propre** de l'observateur; l'intervalle élémentaire de temps propre $d\tau$ est un invariant car $ds^2 = c^2 d\tau^2$. et ds^2 est un invariant de Lorentz.

1.3 — À partir du quadrivecteur position $\tilde{\mathbf{r}}$, construisez un quadrivecteur vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$ qui obéisse aux transformations de Lorentz lorsqu'on passe d'un référentiel galiléen à un autre. Que vaut $\tilde{\mathbf{U}}^2 = U_\mu U^\mu$? Est-ce un invariant?

Considérons un mobile se déplaçant à la vitesse $\mathbf{u} = d\mathbf{r}/dt$ dans le référentiel \mathcal{R} (en toute généralité, le mouvement du mobile est quelconque, non nécessairement en translation uniforme). À tout instant t , pendant un intervalle de temps dt , on peut raisonner dans le référentiel galiléen tangent au référentiel propre du mobile et établir que :

$$dt = \gamma(u)d\tau > d\tau$$

où u est la vitesse instantanée du mobile mesurée dans \mathcal{R} , et $d\tau$ est l'intervalle de temps propre mesuré dans le référentiel propre du mobile. Comme $d\tau$ est un invariant de Lorentz, on peut construire un quadrivecteur vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$ dans \mathcal{R} en dérivant $\tilde{\mathbf{r}}$ par rapport à τ plutôt qu'à t :

$$\tilde{\mathbf{U}} = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau} \quad U^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)c \\ \gamma(u)\mathbf{u} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

La pseudo-norme carrée du quadrivecteur vitesse est :

$$\tilde{\mathbf{U}}^2 = \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = c^2.$$

qui est évidemment un invariant de Lorentz (c est invariant).

2. Vitesse relative

Vus d'un repère \mathcal{R} , Luke et Han Solo se déplacent aux vitesses constantes \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_H respectivement. On cherche à déterminer leur vitesse relative en fonction de \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_H sans utiliser les transformations de Lorentz. En utilisant l'invariance du produit scalaire des quadri-vitesses $\tilde{\mathbf{U}}_L$ et $\tilde{\mathbf{U}}_H$ par changement de repère, déterminer le facteur $\gamma(\mathbf{u}_{L/H})$ de Luke par rapport à Han. En déduire la norme de la vitesse relative de Luke par rapport à Han.

Dans le référentiel \mathcal{R} , les quadrivecteurs vitesse respectifs de Han et Luke ont pour composantes contravariantes :

$$\tilde{\mathbf{U}}_H : U_H^\mu = (\gamma(\mathbf{u}_H)c, \gamma(\mathbf{u}_H)\mathbf{u}_H)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_L : U_L^\mu = (\gamma(\mathbf{u}_L)c, \gamma(\mathbf{u}_L)\mathbf{u}_L)$$

Dans le référentiel de Han $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_H$, la vitesse de Han est nulle, et les quadrivecteurs vitesse s'écrivent par conséquent :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{U}}'_H : U'^\mu_H &= (c, \mathbf{0}) \\ \tilde{\mathbf{U}}'_L : U'^\mu_L &= (\gamma(\mathbf{u}_{L/H})c, \gamma(\mathbf{u}_{L/H})\mathbf{u}_{L/H})\end{aligned}$$

où $\mathbf{u}_{L/H}$ est la vitesse de Luke par rapport à Han, mesurée dans \mathcal{R}_H .

Le pseudo-produit scalaire $\tilde{\mathbf{U}}_H \cdot \tilde{\mathbf{U}}_L$ étant invariant de Lorentz, on a par conséquent :

$$\tilde{\mathbf{U}}_H \cdot \tilde{\mathbf{U}}_L = \tilde{\mathbf{U}}'_H \cdot \tilde{\mathbf{U}}'_L$$

Soit :

$$\gamma(\mathbf{u}_H)\gamma(\mathbf{u}_L)c^2 - \gamma(\mathbf{u}_H)\gamma(\mathbf{u}_L)\mathbf{u}_H \cdot \mathbf{u}_L = \gamma(\mathbf{u}_{L/H})c^2$$

Ce qui permet d'en déduire $\gamma(\mathbf{u}_{L/H})$:

$$\gamma(\mathbf{u}_{L/H}) = \gamma(\mathbf{u}_H)\gamma(\mathbf{u}_L) \left[1 - \frac{\mathbf{u}_H \cdot \mathbf{u}_L}{c^2} \right]$$

Ainsi que la norme $u_{L/H}$ de la vitesse relative de Luke par rapport à Han Solo :

$$u_{L/H} = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma(\mathbf{u}_{L/H})^2}}.$$

3. Quadri-accélération

3.1 — Retrouver les expressions des composantes temporelles A^0 et spatiales \mathbf{A} de la quadri-accélération d'une particule $\tilde{\mathbf{A}}$ en un événement où, dans un repère inertiel, sa vitesse et son accélération valent respectivement \mathbf{u} et $\dot{\mathbf{u}}$.

Le quadrivecteur accélération $\tilde{\mathbf{A}}$ est la dérivée du quadrivecteur vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$ par rapport au temps propre τ de l'objet en mouvement. En dérivant par rapport à τ , on obtient :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \frac{d\tilde{\mathbf{U}}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tilde{\mathbf{U}}}{dt} = \begin{pmatrix} \gamma^4(u) \frac{\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{c} \\ \gamma^4(u) \frac{\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{c^2} \mathbf{u} + \gamma^2(u) \dot{\mathbf{u}} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

Pour ce calcul, il est important de se souvenir qu'ici la vitesse \mathbf{u} n'est pas constante, et par conséquent le facteur relativiste $\gamma(\mathbf{u})$ ne l'est pas non plus. Sa dérivée par rapport au temps propre τ s'écrit :

$$\frac{d\gamma(\mathbf{u})}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\gamma(\mathbf{u})}{dt} = \gamma(\mathbf{u}) \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} \right)^{-1/2} = \gamma^4(\mathbf{u}) \frac{\mathbf{u}}{c^2} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \gamma^4(\mathbf{u}) \frac{\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}}{c^2}.$$

3.2 — En déduire les valeurs A'^0 et \mathbf{A}' des composantes de ce même quadrivecteur accélération dans un repère inertiel où la vitesse est nulle et l'accélération (dite alors propre) vaut \mathbf{a} .

Si on se place dans le référentiel \mathcal{R}' tangent à l'objet en mouvement à un instant donné, référentiel où, à l'instant considéré, la vitesse \mathbf{u} est nulle (mais $\dot{\mathbf{u}}$ ne l'est pas), et où $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{a}$, les composantes de $\tilde{\mathbf{A}}'$ s'écrivent :

$$A'^{\mu} = \begin{pmatrix} A'^0 \\ \mathbf{A}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}$$

On trouve immédiatement que la pseudo-norme carrée de $\tilde{\mathbf{A}}'$ vaut $A'_{\mu} A'^{\mu} = -a^2$, où \mathbf{a} est l'accélération propre (i.e. mesurée dans le référentiel propre de l'objet). Comme il s'agit d'un invariant de Lorentz, dans tout référentiel inertiel on aura $\tilde{\mathbf{A}}^2 = -a^2$.

3.3 — En déduire l'expression de \mathbf{a}^2 en fonction de \mathbf{u} et de $\dot{\mathbf{u}}$.

En utilisant l'invariance de la pseudo-norme carrée de $\tilde{\mathbf{A}}$, on obtient :

$$\tilde{\mathbf{A}}'^2 = \tilde{\mathbf{A}}^2 \quad \text{soit} \quad -a^2 = (A^0)^2 - \mathbf{A}^2$$

Ce qui donne, en développant,

$$\begin{aligned} -a^2 &= \gamma^8(u) \frac{(\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}})^2}{c^2} - \gamma^8(u) \frac{(\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}})^2 \mathbf{u}^2}{c^4} - \gamma^4(u) \dot{\mathbf{u}}^2 - 2\gamma^6(u) \frac{(\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}})^2}{c^2} \\ &= \gamma^8(u) \frac{(\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}})^2}{c^2} \left[1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} \right] - \gamma^4(u) \dot{\mathbf{u}}^2 - 2\gamma^6(u) \frac{(\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}})^2}{c^2} \\ &= -\gamma^6(u) \frac{(\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}})^2}{c^2} - \gamma^4(u) \dot{\mathbf{u}}^2. \end{aligned}$$

Soit,

$$a^2 = \gamma^6(u) \frac{(\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}})^2}{c^2} + \gamma^4(u) \dot{\mathbf{u}}^2.$$

3.4 — Que devient cette expression dans le cas d'une accélération longitudinale, c'est à dire lorsque $\dot{\mathbf{u}}$ est parallèle à \mathbf{u} ?

On peut ré-écrire l'expression précédente en multipliant le second terme par $\gamma^2(u) (1 - \mathbf{u}^2/c^2) = 1$, ce qui donne :

$$a^2 = \gamma^6(u) \frac{(\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}})^2}{c^2} + \gamma^6(u) \left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} \right) \dot{\mathbf{u}}^2 = \gamma^6(u) \left[\dot{\mathbf{u}}^2 + \frac{(\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}})^2}{c^2} - \frac{\mathbf{u}^2 \dot{\mathbf{u}}^2}{c^2} \right] = \gamma^6(u) \dot{\mathbf{u}}^2 - \gamma^6(u) \frac{(\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}})^2}{c^2}$$

où on a utilisé l'égalité suivante pour deux vecteurs quelconques \mathbf{P} et \mathbf{Q} :

$$P^2 Q^2 = \mathbf{P}^2 \mathbf{Q}^2 = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})^2 + (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})^2.$$

Dans le cas particulier d'une accélération longitudinale, on a $\dot{\mathbf{u}} // \mathbf{u}$ et par conséquent le produit vectoriel $\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}$ s'annule. Il reste alors :

$$a^2 = \gamma^6(u) \dot{\mathbf{u}}^2 \quad \text{soit} \quad a = \gamma^3(u) \dot{u} = \gamma^3(u) \frac{du}{dt}.$$

On retrouve ainsi le résultat obtenu lors de l'étude des mouvements accélérés (exercices de la fusée, des jumeaux, etc).

4. Quadri-force

Considérons une particule de quadri-vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$ qui subit une quadriforce $\tilde{\mathbf{f}} = d\tilde{\mathbf{p}}/d\tau$.

4.1 — Rappeler ce que vaut $\tilde{\mathbf{U}}^2 = U_\mu U^\mu$. Déduisez-en $U_\mu dU^\mu/d\tau$.

Le quadrivecteur vitesse $\tilde{\mathbf{U}} : U^\mu$ d'un mobile de vitesse instantanée \mathbf{u} dans un référentiel inertiel \mathcal{R} s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{U}} = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau} \quad U^\mu = \left(\gamma(u)c, \gamma(u)\mathbf{u} \right) \quad \text{avec} \quad \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Sa pseudo-norme carrée vaut :

$$\tilde{\mathbf{U}}^2 = U_\mu U^\mu = \eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = \gamma(u)^2 c^2 - \gamma(u)^2 u^2 = \gamma(u)^2 c^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) = c^2.$$

Par conséquent, $\tilde{\mathbf{U}}^2 = U_\mu U^\mu = c^2$ est non seulement un invariant de Lorentz, mais aussi une constante. On en déduit que sa dérivée par rapport au temps propre du mobile est nulle :

$$\frac{d\tilde{\mathbf{U}}^2}{d\tau} = 2\tilde{\mathbf{U}} \cdot \frac{d\tilde{\mathbf{U}}}{d\tau} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{d(U_\mu U^\mu)}{d\tau} = 2U_\mu \frac{dU^\mu}{d\tau} = 0$$

Et par conséquent,

$$U_\mu \frac{dU^\mu}{d\tau} = 0 \quad \text{i.e.} \quad U_\mu A^\mu = 0 \quad \tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} = 0$$

où $\tilde{\mathbf{A}} : A^\mu$ est la quadri-accélération.

Autrement dit, les quadrivecteurs vitesse et accélération sont toujours orthogonaux au sens des quadrivecteurs.

4.2 — Montrez que le produit $\tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}$ est nul. Déduisez-en une expression pour la variation de l'énergie E de la particule en fonction du temps $\dot{E} = dE/dt$. Quel résultat retrouve-t-on ?

Pour un mobile de masse propre m constante, on peut écrire la quadri-force comme :

$$\tilde{\mathbf{f}} = \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{d\tau} = m \frac{d\tilde{\mathbf{U}}}{d\tau} \quad \text{i.e.} \quad f^\mu = m \frac{dU^\mu}{d\tau}$$

D'après ce qui précède, on en déduit immédiatement que le pseudo-produit scalaire $\tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}$ est nul :

$$\tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = m \frac{d\tilde{\mathbf{U}}}{d\tau} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = m \frac{dU^\mu}{d\tau} U_\mu = 0.$$

D'autre part, les composantes contravariantes de la quadri-force $\tilde{\mathbf{f}}$ peuvent s'écrire :

$$\tilde{\mathbf{f}} : f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \left(\frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau}, \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{dt}{d\tau} \frac{dE}{dt}, \frac{dt}{d\tau} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) = \left(\frac{1}{c} \gamma(u) \frac{dE}{dt}, \gamma(u) \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)$$

Comme $\tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = f^\mu U_\mu = 0$, on en déduit :

$$\tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = f^\mu U_\mu = \gamma(u)^2 \frac{dE}{dt} - \gamma(u)^2 \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{u} = 0$$

Soit :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{u}.$$

Si on pose :

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(\gamma(u)m\mathbf{u})}{dt},$$

on obtient alors :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}.$$

On retrouve ici un résultat analogue (d'un point de vue formel) à la mécanique classique : la variation de l'énergie d'un mobile par unité de temps est égale à la puissance des forces appliquées sur cette particule.

5. Tenseurs, composantes covariantes et contravariantes

5.1 — Soient un quadrivecteur $\tilde{\mathbf{V}}$ et un quadritenseur $\tilde{\mathbf{T}}$ de composantes :

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad V^\mu = (-1, 2, 0, -2)$$

Ecrivez les composantes de

$$T_{\mu\nu} \quad T^\mu{}_\nu \quad T_\mu{}^\nu \quad T_\lambda{}^\lambda \quad V_\mu V^\mu \quad V_\mu T^{\mu\nu}$$

En pratique, on fait “monter” un indice en contractant avec la métrique $\eta^{\mu\nu}$, et on “abaisse” un indice en contractant avec la métrique $\eta_{\mu\nu}$. Dans l'espace-temps plat de Minkowski, on a :

$$\eta_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \eta^{\mu\nu} = \mathbf{e}^\mu \cdot \mathbf{e}^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi les composantes une fois contravariantes une fois covariante du tenseur $\tilde{\mathbf{T}}$:

$$T^\mu{}_\nu = \eta_{\nu\alpha} T^{\mu\alpha} = T^{\mu\alpha} \eta_{\nu\alpha} = T^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu}$$

car le tenseur métrique $\eta_{\nu\alpha}$ est symétrique. On reconnaît dans la dernière expression un produit matriciel, ce qui donne :

$$T^\mu{}_\nu = T^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On procède de même pour obtenir les composantes une fois covariantes une fois contravariantes $T_\mu{}^\nu$:

$$T_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\alpha} T^{\alpha\nu}$$

où on reconnaît un produit matriciel,

$$T_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\alpha} T^{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour abaisser les deux indices de $T^{\mu\nu}$ et obtenir les composantes deux fois covariantes de T , on contracte deux fois avec la métrique $\eta_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}T^{\alpha\beta}$$

En réordonnant les termes (somme de produits de nombres), et en utilisant la symétrie du tenseur métrique, on peut mettre cette expression sous la forme d'un produit matriciel :

$$T_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}T^{\alpha\beta} = \eta_{\mu\alpha}T^{\alpha\beta}\eta_{\nu\beta} = \eta_{\mu\alpha}T^{\alpha\beta}\eta_{\beta\nu}$$

Ce qui donne :

$$T_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}T^{\alpha\beta}\eta_{\beta\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

On pouvait aussi obtenir ce résultat à partir de $T^\mu{}_\nu$ par exemple,

$$T_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}T^\alpha{}_\nu.$$

On peut calculer la contraction $T_\lambda{}^\lambda$ en énumérant simplement les termes de la somme :

$$T_\lambda{}^\lambda = T_0{}^0 + T_1{}^1 + T_2{}^2 + T_3{}^3 = 2 + 0 + 0 + 2 = 4$$

On aura bien sûr $T_\lambda{}^\lambda = T^\lambda{}_\lambda$. Il s'agit de la *trace* du tenseur $T_\mu{}^\nu$, qui est aussi un invariant de Lorentz.

Enfin, pour le quadrivecteur de composantes contravariantes V^μ , on obtient les composantes covariantes en contractant avec la métrique $\eta_{\mu\nu}$,

$$V_\mu = \eta_{\mu\alpha}V^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La pseudo-norme carrée de $\tilde{\mathbf{V}}$ s'obtient par :

$$V_\mu V^\mu = V_0 V^0 + V_1 V^1 + V_2 V^2 + V_3 V^3 = (-1) \times (-1) + (-2) \times 2 + 0 \times 0 + 2 \times (-2) = -7$$

Enfin, la contraction de V_μ avec $T^{\mu\nu}$ s'écrit :

$$V_\mu T^{\mu\nu} = (-1, -2, 0, 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = (-4, 2, -5, -7).$$

On pouvait aussi obtenir ce résultat en remarquant que $V_\mu T^{\mu\nu} = V^\mu T_\mu{}^\nu$.

5.2 — Écrivez les composantes contravariantes p^μ du quadrivecteur énergie-impulsion $\tilde{\mathbf{p}}$ d'une particule. Comment obtient-on les composantes covariantes p_μ ? Écrivez ces composantes explicitement.

On construit le quadrivecteur énergie-impulsion (ou quadri-impulsion) $\tilde{\mathbf{p}}$ comme suit, par analogie avec la mécanique classique :

$$\tilde{\mathbf{p}} = m \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau} = m\tilde{\mathbf{U}}$$

Ses composantes contravariantes s'écrivent :

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)mc \\ \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c = \gamma(u)mc \\ \mathbf{p} = \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} \quad \text{avec } E \text{ l'énergie totale de l'objet étudié.}$$

De même, ses composantes covariantes s'écrivent :

$$p_\mu = \eta_{\mu\nu}p^\nu = \begin{pmatrix} \gamma(u)mc \\ -\gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c = \gamma(u)mc \\ -\mathbf{p} = -\gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Dans ces relations, m est la masse propre de l'objet (c'est à dire sa masse au repos), $\gamma(u)m > m$ est en quelque sorte sa "masse apparente", et $E = \gamma(u)mc^2$ son énergie totale, somme de son énergie de masse $E_0 = mc^2$ et de son énergie cinétique $T = E - mc^2 = (\gamma(u) - 1)mc^2$.

La pseudo-norme carrée de $\tilde{\mathbf{p}}$ vaut $\tilde{\mathbf{p}}^2 = m^2c^2 = (mc^2)^2/c^2$.

Les composantes de $\tilde{\mathbf{p}}$ vérifient les relations suivantes, très utiles :

$$\tilde{\mathbf{p}}^2 = (mc^2)^2/c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 \quad \text{i.e. } E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$\vec{\beta} = \frac{\mathbf{p}}{p^0} = \frac{\mathbf{p}c}{E} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{E}{mc^2}$$

5.3 — On peut écrire l'opérateur gradient sous forme tensorielle :

$$\tilde{\nabla} : \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial r^\mu}$$

Explicitez ∂_μ et ∂^μ .

Les composantes naturelles du quadri-gradient sont covariantes :

$$\tilde{\nabla} : \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial r^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

où on reconnaît la composante spatiale de $\tilde{\nabla}$ comme étant l'opérateur gradient habituel.

Les composantes contravariantes de $\tilde{\nabla}$ sont les dérivées partielles par rapports aux coordonnées covariantes x_μ d'espace-temps :

$$\tilde{\nabla} : \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial r_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right).$$

5.4 — Explicitez la contraction $\partial_\mu \partial^\mu$. Que reconnaissez-vous ?

De manière immédiate,

$$\tilde{\nabla}^2 = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla \cdot \nabla = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \square$$

On reconnaît l'expression du D'Alembertien, qui est donc un opérateur naturellement covariant.

4^{ème} Partie

Dynamique relativiste — Quadrivecteur énergie-impulsion (ou quadri-impulsion) — Défaut de masse — Collisions élastiques et inélastiques de particules — Effet Compton — Energie seuil — Bosc de Higgs.

1. Energie et impulsion

1.1 — Rappelez la définition de la quadri-impulsion d'une particule de masse m , de temps propre τ , de ligne d'univers $\tilde{\mathbf{x}}(\tau)$.

1.2 — En déduire les expressions de l'énergie et de l'impulsion de la particule de masse m , de vitesse \mathbf{u} .

1.3 — En déduire les diverses identités remarquables satisfaites par la quadri-impulsion, l'énergie, l'impulsion et la vitesse \mathbf{u} de la particule de masse m .

On construit le quadrivecteur énergie-impulsion (ou quadri-impulsion) $\tilde{\mathbf{p}}$ comme suit, par analogie avec la mécanique classique :

$$\tilde{\mathbf{p}} = m \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau} = m\tilde{\mathbf{U}}$$

Ses composantes contravariantes s'écrivent :

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)mc \\ \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c = \gamma(u)mc \\ \mathbf{p} = \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} \quad \text{avec } E \text{ l'énergie totale de l'objet étudié.}$$

De même, ses composantes covariantes s'écrivent :

$$p_\mu = \eta_{\mu\nu}p^\nu = \begin{pmatrix} \gamma(u)mc \\ -\gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c = \gamma(u)mc \\ -\mathbf{p} = -\gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Dans ces relations, m est la masse propre de l'objet (c'est à dire sa masse au repos), $\gamma(u)m > m$ est en quelque sorte sa "masse apparente", et $E = \gamma(u)mc^2$ son énergie totale, somme de son énergie de masse $E_0 = mc^2$ et de son énergie cinétique $T = E - mc^2 = (\gamma(u) - 1)mc^2$.

La pseudo-norme carrée de $\tilde{\mathbf{p}}$ vaut $\tilde{\mathbf{p}}^2 = m^2c^2 = (mc^2)^2/c^2$.

Les composantes de $\tilde{\mathbf{p}}$ vérifient les relations suivantes, très utiles :

$$\tilde{\mathbf{p}}^2 = (mc^2)^2/c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 \quad \text{i.e. } E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$\vec{\beta} = \frac{\mathbf{p}}{p^0} = \frac{\mathbf{p}c}{E} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{E}{mc^2}$$

1.4 — On considère la diffusion élastique proton-proton vue du laboratoire : proton cible immobile, énergie cinétique du proton incident 437 MeV, masse du proton 938 MeV. On s'intéresse au cas où les deux protons de l'état final ont la même énergie. Considérant la conservation de la quadri-impulsion totale, et donc de son carré, calculez l'angle formé par les directions de propagation des protons de l'état final. Et dans le cas d'un proton incident de 1 TeV (produit par le TEVATRON du Fermilab) ?

Si on note $\tilde{\mathbf{p}}_1$ et $\tilde{\mathbf{p}}_2$ les quadrivecteurs énergie-impulsion respectifs du proton incident et du proton cible, et $\tilde{\mathbf{p}}'_1$ et $\tilde{\mathbf{p}}'_2$ les quadrivecteurs énergie-impulsion des deux protons (indiscernables) après la collision, on a, par conservation :

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}'_1 + \tilde{\mathbf{p}}'_2 \quad (12)$$

En élevant au carré l'équation (12), on trouve :

$$\tilde{\mathbf{p}}_1^2 + \tilde{\mathbf{p}}_2^2 + 2\tilde{\mathbf{p}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}_1'^2 + \tilde{\mathbf{p}}_2'^2 + 2\tilde{\mathbf{p}}_1' \cdot \tilde{\mathbf{p}}_2' \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{p}}_1^2 = \tilde{\mathbf{p}}_2^2 = \tilde{\mathbf{p}}_1'^2 = \tilde{\mathbf{p}}_2'^2 = m^2 c^2$$

D'où on déduit :

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}_1' \cdot \tilde{\mathbf{p}}_2' \quad (13)$$

Or, dans le référentiel du laboratoire, on a :

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 : p_1^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{p}}_2 : p_2^\mu = \begin{pmatrix} mc \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{p}}_1' : p_1'^\mu = \begin{pmatrix} E_1'/c \\ \mathbf{p}'_1 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{p}}_2' : p_2'^\mu = \begin{pmatrix} E_2'/c \\ \mathbf{p}'_2 \end{pmatrix}$$

En substituant, on trouve (en utilisant la relation $E'^2 - m^2 c^4 = p'^2 c^2$) :

$$Em = \frac{E_1' E_2'}{c^2} - \mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2 = \frac{E_1' E_2'}{c^2} - \frac{1}{c^2} \sqrt{E_1'^2 - m^2 c^4} \sqrt{E_2'^2 - m^2 c^4} \cos \theta$$

Ce qui donne l'angle θ entre les impulsions des deux protons après la collision :

$$\cos \theta = \frac{E_1' E_2' - Emc^2}{\sqrt{E_1'^2 - m^2 c^4} \sqrt{E_2'^2 - m^2 c^4}}$$

Dans le cas particulier où $E_1' = E_2'$, on a aussi $p'_1 = p'_2$ (en norme). L'expression de θ se simplifie alors :

$$\cos \theta = \frac{E_1'^2 - Emc^2}{E_1'^2 - m^2 c^4}$$

De plus, en utilisant la conservation de l'énergie,

$$E + mc^2 = E_1' + E_2' = 2E_1' \quad \text{d'où} \quad E_1' = E_2' = \frac{E + mc^2}{2} = \frac{T + 2mc^2}{2} \quad (14)$$

en faisant apparaître l'énergie cinétique $T = E - mc^2$ de la particule incidente.

En substituant dans l'expression de θ , on trouve :

$$\cos \theta = \frac{E'^2 - Emc^2}{E_1'^2 - m^2 c^4} = \frac{\left(\frac{E + mc^2}{2}\right)^2 - Emc^2}{\left(\frac{E + mc^2}{2}\right)^2 - m^2 c^4} = \frac{T^2}{T^2 + 4mc^2 T} = \frac{1}{1 + \frac{4mc^2}{T}} < 1.$$

Ce qui montre que dans le cas relativiste, l'angle θ est inférieur à $\pi/2$.

Numériquement, pour une collision élastique de protons sur cible fixe avec $T = 437$ MeV, on obtient :

$$\cos \theta = \frac{1}{1 + \frac{4mc^2}{T}} \simeq 0.104 \quad \text{i.e.} \quad \theta \simeq 84.01^\circ.$$

Et pour un proton incident d'énergie cinétique $T = 1 \text{ TeV}$,

$$\cos \theta = \frac{1}{1 + \frac{4mc^2}{T}} \simeq 0.996 \quad \text{i.e.} \quad \theta \simeq 4.96^\circ.$$

1.5 — On considère la collision inélastique, $m + m \rightarrow m'$, d'une particule de masse m , de vitesse $4/5c$, sur une particule de masse m , immobile. Calculez la masse m' de la particule finale, ainsi que sa vitesse.

Avant la collision, les quadri-impulsions $\tilde{\mathbf{p}}_1$ et $\tilde{\mathbf{p}}_2$ ont pour composantes :

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 : p_1^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E_1}{c} = \gamma(u_1)mc \\ \mathbf{p}_1 = \gamma(u_1)m\mathbf{u}_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{p}}_2 : p_2^\mu = \begin{pmatrix} mc \\ \mathbf{p}_2 = \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

où la particule 1 possède une vitesse $u_1 = 4c/5$, et par conséquent,

$$\gamma(u_1) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{16}{25}}} = \frac{5}{3}$$

Après la collision, il n'y a plus qu'une seule particule de masse inconnue m' , de quadri-impulsion $\tilde{\mathbf{p}}_f$ avec :

$$\tilde{\mathbf{p}}_f : p_f^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E_f}{c} = \gamma(u_f)m'c \\ \mathbf{p}_f = \gamma(u_f)m'\mathbf{u}_f \end{pmatrix}$$

La conservation de la quadri-impulsion implique :

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}_f$$

En élevant au carré (pseudo-norme carrée), on obtient :

$$\tilde{\mathbf{p}}_1^2 + \tilde{\mathbf{p}}_2^2 + 2\tilde{\mathbf{p}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}_f^2 \quad \text{soit} \quad 2m^2c^2 + 2\gamma(u_1)m^2c^2 = m'^2c^2$$

On en déduit la masse m' de la particule obtenue :

$$m' = m\sqrt{2 + 2\gamma(u_1)} = \frac{4}{\sqrt{3}}m$$

Pour obtenir la vitesse de la particule après la collision, on peut utiliser la conservation de l'énergie (composante zéro de la quadri-impulsion) :

$$\gamma(u_1)mc^2 + mc^2 = \gamma(u_f)m'c^2 \quad \text{i.e.} \quad \gamma(u_f) = \frac{1 + \gamma(u_1)}{\sqrt{2 + 2\gamma(u_1)}} = \sqrt{\frac{1 + \gamma(u_1)}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

On en déduit la vitesse u_f de la particule produite après la collision,

$$u_f = c\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2(u_f)}} = \frac{c}{2}.$$

2. Défaut de masse, énergie de liaison

Uranium-238. Calculez le défaut de masse de l'uranium ^{238}U connaissant sa masse $m = 238.0507826 \text{ u}$. Exprimez le résultat en MeV.

Retrouvez ce résultat à partir de l'excès de masse $\Delta = 47.3089 \text{ MeV}$.

Données :

$$\begin{aligned} m_n &= 1.008665 \text{ u} &= 939.565 \text{ MeV}/c^2 \\ m_p &= 1.007276 \text{ u} &= 938.272 \text{ MeV}/c^2 \\ m_e &= 0.000549 \text{ u} &= 511 \text{ keV}/c^2 \\ 1 \text{ u} &= 1.660538 \times 10^{-27} \text{ kg} &= 931.494 \text{ MeV}/c^2. \end{aligned}$$

Rappel : l'excès de masse est une grandeur pratique dépourvue de sens particulier, positive ou négative, définie comme la différence entre la masse *atomique* et A fois une unité atomique :

$$\Delta\left(\frac{A}{Z}\text{X}\right) = m\left(\frac{A}{Z}\text{X}\right) - A \times 1 \text{ u}$$

Elle est en général exprimée en MeV.

Le défaut de masse de $^{238}_{92}\text{U}$ s'obtient en calculant la différence entre la masse de $^{238}_{92}\text{U}$ et la somme des masses de ses constituants, en se rappelant que les masses données dans les tables sont des masses *atomiques* : il ne faut pas oublier le cortège électronique. On obtient donc :

92 p	$92 \times 1.007276 \text{ u} =$	92.669392 u
146 n	$146 \times 1.008665 \text{ u} =$	147.265090 u
92 e	$92 \times 0.000549 \text{ u} =$	0.050508 u
total		239.984990 u
$^{238}_{92}\text{U}$		238.050783 u
défaut		-1.934207 u

Soit un défaut de masse de $-1.934207 \text{ u} \simeq -1801.70 \text{ MeV}/c^2$. L'énergie de liaison de ce noyau est donc $B = 1801.70 \text{ MeV}$.

Au lieu de la masse atomique, les tables fournissent parfois l'excès de masse de chaque isotope. A partir de l'excès de masse Δ il est facile de retrouver la masse atomique :

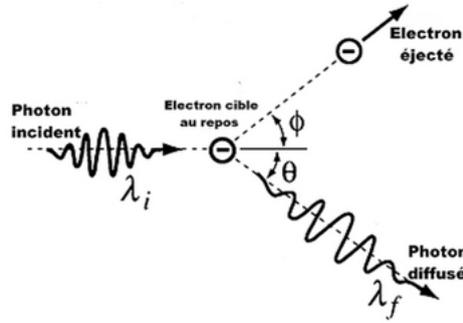
$$m(^{238}_{92}\text{U}) = A \times 1 \text{ u} + \Delta(^{238}_{92}\text{U}) = 238 \text{ u} + 47.3089 \text{ MeV} = 238 \text{ u} + 0.05078 \text{ u} = 238.05078 \text{ u}$$

On peut ensuite calculer le défaut de masse de la même manière que précédemment.

3. L'effet Compton

En 1923, Arthur H. Compton (1892-1962) découvre que lorsqu'un photon diffuse sur un électron, la longueur d'onde du photon diffusé est modifiée, et que ce changement de longueur d'onde $\Delta\lambda$ dépend de l'angle de diffusion θ . Ce phénomène, inexplicable par l'électromagnétisme classique, ne peut être compris que dans le cadre relativiste; la découverte de l'effet Compton établit définitivement l'idée de dualité onde-corpuscule pour le photon.

3.1 — On considère la collision d'un photon d'énergie $h\nu_0$ avec un électron libre au repos (approximation raisonnable lorsque l'énergie du photon incident est grande devant l'énergie de liaison des électrons). Ecrivez la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement dans le référentiel du laboratoire.



3.2 — Déduisez-en le décalage de longueur d’onde $\Delta\lambda = \lambda_f - \lambda_i$ du photon diffusé en fonction de son angle de diffusion θ .

On appelle respectivement ν_i et ν_f les fréquences du photon incident et du photon diffusé, \mathbf{k}_i et \mathbf{k}_f leurs vecteurs d’onde. Dans le référentiel du laboratoire (où l’électron est initialement immobile), les quadrivecteurs impulsion $\tilde{\mathbf{p}}_i$ de l’électron et $\tilde{\mathbf{q}}_i$ du photon s’écrivent :

$$\tilde{\mathbf{p}}_i : p_i^\mu = (m_e c, \mathbf{0}) \quad \tilde{\mathbf{q}}_i : q_i^\mu = \left(\frac{h\nu_i}{c}, \hbar \mathbf{k}_i \right)$$

Après la diffusion, l’électron possède une énergie E_f et une impulsion \mathbf{p}_f . Les quadri-impulsions $\tilde{\mathbf{p}}_f$ (électron) et $\tilde{\mathbf{q}}_f$ (photon) s’écrivent alors :

$$\tilde{\mathbf{p}}_f : p_f^\mu = \left(\frac{E_f}{c}, \mathbf{p}_f \right) \quad \tilde{\mathbf{q}}_f : q_f^\mu = \left(\frac{h\nu_f}{c}, \hbar \mathbf{k}_f \right)$$

La conservation de l’énergie et de l’impulsion s’exprime simplement par l’égalité :

$$\tilde{\mathbf{p}}_i + \tilde{\mathbf{q}}_i = \tilde{\mathbf{p}}_f + \tilde{\mathbf{q}}_f \tag{15}$$

L’équation précédente (15) permet de trouver le décalage en longueur d’onde de manière très élégante. On peut la réécrire en isolant le quadrivecteur associé à l’électron après l’interaction, puis élever au carré l’équation obtenue pour éliminer à la fois E' et \mathbf{p}' :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}}_f &= \tilde{\mathbf{p}}_i + \tilde{\mathbf{q}}_i - \tilde{\mathbf{q}}_f \\ \tilde{\mathbf{p}}_f^2 &= (\tilde{\mathbf{p}}_i + \tilde{\mathbf{q}}_i - \tilde{\mathbf{q}}_f)^2 = \tilde{\mathbf{p}}_i^2 + \tilde{\mathbf{q}}_i^2 + \tilde{\mathbf{q}}_f^2 + 2 \tilde{\mathbf{p}}_i \cdot \tilde{\mathbf{q}}_i - 2 \tilde{\mathbf{p}}_i \cdot \tilde{\mathbf{q}}_f - 2 \tilde{\mathbf{q}}_i \cdot \tilde{\mathbf{q}}_f \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\tilde{\mathbf{p}}_i^2 = \tilde{\mathbf{p}}_f^2 = m_e^2 c^2$, et que par ailleurs, pour le photon, $\tilde{\mathbf{q}}_i^2 = \tilde{\mathbf{q}}_f^2 = 0$, on obtient :

$$m_e h(\nu_i - \nu_f) = \frac{h^2 \nu_i \nu_f}{c^2} - \hbar^2 \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_f$$

Par ailleurs, pour un photon, $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda = 2\pi\nu/c$, ce qui donne :

$$m_e(\nu_i - \nu_f) = \frac{h}{c^2} \nu_i \nu_f (1 - \cos \theta)$$

Où θ est l’angle entre les directions du photon incident et du photon diffusé. En divisant par $\nu_i \nu_f$ et en faisant apparaître les longueurs d’onde λ_i et λ_f , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{c}{\nu_f} - \frac{c}{\nu_i} &= \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \\ \Delta\lambda = \lambda_f - \lambda_i &= \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

3.3 — Expérimentalement (A. H. Compton, *Phys. Rev.*, **21** (1923), 483.), A. H. Compton trouve qu'à 90° la longueur d'onde de la raie $K\alpha$ ($\lambda_i = 0.0708$ nm) du molybdène est mesurée à $\lambda_f = 0.0730$ nm. Déduisez-en une estimation de la masse de l'électron.

En utilisant le résultat précédent, on établit :

$$m_e = \frac{h}{c(\lambda_f - \lambda_i)} (1 - \cos \theta)$$

Ce qui donne ici, pour $\Delta\lambda = 0.0022$ nm et $\theta = \pi/2$,

$$m_e \approx 1.0 \times 10^{-30} \text{ kg} \approx 564 \text{ keV}/c^2$$

Ce qui n'est pas très loin de la mesure actuelle de $m_e = 511 \text{ keV}/c^2$.

3.4 — Le processus inverse de l'effet Compton, baptisé diffusion Compton inverse, se produit lorsque des électrons très énergétiques sont freinés par les photons du milieu. Ce phénomène est observé en astrophysique, par exemple lorsque les photons du rayonnement fossile micro-onde interagissent avec les électrons très énergétiques du gaz chaud d'un amas de galaxies (effet Sunyaev-Zel'dovich).

Montrez que dans ce cas, le photon diffusé *gagne de l'énergie* aux dépens de l'électron (astuce : reprendre le calcul précédent en se plaçant dans le référentiel de l'électron après la collision).

D'un point de vue formel, le processus est en fait exactement le même que pour l'effet Compton, il ne s'agit que d'un changement de référentiel. La conservation du quadrivecteur énergie-impulsion s'écrit comme précédemment :

$$\tilde{\mathbf{p}}_i + \tilde{\mathbf{q}}_i = \tilde{\mathbf{p}}_f + \tilde{\mathbf{q}}_f \quad (16)$$

Qu'on peut réécrire afin d'éliminer E_i et \mathbf{p}_i :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}}_i &= \tilde{\mathbf{p}}_f - \tilde{\mathbf{q}}_i + \tilde{\mathbf{q}}_f \\ \tilde{\mathbf{p}}_i^2 &= (\tilde{\mathbf{p}}_f - \tilde{\mathbf{q}}_i + \tilde{\mathbf{q}}_f)^2 = \tilde{\mathbf{p}}_f^2 + \tilde{\mathbf{q}}_i^2 + \tilde{\mathbf{q}}_f^2 - 2\tilde{\mathbf{p}}_f \cdot \tilde{\mathbf{q}}_i + 2\tilde{\mathbf{p}}_f \cdot \tilde{\mathbf{q}}_f - 2\tilde{\mathbf{q}}_i \cdot \tilde{\mathbf{q}}_f \end{aligned}$$

En se plaçant dans le référentiel de l'électron **après** la collision, on a cette fois, dans ce référentiel, avant la collision :

$$\tilde{\mathbf{p}}_i : p_i^\mu = \left(\frac{E_i}{c}, \mathbf{p}_i \right) \quad \tilde{\mathbf{q}}_i : q_i^\mu = \left(\frac{h\nu_i}{c}, \hbar \mathbf{k}_i \right)$$

Après la diffusion, l'électron possède une énergie $m_e c^2$ et une impulsion nulle. Les quadri-impulsions $\tilde{\mathbf{p}}_f$ (électron) et $\tilde{\mathbf{q}}_f$ (photon) s'écrivent alors :

$$\tilde{\mathbf{p}}_f : p_f^\mu = (m_e c, \mathbf{0}) \quad \tilde{\mathbf{q}}_f : q_f^\mu = \left(\frac{h\nu_f}{c}, \hbar \mathbf{k}_f \right)$$

Le calcul est analogue, et on trouve cette fois :

$$m_e h(\nu_i - \nu_f) = -\frac{h^2 \nu_i \nu_f}{c^2} + \hbar^2 \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{k}_f$$

$$m_e(\nu_i - \nu_f) = \frac{h}{c^2} \nu_i \nu_f (\cos \theta - 1)$$

$$\frac{c}{\nu_f} - \frac{c}{\nu_i} = \frac{h}{m_e c} (\cos \theta - 1)$$

$$\Delta\lambda = \lambda_f - \lambda_i = \frac{h}{m_e c} (\cos \theta - 1) < 0$$

Dans le référentiel de l'électron après la collision, la longueur d'onde du photon diffusé est inférieure à la longueur d'onde du photon incident : le photon a donc **gagné** de l'énergie aux dépens de l'électron.

3.5 — Montrez qu'un processus où le photon disparaîtrait par absorption par un électron libre est impossible, du fait des lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion. Commentez pour l'effet photoélectrique.

Pour un processus d'absorption totale du photon, dans le référentiel de l'électron initialement au repos, on aurait :

$$\tilde{\mathbf{p}}_i : (m_e c, \mathbf{0}) \quad \tilde{\mathbf{q}}_i : \left(\frac{h\nu}{c}, \hbar \mathbf{k} \right) \quad \tilde{\mathbf{p}}_f : \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}_f \right) \quad \tilde{\mathbf{p}}_i + \tilde{\mathbf{q}}_i = \tilde{\mathbf{p}}_f$$

En prenant le carré de cette dernière expression, on trouve :

$$\tilde{\mathbf{p}}_i^2 + \tilde{\mathbf{q}}_i^2 + 2 \tilde{\mathbf{p}}_i \cdot \tilde{\mathbf{q}}_i = \tilde{\mathbf{p}}_f^2 \quad \text{soit} \quad m_e^2 c^2 + 2 m_e h\nu = m_e^2 c^2$$

Ce qui est impossible. L'absorption d'un photon par un électron libre est interdite par la conservation simultanée de l'énergie et de l'impulsion.

Dans le cas de l'effet photo-électrique, l'électron est lié à l'atome : un transfert d'impulsion a lieu vers l'atome lui-même, ce qui rend l'interaction compatible avec la conservation de l'énergie et de l'impulsion.

3.6 — Un photon peut aussi disparaître et se matérialiser sous la forme d'une paire électron-positron $e^- e^+$. Quelle est l'énergie minimale qu'un photon doit posséder pour produire une paire $e^- e^+$? Montrez que ce processus de production de paire ne peut pas se produire dans le vide (il ne se produit en fait qu'en présence d'un champ électromagnétique externe, par exemple dans la matière à proximité d'un noyau atomique).

Pour un tel processus de création d'une paire $e^- e^+$, on aurait :

$$\tilde{\mathbf{q}}_i = \tilde{\mathbf{p}}_{f+} + \tilde{\mathbf{p}}_{f-}$$

En prenant le carré de cette dernière expression, on trouve :

$$\tilde{\mathbf{q}}_i^2 = \tilde{\mathbf{p}}_{f+}^2 + \tilde{\mathbf{p}}_{f-}^2 + 2 \tilde{\mathbf{p}}_{f+} \cdot \tilde{\mathbf{p}}_{f-} \quad \text{soit} \quad 0 = 2 m_e^2 c^2 + 2 \tilde{\mathbf{p}}_{f+} \cdot \tilde{\mathbf{p}}_{f-}$$

Si on se place dans le référentiel propre de la paire $e^- e^+$ après la réaction, on aura :

$$\tilde{\mathbf{p}}_{f+} : (E_{f+}/c, \mathbf{p}_{f+}) \quad \tilde{\mathbf{p}}_{f-} : (E_{f-}/c, \mathbf{p}_{f-})$$

Avec $\mathbf{p}_{f+} + \mathbf{p}_{f-} = \mathbf{0}$ dans le référentiel propre. Par conséquent, dans ce référentiel, $\mathbf{p}_{f+} = -\mathbf{p}_{f-}$, et comme électron et positron ont même masse m_e , on aura aussi $E_{f+} = E_{f-}$. On en déduit :

$$\tilde{\mathbf{p}}_{f+} \cdot \tilde{\mathbf{p}}_{f-} = \frac{E_{f+} E_{f-}}{c^2} - \mathbf{p}_{f+} \cdot \mathbf{p}_{f-} = \frac{E_{f+}^2}{c^2} + \mathbf{p}_{f+}^2 = \frac{E_{f+}^2}{c^2} + p_{f+}^2 > 0$$

Et l'expression précédente devient alors :

$$0 = 2 m_e^2 c^2 + \frac{E_{f+}^2}{c^2} + p_{f+}^2 \quad \text{soit} \quad \frac{E_{f+}^2}{c^2} + p_{f+}^2 = -2 m_e^2 c^2 < 0$$

Ce qui est impossible. On pouvait d'ailleurs s'en douter, en remarquant que le référentiel propre de la paire $e^- e^+$ est aussi le référentiel propre du photon avant collision : or, on ne peut pas définir de

référentiel propre pour un photon (ce serait le référentiel où le photon est au repos, ce qui n'existe pas).

La matérialisation d'un photon sous forme d'une paire $e^- e^+$ n'est en fait possible que dans un champ électromagnétique externe, par exemple dans la matière, à proximité d'un noyau (qui récupère une partie de l'impulsion).

3.7 — Montrez, de même, que l'annihilation d'une paire $e^+ e^-$ ne peut pas s'effectuer en produisant un photon unique, mais au minimum deux photons (la désintégration d'une paire $e^+ e^-$ s'effectue en fait en produisant soit deux photons, soit trois photons).

Il s'agit du processus symétrique obtenu en remontant le temps. La conservation du quadrivecteur énergie-impulsion conduit exactement à la même équation :

$$\tilde{\mathbf{p}}_+ + \tilde{\mathbf{p}}_- = \tilde{\mathbf{q}}_f.$$

Par un raisonnement analogue, ce processus est impossible si un seul photon est produit.

4. Désintégration du pion

On considère le processus de désintégration d'un pion *au repos* :

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

4.1 — La masse du neutrino (ici muonique) n'étant toujours pas connue, on attribue à celui-ci une masse m_ν , et l'on souhaite calculer l'énergie E_μ du muon émis. La procédure standard consiste, sur la base du principe de conservation de la quadri-impulsion totale, à exprimer la quadri-impulsion de la particule non-observée, le neutrino ici, en termes des quadri-impulsions des autres particules, et à élever au carré les deux membres de cette expression, éliminant ainsi l'énergie et l'impulsion du neutrino trop difficiles à mesurer.

Établissez ainsi l'expression de l'énergie du muon émis en fonction des masses des trois particules en jeu.

Les composantes contravariantes des quadri-impulsions dans le référentiel du laboratoire sont données par :

$$\tilde{\mathbf{p}}_\pi : p_\pi^\alpha = (m_\pi c, \mathbf{0}) \quad \tilde{\mathbf{p}}_\mu : p_\mu^\alpha = (E_\mu/c, \mathbf{p}_\mu) \quad \tilde{\mathbf{p}}_\nu : p_\nu^\alpha = (E_\nu/c, \mathbf{p}_\nu).$$

où α est ici l'indice (de 0 à 3).

On écrit la conservation de la quadri-impulsion :

$$\tilde{\mathbf{p}}_\pi = \tilde{\mathbf{p}}_\mu + \tilde{\mathbf{p}}_\nu \quad \text{soit} \quad \tilde{\mathbf{p}}_\pi - \tilde{\mathbf{p}}_\mu = \tilde{\mathbf{p}}_\nu$$

La quadri-impulsion du neutrino ainsi isolée, on élève au carré :

$$\tilde{\mathbf{p}}_\pi^2 + \tilde{\mathbf{p}}_\mu^2 - 2 \tilde{\mathbf{p}}_\pi \cdot \tilde{\mathbf{p}}_\mu = \tilde{\mathbf{p}}_\nu^2 \quad \text{soit} \quad m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2m_\pi E_\mu = m_\nu^2 c^2.$$

D'où le résultat :

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - m_\nu^2 c^2}{2m_\pi} \simeq \frac{m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2}{2m_\pi}.$$

5. Collisionneurs

On s'intéresse à la collision de deux particules identiques de masse m .

Collision élastique sur cible fixe : traitement classique

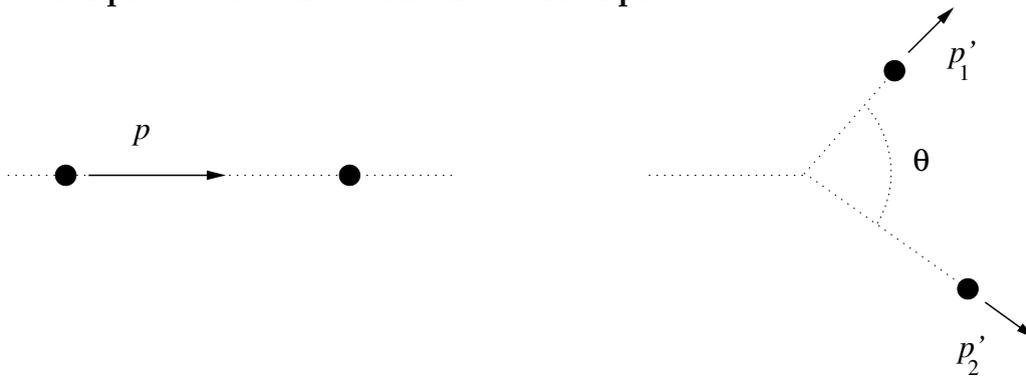


FIGURE 19 – Collision élastique sur cible fixe.

On s'intéresse à la collision élastique d'une particule de masse m , d'impulsion \mathbf{p} et d'énergie cinétique T sur une particule identique, immobile (la "cible", fig. 19).

5.1 — Dans le cadre de la mécanique classique, écrivez la conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement (impulsion).

En mécanique classique, pour une collision élastique, il y a conservation de l'énergie cinétique totale :

$$T_1 + T_2 = T'_1 + T'_2 \quad \text{qu'on peut écrire} \quad \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} = \frac{p'^2_1}{2m} + \frac{p'^2_2}{2m} \tag{17}$$

Par ailleurs, il y a toujours conservation de la quantité de mouvement totale :

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \tag{18}$$

5.2 — Montrez que l'angle θ entre les impulsions \mathbf{p}'_1 et \mathbf{p}'_2 des particules après la collision est nécessairement égal à $\pi/2$ dans le cadre classique.

Comme les deux particules ont la même masse m avant et après la collision, l'équation (17) peut s'écrire :

$$p_1^2 + p_2^2 = p'^2_1 + p'^2_2 \tag{19}$$

Par ailleurs, en élevant au carré l'équation (18), on obtient :

$$p_1^2 + p_2^2 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = p'^2_1 + p'^2_2 + 2\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2 \tag{20}$$

En combinant ces deux équations et en utilisant le fait que, dans le cas qui nous intéresse ici, $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}$ et $\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$, on trouve :

$$\mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2 = 0 \quad \text{i.e.} \quad p'_1 p'_2 \cos \theta = 0 \quad \text{ce qui implique} \quad \cos \theta = 0. \tag{21}$$

L'angle θ entre les impulsions \mathbf{p}'_1 et \mathbf{p}'_2 des particules après la collision est nécessairement égal à $\pi/2$.

Collision élastique sur cible fixe : traitement relativiste

On traite maintenant le même phénomène dans le cadre de la dynamique relativiste.

5.3 — Écrivez la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total lors de la collision.

Si on note $\tilde{\mathbf{p}}_1$ et $\tilde{\mathbf{p}}_2$ les quadrivecteurs énergie-impulsion des particules incidentes, et $\tilde{\mathbf{p}}'_1$ et $\tilde{\mathbf{p}}'_2$ les quadrivecteurs énergie-impulsion des particules après la collision, on a, par conservation :

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}'_1 + \tilde{\mathbf{p}}'_2 \quad (22)$$

5.4 — Exprimez l'angle θ entre \mathbf{p}'_1 et \mathbf{p}'_2 en fonction de E , m , E'_1 et E'_2 , où E'_1 et E'_2 sont les énergies des deux particules après la collision.

En élevant au carré l'équation (22), on trouve :

$$\tilde{\mathbf{p}}_1^2 + \tilde{\mathbf{p}}_2^2 + 2\tilde{\mathbf{p}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}_1'^2 + \tilde{\mathbf{p}}_2'^2 + 2\tilde{\mathbf{p}}_1' \cdot \tilde{\mathbf{p}}_2' \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{p}}_1^2 = \tilde{\mathbf{p}}_2^2 = \tilde{\mathbf{p}}_1'^2 = \tilde{\mathbf{p}}_2'^2 = m^2 c^2$$

D'où on déduit :

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}_1' \cdot \tilde{\mathbf{p}}_2' \quad (23)$$

Or, dans le référentiel du laboratoire, on a :

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 : p_1^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{p}}_2 : p_2^\mu = \begin{pmatrix} mc \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{p}}_1' : p_1'^\mu = \begin{pmatrix} E'_1/c \\ \mathbf{p}'_1 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{p}}_2' : p_2'^\mu = \begin{pmatrix} E'_2/c \\ \mathbf{p}'_2 \end{pmatrix}$$

En substituant, on trouve (en utilisant la relation $E'^2 - m^2 c^4 = p'^2 c^2$) :

$$Em = \frac{E'_1 E'_2}{c^2} - \mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_2 = \frac{E'_1 E'_2}{c^2} - \frac{1}{c^2} \sqrt{E_1'^2 - m^2 c^4} \sqrt{E_2'^2 - m^2 c^4} \cos \theta$$

Ce qui donne θ :

$$\cos \theta = \frac{E'_1 E'_2 - Emc^2}{\sqrt{E_1'^2 - m^2 c^4} \sqrt{E_2'^2 - m^2 c^4}}$$

5.5 — Dans le cas particulier où $E'_1 = E'_2$, exprimez θ en fonction de E et m ; montrez que θ est nécessairement inférieur à $\pi/2$. Comparez avec le résultat en mécanique classique.

Dans le cas particulier où $E'_1 = E'_2$, on a aussi $p'_1 = p'_2$ (en norme). L'expression de θ se simplifie alors :

$$\cos \theta = \frac{E_1'^2 - Emc^2}{E_1'^2 - m^2 c^4}$$

De plus, en utilisant la conservation de l'énergie,

$$E + mc^2 = E'_1 + E'_2 = 2E'_1 \quad \text{d'où} \quad E'_1 = E'_2 = \frac{E + mc^2}{2} = \frac{T + 2mc^2}{2} \quad (24)$$

en faisant apparaître l'énergie cinétique $T = E - mc^2$ de la particule incidente.

En substituant dans l'expression de θ , on trouve :

$$\cos \theta = \frac{E'^2 - Emc^2}{E_1'^2 - m^2 c^4} = \frac{\left(\frac{E + mc^2}{2}\right)^2 - Emc^2}{\left(\frac{E + mc^2}{2}\right)^2 - m^2 c^4} = \frac{T^2}{T^2 + 4mc^2 T} = \frac{1}{1 + \frac{4mc^2}{T}} < 1.$$

Ce qui montre que dans le cas relativiste, l'angle θ est inférieur à $\pi/2$.

5.6 — Écrivez la masse invariante du système constitué par les deux particules. Quelle est l'énergie totale E^* disponible dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R}^* , en fonction de E et m ?

Par définition, la masse invariante du système s'écrit :

$$\frac{(E^*)^2}{c^2} = [\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2]^2 = \left(\frac{E}{c} + mc\right)^2 - (\mathbf{p} + \mathbf{0})^2 = \frac{E^2}{c^2} + m^2c^2 + 2Em - \mathbf{p}^2 = 2m [E + mc^2] = 2m [T + 2mc^2]$$

L'énergie totale E^* disponible dans le référentiel \mathcal{R}^* du centre de masse est donc :

$$E^* = \sqrt{2mc^2 [E + mc^2]} = \sqrt{2mc^2 [T + 2mc^2]}$$

Collisionneur symétrique

On considère maintenant le cas d'un collisionneur symétrique : dans le référentiel du laboratoire, les deux particules possèdent la même énergie E et des impulsions opposées de même norme p (fig. 20).

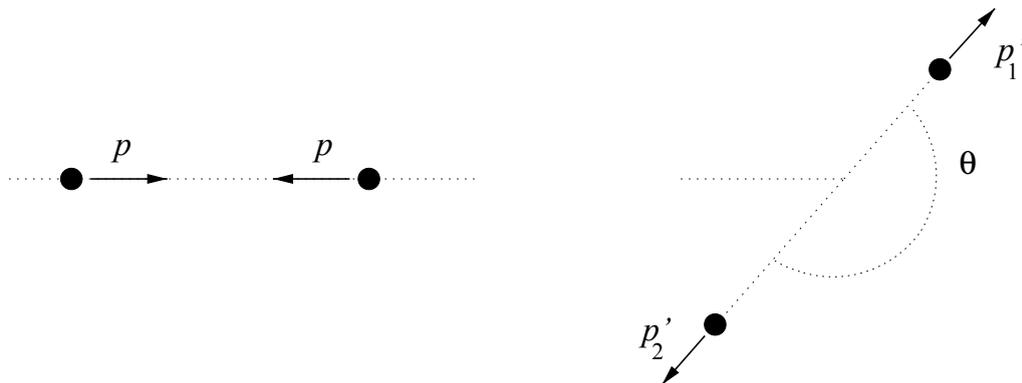


FIGURE 20 – Collision symétrique (collisionneur).

5.7 — Écrivez la conservation du quadri vecteur énergie-impulsion avant et après la collision, dans le référentiel du laboratoire.

Comme précédemment, on a :

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}'_1 + \tilde{\mathbf{p}}'_2 \tag{25}$$

Avec, dans le référentiel du laboratoire :

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 : p_1^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{p}}_2 : p_2^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ -\mathbf{p} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{p}}'_1 : p_1'^\mu = \begin{pmatrix} E'_1/c \\ \mathbf{p}'_1 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{p}}'_2 : p_2'^\mu = \begin{pmatrix} E'_2/c \\ \mathbf{p}'_2 \end{pmatrix}$$

5.8 — Que pensez-vous du référentiel du centre de masse du système \mathcal{R}^* ?

De manière immédiate, on constate dans le référentiel \mathcal{R} du laboratoire que l'impulsion totale est nulle avant la collision. Elle sera donc aussi nulle après la collision, et le référentiel du laboratoire \mathcal{R} se confond avec celui du centre de masse du système \mathcal{R}^* .

5.9 — Écrivez la masse invariante du système constitué par les deux particules. Quelle est l'énergie totale E^* disponible dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R}^* , en fonction de E et m ?

Par définition, la masse invariante du système s'écrit :

$$\frac{(E^*)^2}{c^2} = [\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2]^2 = \left(\frac{E}{c} + \frac{E}{c}\right)^2 - (\mathbf{p} - \mathbf{p})^2 = \frac{4E^2}{c^2} = 4 \frac{[T + mc^2]^2}{c^2}$$

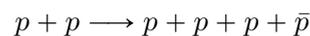
L'énergie totale E^* disponible dans le référentiel \mathcal{R}^* du centre de masse est donc :

$$E^* = 2E = 2 [T + mc^2]$$

Collision inélastique : production des anti-protons

En physique des particules on cherche à produire des collisions inélastiques : l'objectif est de concentrer pendant un bref instant une énergie considérable dans un petit volume afin de produire des particules inexistantes dans la matière ordinaire et pouvoir ainsi étudier leurs propriétés.

Considérons la réaction suivante, qui vise à produire des anti-protons \bar{p} en faisant collisionner des protons p :



5.10 — En utilisant la notion de masse invariante, déterminer l'énergie cinétique minimale T_1 qu'il faut donner aux protons d'un faisceau qui frappe une cible d'hydrogène, pour produire effectivement des antiprotons (scénario "cible fixe"). Application numérique.

D'après les résultats obtenus précédemment, la masse invariante dans une collision sur cible fixe est :

$$\frac{(E^*)^2}{c^2} = 2m [E + mc^2] = 2m [T + 2mc^2]$$

L'énergie totale E^* disponible dans le référentiel \mathcal{R}^* du centre de masse est donc :

$$E^* = \sqrt{2mc^2 [E + mc^2]} = \sqrt{2mc^2 [T + 2mc^2]}$$

Pour pouvoir produire un proton et un antiproton supplémentaire, il faut que l'énergie disponible dans le référentiel du centre de masse soit au moins égale à 4 fois la masse d'un proton :

$$E^* > 4mc^2 \quad \text{i.e.} \quad 2mc^2 [T + 2mc^2] > 16m^2c^4 \quad \text{i.e.} \quad T > 6mc^2$$

Numériquement, il faut donc $T > 6 \times 938 \text{ MeV} = 5.628 \text{ GeV}$.

5.11 — En procédant de même, déterminer l'énergie cinétique minimale T_2 qu'il faut fournir aux protons de deux faisceaux opposés pour produire des antiprotons (scénario "collisionneur symétrique"). Application numérique.

Dans une collision symétrique, l'énergie totale E^* disponible dans le référentiel \mathcal{R}^* du centre de masse est :

$$E^* = 2E = 2 [T + mc^2]$$

Comme précédemment, pour produire un proton et un antiproton, il faut $E^* > 4mc^2$, c'est à dire :

$$2E = 2 [T + mc^2] > 4mc^2 \quad \text{i.e.} \quad T > mc^2$$

Numériquement, il faut donc cette fois $T > 938 \text{ MeV}$.

5.12 — Entre ces deux types d'expériences, quelle est la méthode qui semble la plus avantageuse ? Commentez. Données : masse du proton et de l'anti-proton : $m_p = m_{\bar{p}} = 938 \text{ MeV}/c^2$.

D'après ce qui précède, il est évident qu'un collisionneur symétrique est très avantageux comparé à un dispositif de collision sur cible fixe, puisque pour obtenir la même énergie disponible dans le centre de masse de la collision, il faut fournir une énergie $T > 6mc^2$ au faisceau dans le cas d'une cible fixe, contre $T > mc^2$ à chacun des faisceaux dans un collisionneur symétrique. D'où le succès des collisionneurs symétriques en physique des particules (LEP, LHC, etc).



FIGURE 21 – Edward McMillan et Edward Lofgren, responsables du projet, photographiés sur le blindage de l'accélérateur dit "Bevatron" (Lawrence Berkeley National Laboratory, USA). Exploité à partir de 1954, le Bevatron permit en 1955 la découverte de l'anti-proton en bombardant une cible fixe avec des protons d'énergie cinétique suffisante. Pour cette découverte, Emilio Gino Segrè et Owen Chamberlain se virent attribuer le prix Nobel de Physique en 1959.

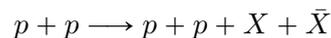
6. La physique au Large Hadron Collider (LHC)

Afin de comprendre la structure élémentaire de la matière, les physiciens des particules ont développé des techniques d'accélération des particules chargées (électrons, protons, ions, etc) permettant de produire des collisions à très haute énergie. L'analyse détaillée de chaque collision permet de mieux comprendre la sous-structure des particules, leurs interactions, et de découvrir de nouvelles particules. C'est ainsi qu'ont été découverts un ensemble de particules élémentaires prédites par le *Modèle Standard* : les quarks charm (c), bottom (b) et top (t); les bosons W^+ , W^- et Z ; et enfin le boson de Higgs en 2012.

Collision inélastique : production d'une paire $X \bar{X}$

En physique des particules on cherche à produire des collisions inélastiques : l'objectif est de concentrer pendant un bref instant une énergie considérable dans un petit volume afin de produire des particules inexistantes dans la matière ordinaire et pouvoir ainsi étudier leurs propriétés.

Considérons la réaction inélastique suivante, qui vise à produire une paire de particules quelconques X et \bar{X} (X et son anti-particule) de mêmes masses m_X en faisant collisionner des protons p (on suppose ici les protons intacts après la collision, ce qui n'est généralement pas le cas pour les collisions intéressantes au LHC) :



6.1 — Écrivez la conservation du quadrivecteur énergie-impulsion pour cette réaction.

La conservation du quadrivecteur énergie-impulsion s'écrit (sans développer) :

$$\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2 = \tilde{\mathbf{p}}'_1 + \tilde{\mathbf{p}}'_2 + \tilde{\mathbf{p}}_X + \tilde{\mathbf{p}}_{\bar{X}}$$

6.2 — Exprimez la masse invariante du système, avant et après la réaction.

La masse invariante M^* du système s'écrit :

$$(M^*)^2 c^2 = (\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2)^2 = (\tilde{\mathbf{p}}'_1 + \tilde{\mathbf{p}}'_2 + \tilde{\mathbf{p}}_X + \tilde{\mathbf{p}}_{\bar{X}})^2$$

Si on développe l'expression avant la collision, on trouve, exprimée dans le référentiel du laboratoire (qui est aussi le référentiel propre ici) :

$$(M^*)^2 c^2 = (\tilde{\mathbf{p}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_2)^2 = \tilde{\mathbf{p}}_1^2 + \tilde{\mathbf{p}}_2^2 + 2\tilde{\mathbf{p}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{p}}_2 = 2m^2 c^2 + 2\frac{E_1 E_2}{c^2} - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2$$

Comme les deux protons ont la même énergie $E_1 = E_2 = E = mc^2 + T$, et des impulsions opposées $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1$ et de même norme p ,

$$(M^*)^2 c^2 = 2m^2 c^2 + 2\frac{E^2}{c^2} + 2p^2 = 4\frac{E^2}{c^2}$$

Ce qui donne la masse invariante M^* et l'énergie totale disponible E^* dans le centre de masse :

$$M^* = \frac{2E}{c^2} \quad \text{et} \quad E^* = M^* c^2 = 2E = 2(T + mc^2).$$

6.3 — Déterminer l'énergie cinétique minimale T qu'il faut fournir aux protons de deux faisceaux opposés pour produire une particule X de masse m_X et son antiparticule \bar{X} de même masse (en supposant les protons intacts après la collision).

Dans une collision symétrique, l'énergie totale E^* disponible dans le référentiel \mathcal{R}^* du centre de masse est :

$$E^* = 2E = 2 [T + mc^2]$$

Pour produire une particule X et son antiparticule \bar{X} en conservant les 2 protons, il faut $E^* > 2mc^2 + 2m_Xc^2$, c'est à dire :

$$2E = 2 [T + mc^2] > 2mc^2 + m_Xc^2 \quad \text{i.e.} \quad T > m_Xc^2.$$

Détection du boson de Higgs dans le canal $\gamma\gamma$

Si l'énergie dans le centre de masse est suffisante, il est possible de produire un boson de Higgs dans la collision. Le boson de Higgs est instable et peut se désintégrer de différentes manières (on parle de "voies" ou de "canaux de désintégration"). Il peut par exemple se désintégrer en deux photons gamma (canal diphoton) : cette signature est l'une des plus faciles à mettre en évidence ("canal en or").

6.4 — Ecrivez l'équation-bilan de la désintégration du boson de Higgs (noté H) en deux photons gamma. On se place dans le référentiel du boson de Higgs \mathcal{R}_H : écrivez la conservation du quadri-vecteur énergie-impulsion total avant et après la désintégration.

L'équation de la désintégration du boson de Higgs en deux photons s'écrit :

$$H \longrightarrow \gamma + \gamma$$

Du fait de la conservation du quadri-vecteur énergie-impulsion total, on aura :

$$\tilde{\mathbf{p}}_H = \tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2$$

où $\tilde{\mathbf{p}}_H$, $\tilde{\mathbf{q}}_1$ et $\tilde{\mathbf{q}}_2$ sont respectivement les quadri-vecteurs énergie-impulsion du boson de Higgs avant sa désintégration, et des deux photons issus de sa désintégration.

Dans le référentiel du boson de Higgs \mathcal{R}_H , leurs composantes contravariantes sont :

$$\tilde{\mathbf{p}}_H : p_H^\mu = \begin{pmatrix} m_Hc \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{q}}_1 : q_1^\mu = \begin{pmatrix} E_1/c = h\nu_1/c \\ \hbar\mathbf{k}_1 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{q}}_2 : q_2^\mu = \begin{pmatrix} E_2/c = h\nu_2/c \\ \hbar\mathbf{k}_2 \end{pmatrix}$$

Par conservation du vecteur quantité de mouvement, on a nécessairement

$$\hbar\mathbf{k}_1 + \hbar\mathbf{k}_2 = \mathbf{0} \quad \text{soit} \quad \hbar\mathbf{k}_2 = -\hbar\mathbf{k}_1.$$

On en déduit que les deux photons sont émis dos à dos dans le référentiel \mathcal{R}_H , avec des impulsions opposées ; ils ont par conséquent la même énergie $E_\gamma = E_1 = E_2$ dans \mathcal{R}_H .

6.5 — Que vaut la masse invariante $m_{\gamma\gamma}$ du système formé par les deux photons issus de la désintégration du Higgs ? Quelle est l'énergie de chaque photon dans le référentiel du Higgs \mathcal{R}_H ? Que vaut nécessairement l'angle entre les deux photons émis dans \mathcal{R}_H ?

D'après ce qui précède, dans \mathcal{R}_H les deux photons sont émis dos à dos, avec la même énergie et des impulsions opposées. L'angle entre les deux photons vaut nécessairement π .

Par conservation de l'énergie, on aura :

$$E_1 + E_2 = 2E_\gamma = m_H c^2 \quad \text{soit} \quad E_1 = E_2 = E_\gamma = \frac{m_H c^2}{2}$$

La masse invariante du système constitué des deux photons s'écrit dans \mathcal{R}_H :

$$m_{\gamma\gamma}^2 c^2 = (\tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2)^2 = \left(\frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c} \right)^2 = 4 \frac{E_\gamma^2}{c^2}$$

Soit,

$$m_{\gamma\gamma}^2 = 4 \frac{E_\gamma^2}{c^4} \quad m_{\gamma\gamma} = 2 \frac{E_\gamma}{c^2} = m_H$$

6.6 — Écrivez maintenant le bilan de la désintégration du Higgs en deux photons dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R} . Exprimez la masse invariante en fonction des énergies E_1 et E_2 de chacun des deux photons et de l'angle θ_{12} entre les deux photons. Exprimez la masse m_H du boson de Higgs en fonction de E_1, E_2 et θ_{12} .

Dans le référentiel du laboratoire, en réutilisant les même notations mais cette fois dans \mathcal{R} , on a :

$$\tilde{\mathbf{p}}_H : p_H^\mu = \begin{pmatrix} E_H/c \\ \mathbf{p}_H \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{q}}_{\gamma 1} : q_{\gamma 1}^\mu = \begin{pmatrix} E_1/c = h\nu_1/c \\ \hbar \mathbf{k}_1 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{q}}_{\gamma 2} : q_{\gamma 2}^\mu = \begin{pmatrix} E_2/c = h\nu_2/c \\ \hbar \mathbf{k}_2 \end{pmatrix}$$

où E_H, E_1 et E_2 sont cette fois les énergies du Higgs et des deux photons dans le référentiel \mathcal{R} , et $\mathbf{p}_H, \hbar \mathbf{k}_1$ et $\hbar \mathbf{k}_2$ les quantités de mouvement du boson de Higgs et des deux photons.

La masse invariante du système constitué des deux photons s'écrit alors :

$$\begin{aligned} m_{\gamma\gamma}^2 c^2 &= (\tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2)^2 = \tilde{\mathbf{q}}_1^2 + \tilde{\mathbf{q}}_2^2 + 2\tilde{\mathbf{q}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{q}}_2 = 2\tilde{\mathbf{q}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{q}}_2 \\ &= 2 \frac{E_1 E_2}{c^2} - 2\hbar^2 \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = 2 \frac{E_1 E_2}{c^2} - 2 \frac{h^2}{\lambda_1 \lambda_2} \cos \theta_{12} \\ &= 2 \frac{E_1 E_2}{c^2} - 2 \frac{h^2 \nu_1 \nu_2}{c^2} \cos \theta_{12} = 2 \frac{E_1 E_2}{c^2} [1 - \cos \theta_{12}] \\ m_{\gamma\gamma} &= \sqrt{\frac{2E_1 E_2}{c^4} (1 - \cos \theta_{12})} \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme d'une part le quadrivecteur énergie-impulsion total est conservé (et donc sa pseudo-norme carrée), et que d'autre part la pseudo-norme carrée est un invariant de Lorentz, on a :

$$m_{\gamma\gamma}^2 c^2 = (\tilde{\mathbf{q}}_1 + \tilde{\mathbf{q}}_2)^2 = \tilde{\mathbf{p}}_H^2 = m_H^2 c^2 \quad \text{soit} \quad m_H = m_{\gamma\gamma}$$

La masse invariante du système constitué des deux photons est donc toujours égale à la masse du boson de Higgs, quel que soit le référentiel dans lequel on mesure l'énergie des deux photons.

6.7 — La figure 22 représente la distribution de la masse invariante $m_{\gamma\gamma}$ pour les événements où sont apparus deux photons γ de haute énergie. Il s'agit du premier lot de mesures effectuées dans l'expérience ATLAS au LHC, ayant permis la découverte du Higgs. Déduisez-en la masse du boson de Higgs.

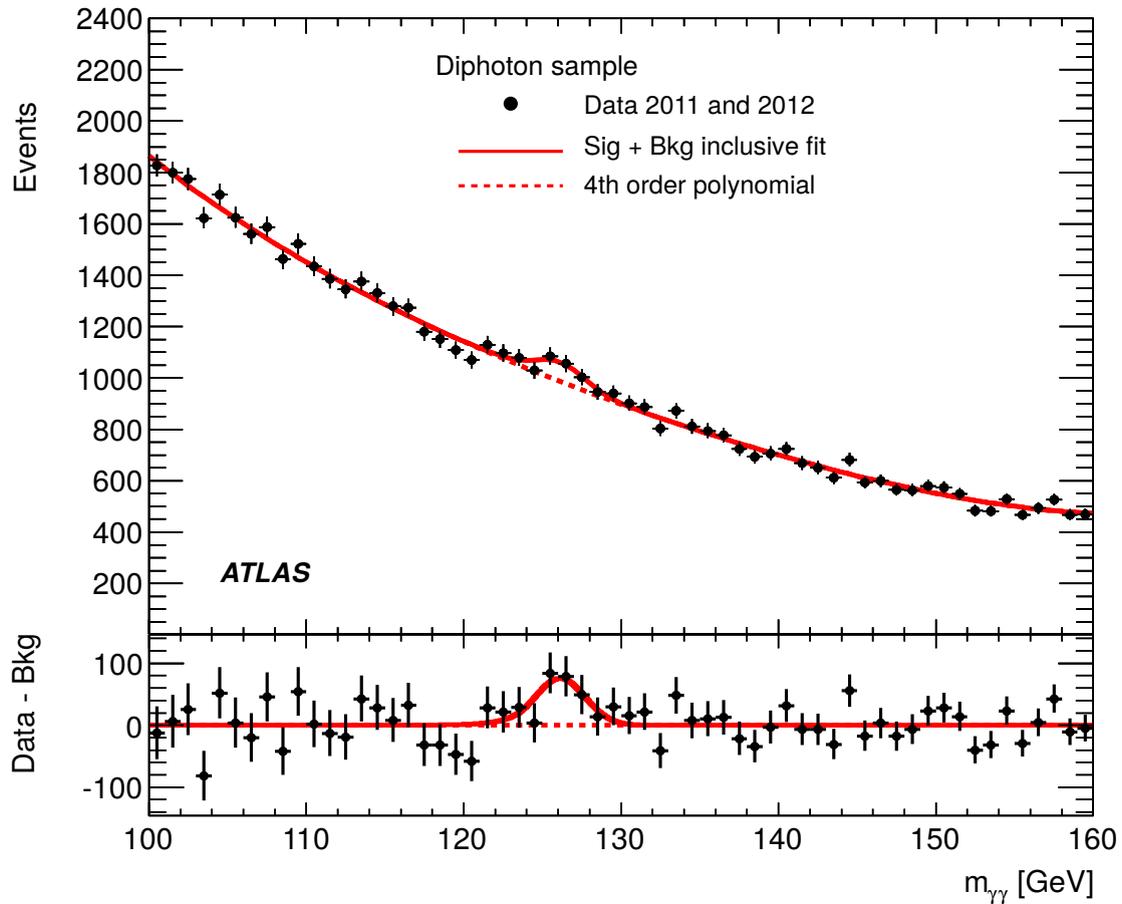


FIGURE 22 – Distribution de la masse invariante $m_{\gamma\gamma}$ mesurée pour tous les événements avec 2 photons de haute énergie dans l'expérience ATLAS au LHC (points noirs). En pointillés rouges, modélisation du fonds dû à toutes les autres réactions produisant principalement deux photons gamma. Première analyse du canal "diphoton", thèse de doctorat de Heberth Torres (2013), LPNHE.

La distribution de la masse invariante $m_{\gamma\gamma}$ présente un excès autour de $m_{\gamma\gamma} \approx 126 \text{ GeV}/c^2$: la modélisation des processus connus produisant deux photons gamma ne permet pas d'en rendre compte. Cet excès est dû à la désintégration en deux photons d'une nouvelle particule, dont la masse est par conséquent $m_H = m_{\gamma\gamma} \approx 126 \text{ GeV}/c^2$. C'est le boson de Higgs, dont l'existence avait été prédite par Robert Brout, François Englert et Peter Higgs en 1964. Sa découverte dans les expériences ATLAS et CMS au LHC a valu le prix Nobel de physique 2013 à François Englert et Peter Higgs.

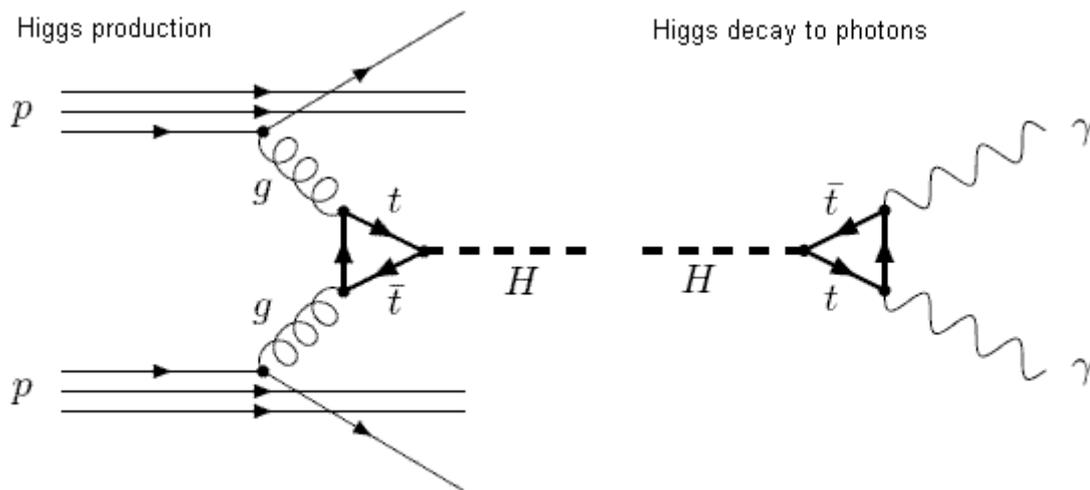


FIGURE 23 – Diagrammes de Feynman (le temps va de gauche à droite) : à gauche, production d’un boson de Higgs dans une collision de protons par fusion de gluons (les protons sont “détruits” dans ce type de collision); à droite, désintégration du boson de Higgs en deux photons.

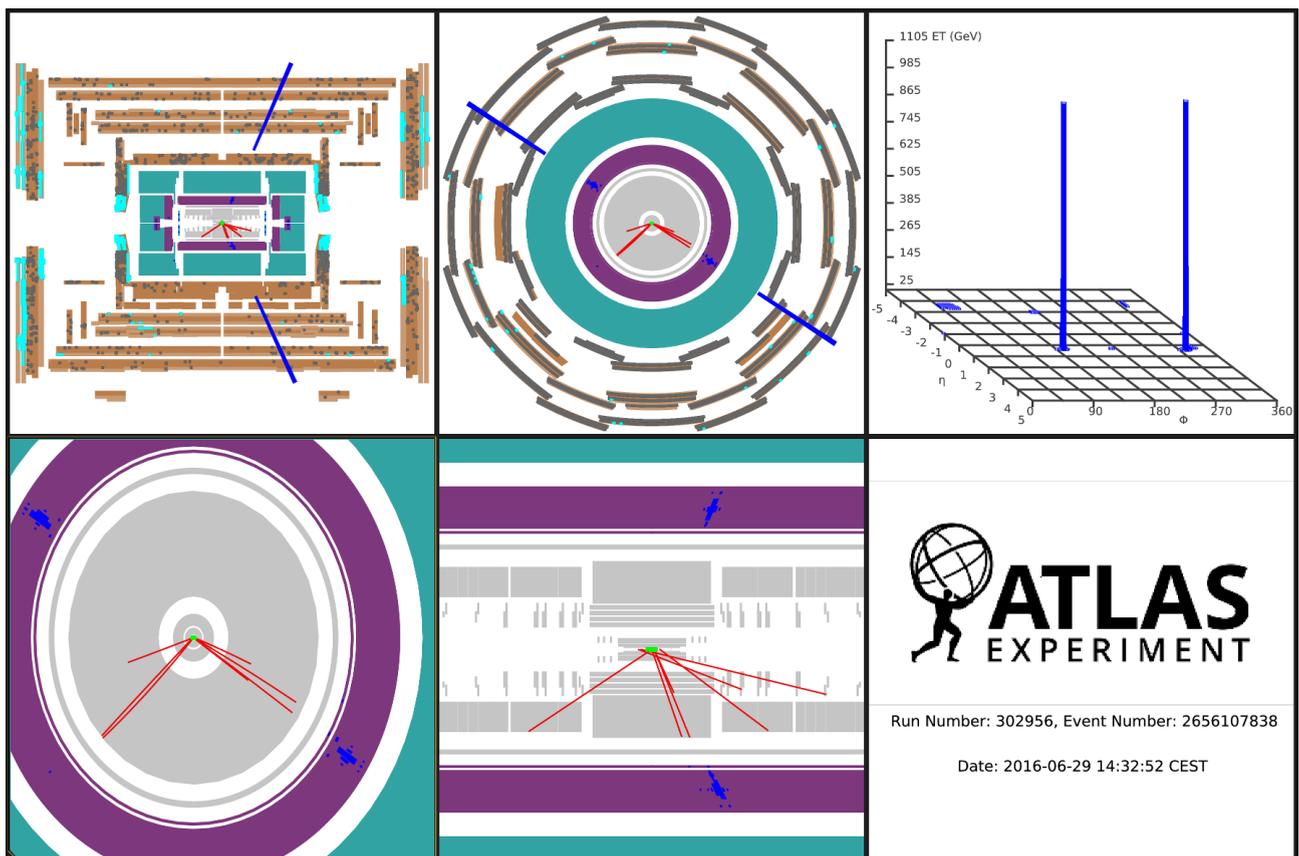


FIGURE 24 – Événement avec production de deux photons isolés de haute énergie dans l’état final. Expérience ATLAS, LHC. Les deux photons gamma se convertissent dans le détecteur, et forment deux gerbes de particules chargées (dépôts d’énergie indiqués en bleu)

5^{ème} Partie

Représentation relativiste du champ électromagnétique – Invariance de jauge – Force de Lorentz – Equation d’onde – Optique

1. Equations de Maxwell, invariance de jauge

1.1 — À partir des équations du champ électromagnétique sous leur forme relativiste,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad \partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} = 0$$

retrouvez les quatre équations de Maxwell dans le vide.

Le tenseur du champ électromagnétique s’écrit :

$$\tilde{\mathbf{F}} : F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

En partant de la forme covariante de la première équation de Maxwell (lien entre les champs et les sources), on explicite l’expression en faisant varier l’indice ν de 0 à 3. Pour $\nu = 0$, on obtient :

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \mu_0 j^0 = \mu_0 c \rho$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} &= \mu_0 c \rho \\ \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \mu_0 c \rho \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \mu_0 c^2 \rho = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

où on reconnaît l’équation de “Maxwell-Gauss” :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Explicitons maintenant l’équation sous forme covariante pour $\nu = 1$. On obtient :

$$\partial_\mu F^{\mu 1} = \mu_0 j^1 = \mu_0 j_x$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} &= \mu_0 j_x \\ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= \mu_0 j_x \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= \mu_0 j_x + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \end{aligned}$$

où on reconnaît la composante selon x de l'équation de "Maxwell-Ampère" :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

En faisant de même pour $\nu = 2$ et $\nu = 3$, on retrouvera les composantes selon y et z de la même équation.

Si on considère maintenant la seconde équation (équation de structure du champ),

$$\partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} = 0$$

on constate qu'en énumérant toutes les combinaisons des trois indices μ, ν, σ , on obtient a priori $4 \times 4 \times 4 = 64$ équations différentes. En pratique, comme $F^{\mu\nu}$ est un tenseur antisymétrique, et du fait de la symétrie de l'équation par permutation des indices, seules les équations pour lesquelles μ, ν, σ prennent trois valeurs distinctes aboutissent à une expression non triviale. Il suffit dès lors de les énumérer.

Pour $\{\sigma, \mu, \nu\} = \{1, 2, 3\}$, on obtient :

$$\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} = 0$$

Soit,

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

où on reconnaît l'équation dite "Maxwell-Flux" (absence de sources du champ \mathbf{B} , conservation du flux magnétique).

Si on prend $\{\sigma, \mu, \nu\} = \{0, 1, 2\}$, cela donne :

$$\partial^0 F^{12} + \partial^1 F^{20} + \partial^2 F^{01} = 0$$

Soit,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

où on reconnaît la composante selon z de l'équation de "Maxwell-Faraday",

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

En faisant de même pour $\{\sigma, \mu, \nu\} = \{0, 1, 3\}$ et $\{\sigma, \mu, \nu\} = \{0, 2, 3\}$, on retrouvera les composantes selon y et z de la même équation.

1.2 — Rappelez les expressions des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} en fonction du potentiel scalaire V et du potentiel vecteur \mathbf{A} .

Les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} se déduisent du potentiel scalaire V et du potentiel vecteur \mathbf{A} par :

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

1.3 — En partant du quadripotiel $\tilde{\mathbf{A}} : A^\mu = (V/c, \mathbf{A})$, Montrez comment les composantes parallèles $\mathbf{E}_\parallel, \mathbf{B}_\parallel$ et perpendiculaires $\mathbf{E}_\perp, \mathbf{B}_\perp$ se transforment par changement de référentiel.

Le quadripotential $\tilde{\mathbf{A}}$ étant un quadrivecteur, lorsqu'on passe d'un référentiel inertiel \mathcal{R} à un autre référentiel inertiel \mathcal{R}' en translation uniforme à la vitesse v par rapport à \mathcal{R} , ses composantes contravariantes $A^\mu = (V/c, \mathbf{A})$ se transforment selon :

$$\left\{ \begin{array}{l} A'^0 = \gamma (A^0 - \beta A^1) \\ A'^1 = \gamma (A^1 - \beta A^0) \\ A'^2 = A^2 \\ A'^3 = A^3 \end{array} \right. \quad \text{c'est à dire} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{V'}{c} = \gamma \left(\frac{V}{c} - \beta A_x \right) \\ A'_x = \gamma \left(A_x - \beta \frac{V}{c} \right) \\ A'_y = A_y \\ A'_z = A_z \end{array} \right.$$

D'autre part, l'opérateur quadri-gradient $\tilde{\nabla}$, de composantes covariantes $\partial_\mu = ((1/c)\partial_t, \nabla)$, se transforme selon :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial'_0 = \gamma (\partial_0 + \beta \partial_1) \\ \partial'_1 = \gamma (\partial_1 + \beta \partial_0) \\ \partial'_2 = \partial_2 \\ \partial'_3 = \partial_3 \end{array} \right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x'} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right.$$

Comme vu précédemment, les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} se déduisent du potentiel scalaire V et du potentiel vecteur \mathbf{A} par :

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

D'autre part, on peut décomposer \mathbf{E} et \mathbf{B} en une composante parallèle au mouvement relatif entre les référentiels (ici, selon Ox et Ox'), et une composante transverse perpendiculaire au mouvement relatif :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{//} + \mathbf{E}_{\perp} & \text{où } \mathbf{E}_{//} &= E_x \mathbf{e}_x \quad \text{et } \mathbf{E}_{\perp} = E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_{//} + \mathbf{B}_{\perp} & \text{où } \mathbf{B}_{//} &= B_x \mathbf{e}_x \quad \text{et } \mathbf{B}_{\perp} = B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Calculons la composante $E'_{//} = E'_x$ du champ électrique dans le référentiel \mathcal{R}' . Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} E'_{//} = E'_x &= -\frac{\partial V'}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial t'} = -\gamma \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) (\gamma V - \gamma \beta c A_x) - \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\gamma A_x - \gamma \beta \frac{V}{c} \right) \\ &= -\gamma^2 (1 - \beta^2) \left[\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \right] = E_x = E_{//}. \end{aligned}$$

La composante parallèle $E_{//}$ du champ \mathbf{E} n'est donc pas modifiée par le changement de référentiel.

Procédons de même pour la composante E'_y :

$$\begin{aligned} E'_y &= -\frac{\partial V'}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial y} (\gamma V - \gamma \beta c A_x) - \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + \beta c \frac{\partial}{\partial x} \right) A_y \\ &= -\gamma \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial A_y}{\partial t} \right) + \gamma \beta c \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Le premier terme est simplement γE_y , tandis qu'on reconnaît dans le second la composante $B_z = \partial_x A_y - \partial_y A_x$ du champ \mathbf{B} . On obtient ainsi :

$$E'_y = \gamma (E_y - \beta c B_z)$$

En procédant de même pour la composante E'_z , on obtient :

$$E'_z = \gamma (E_z + \beta c B_y)$$

En remarquant que :

$$\beta c \times \mathbf{B}_\perp = \beta c \mathbf{e}_x \times (B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z) = \beta c B_y \mathbf{e}_z - \beta c B_z \mathbf{e}_y$$

on peut grouper les résultats précédents sous la forme :

$$\mathbf{E}'_\perp = E'_y \mathbf{e}_y + E'_z \mathbf{e}_z = \gamma (E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z - \beta c B_z \mathbf{e}_y + \beta c B_y \mathbf{e}_z) = \gamma (\mathbf{E}_\perp + \beta c \times \mathbf{B}_\perp)$$

Considérons maintenant la composante parallèle $B'_\parallel = B'_x$ du champ magnétique dans le référentiel \mathcal{R}' . De manière immédiate,

$$B'_\parallel = B'_x = \frac{\partial A'_z}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial z'} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = B_x = B_\parallel$$

la composante parallèle du champ \mathbf{B} n'est pas affectée par le changement de référentiel.

Pour la composante transverse \mathbf{B}'_\perp , calculons par exemple B'_y :

$$\begin{aligned} B'_y &= \frac{\partial A'_x}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma A_x - \gamma \beta \frac{V}{c} \right) - \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) A_z \\ &= \gamma \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \gamma \frac{\beta}{c} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Le premier terme est simplement γB_y , tandis qu'on reconnaît dans le second la composante $E_z = -\partial_z V - \partial_t A_z$:

$$B'_y = \gamma \left(B_y + \frac{\beta}{c} E_z \right).$$

De la même manière, on peut établir que :

$$B'_z = \gamma \left(B_z - \frac{\beta}{c} E_y \right).$$

En remarquant que :

$$\frac{\beta}{c} \times \mathbf{E}_\perp = \frac{\beta}{c} \mathbf{e}_x \times (E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z) = \frac{\beta}{c} E_y \mathbf{e}_z - \frac{\beta}{c} E_z \mathbf{e}_y$$

les deux expressions précédentes peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\mathbf{B}'_\perp = B'_y \mathbf{e}_y + B'_z \mathbf{e}_z = \gamma \left(B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z + \frac{\beta}{c} E_z \mathbf{e}_y - \frac{\beta}{c} E_y \mathbf{e}_z \right) = \gamma \left(\mathbf{B}_\perp - \frac{\beta}{c} \times \mathbf{E}_\perp \right)$$

On trouve finalement les règles de transformation des composantes parallèles et transverses des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} :

$$\begin{cases} \mathbf{E}'_{//} = \mathbf{E}_{//} \\ \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma (\mathbf{E}_{\perp} + \beta c \times \mathbf{B}_{\perp}) \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{B}'_{//} = \mathbf{B}_{//} \\ \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\beta}{c} \times \mathbf{E}_{\perp} \right) \end{cases}$$

1.4 — Le potentiel $\tilde{\mathbf{A}} : A^\mu = (V/c, \mathbf{A})$ n'est pas défini de façon univoque. Montrez que pour toute fonction scalaire χ , la transformation suivante :

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$$

laisse \mathbf{E} et \mathbf{B} inchangés. On parle d'*invariance de jauge*. Montrez que $F^{\mu\nu}$ vérifie l'invariance de jauge.

Supposons qu'on applique au quadripotential de composantes $A^\mu = (V/c, \mathbf{A})$ la transformation :

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$$

Ou, ce qui revient au même,

$$A^\mu \longrightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi$$

Le potentiel scalaire V et le potentiel vecteur \mathbf{A} deviennent ainsi :

$$A^0 = \frac{V}{c} \longrightarrow \frac{V}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} - \nabla \chi$$

Le champ électrique \mathbf{E} est inchangé :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &\longrightarrow -\nabla \left(V + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} - \nabla \chi) = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \chi \\ &= -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{E}. \end{aligned}$$

car les dérivées partielles commutent.

De même, le champ magnétique \mathbf{B} est lui aussi inchangé :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \longrightarrow \nabla \times (\mathbf{A} - \nabla \chi) = \nabla \times \mathbf{A} - \nabla \times \nabla \chi = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Car le rotationnel d'un gradient est nul.

Si on utilise plutôt le tenseur du champ électromagnétique $F^{\mu\nu}$, l'invariance de $F^{\mu\nu}$ par changement de jauge est immédiate :

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu &\longrightarrow \partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu \chi) - \partial^\nu (A^\mu + \partial^\mu \chi) = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \partial^\mu \partial^\nu \chi - \partial^\nu \partial^\mu \chi \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

En fonction du problème traité, on pourra choisir la *jauge* la plus adaptée. On rencontre généralement les deux choix de jauge suivants :

$$\text{Jauge de Coulomb :} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

$$\text{Jauge de Lorenz :} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

1.5 — Montrez que la condition de la jauge de Lorenz s'écrit simplement $\partial_\mu A^\mu = 0$.

L'équivalence des deux expressions est immédiate, car :

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial A^0}{\partial t} + \frac{\partial A^1}{\partial x} + \frac{\partial A^2}{\partial y} + \frac{\partial A^3}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial A^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}.$$

1.6 — Écrivez l'équation de propagation du potentiel $\tilde{\mathbf{A}}$ dans le vide. Montrez que cette équation prend une forme très simple dans la jauge de Lorenz.

Dans le vide, les densités de charge et de courant sont nulles, i.e. $j^\mu = (\rho c, \mathbf{j}) = (0, \vec{0})$. La première équation de Maxwell sous forme covariante devient :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu = 0$$

Ce qu'on peut reformuler en faisant apparaître le quadripotential A^μ ,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0$$

qui est l'équation de propagation pour le quadripotential A^μ .

Si on choisit de se placer dans la jauge de Lorenz où $\partial_\mu A^\mu = 0$, l'équation précédente se simplifie en :

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0 \quad \text{i.e.} \quad \square A^\nu = 0.$$

La jauge de Coulomb est en général utilisée pour traiter des problèmes statiques, comme en électrostatique, tandis que la jauge de Lorenz est d'usage plus général en électrodynamique.

1.7 — Vérifiez que toute fonction de la forme $f(\tilde{\mathbf{r}}) = C e^{i\tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{r}}}$ avec $\tilde{\mathbf{k}} : k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ est solution de l'équation $\square f = 0$.

Soit une fonction f de la position $\tilde{\mathbf{r}} : r^\mu$ dans l'espace-temps, de forme :

$$f(r^\mu) = C e^{i\tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{r}}} = C e^{i k_\nu r^\nu} = C e^{i k^\nu r_\nu}$$

où est C est une constante (*amplitude* de l'onde).

Les dérivations successives de f donnent :

$$\partial^\mu f = \frac{\partial f}{\partial r_\mu} = i k^\mu C e^{i k^\nu r_\nu} = i k^\mu C e^{i k_\nu r^\nu}$$

$$\partial_\mu \partial^\mu f = \frac{\partial}{\partial r^\mu} [i k^\mu C e^{i k_\nu r^\nu}] = -k^\mu k_\mu C e^{i k_\nu r^\nu} = -k^\mu k_\mu C e^{i k^\nu r_\nu}$$

Par conséquent, $f(r^\mu)$ est solution de l'équation $\square f = 0$ à condition d'avoir :

$$k^\mu k_\mu = 0$$

La solution obtenue décrit la propagation d'une onde plane; on appelle $\tilde{\mathbf{k}} : k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ le *quadrivecteur d'onde* de cette onde plane. On reconnaît dans l'expression $k^\mu k_\mu = \omega^2/c^2 - \mathbf{k}^2 = 0$ la relation de dispersion d'une onde plane dans le vide.

1.8 — Que reconnaissez-vous dans le produit $\varphi = \tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{r}} = k_\mu r^\mu$? Est-ce un invariant de Lorentz? La contraction du quadrivecteur d'onde $\tilde{\mathbf{k}} : k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ avec le quadrivecteur position donne la *phase* φ de l'onde plane :

$$\varphi = \tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{r}} = k_\mu r^\mu = k^\mu r_\mu = \frac{\omega}{c} ct - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}.$$

Comme on peut l'écrire comme le produit pseudo-scalaire de deux quadrivecteurs, la phase d'une onde plane est un invariant de Lorentz.

2. Accélération d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme

Afin de comprendre la structure élémentaire de la matière, les physiciens des particules ont développé des techniques d'accélération des particules chargées (électrons, protons, ions, etc) permettant de produire des collisions à très haute énergie. L'analyse détaillée de chaque collision permet de mieux comprendre la sous-structure des particules, leurs interactions, et de découvrir de nouvelles particules. C'est ainsi qu'ont été découverts un ensemble de particules élémentaires prédites par le *Modèle Standard* : les quarks charm (c), bottom (b) et top (t); les bosons W^+ , W^- et Z ; et enfin le boson de Higgs en 2012.

Le boson de Higgs a été mis en évidence au *Large Hadron Collider* dans des collisions de protons dont l'énergie cinétique est de plusieurs téra-électrons-volts (TeV). Pour atteindre cette énergie, les protons sont injectés et accélérés dans une succession d'accélérateurs de plus en plus puissants (fig. 25). Les faisceaux de protons entrent en collision en 4 points du LHC, où sont placés 4 énormes détecteurs de particules dédiés : ATLAS, CMS, LHCb et ALICE.

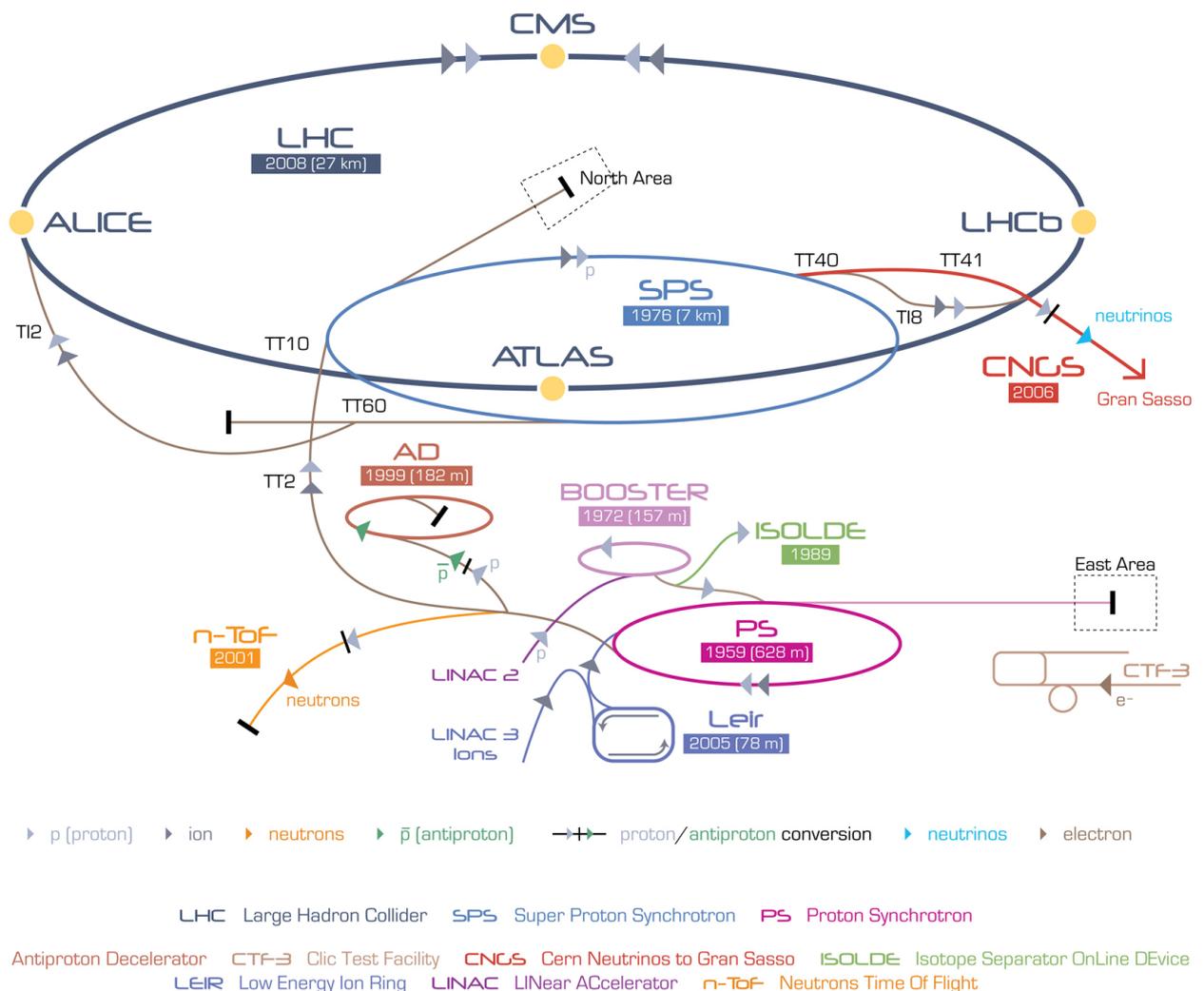


FIGURE 25 – Structure des accélérateurs de particules du CERN (Genève). Les protons sont d'abord accélérés dans l'accélérateur linéaire "LINAC 2" ($T = 50$ MeV), puis injectés et accélérés dans le synchrotron "PS Booster" ($T = 1.4$ GeV), puis dans le PS ($T = 25$ GeV), le SPS ($T = 450$ GeV) et enfin le LHC lui-même ($T = 7$ TeV).

Accélération d’une particule chargée dans un champ électrique uniforme

La source des protons du LHC est une bouteille d’hydrogène gazeux, située à l’entrée du LINAC 2. L’hydrogène est soumis à un champ électrique, qui arrache ses électrons afin de ne laisser entrer dans l’accélérateur que les protons.

Dans sa forme la plus simple, un accélérateur linéaire LINAC consiste en un tube à vide contenant une succession de cylindres conducteurs, dont les charges électriques alternent (fig. 26). Les particules chargées sont injectées par paquets, et on inverse périodiquement la charge électrique des conducteurs cylindriques, afin de toujours accélérer les particules lors du franchissement de l’espace séparant deux cylindres de charges opposées (région de champ électrique uniforme E_{kin} sur la figure).

On se propose dans cette première partie de calculer dans le cadre relativiste le comportement d’une particule accélérée sous l’effet d’un champ électrique uniforme.

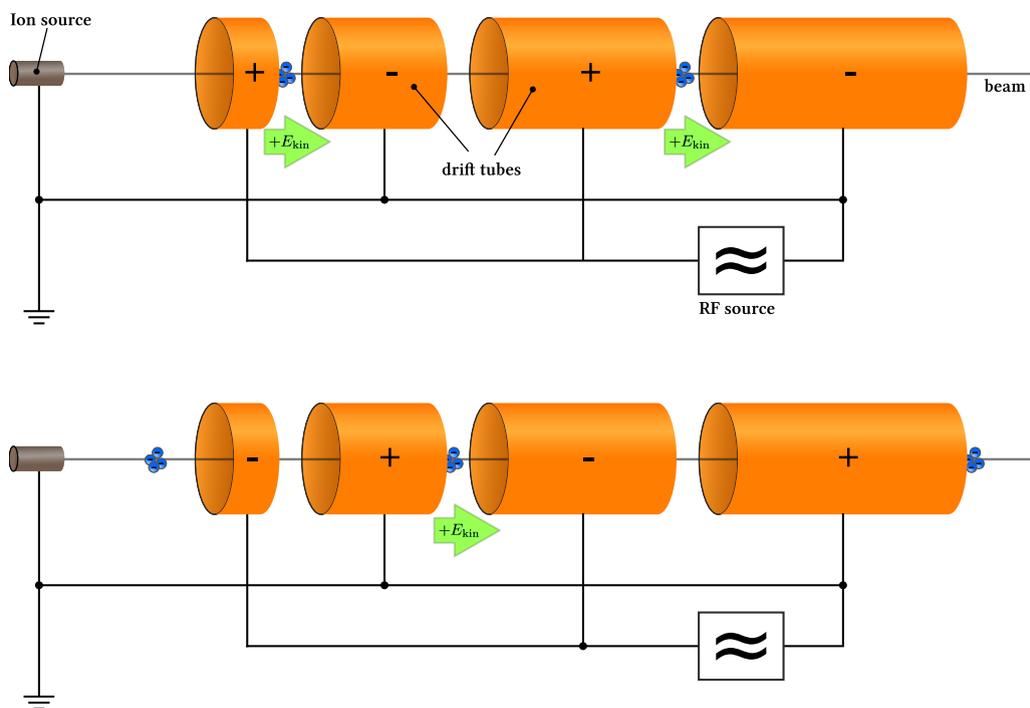


FIGURE 26 – Principe de fonctionnement d’un accélérateur linéaire (LINAC) dans sa forme la plus simple. Les particules sont injectées par paquets (pulses). Les cylindres conducteurs portent des charges électriques alternées, que l’on inverse périodiquement. Lorsque les particules passent d’un cylindre au suivant, elles subissent le champ électrique E_{kin} : l’inversion périodique des charges des cylindres permet de toujours accélérer les particules dans le même sens.

2.1 — Question de cours : à partir de l’équation de Maxwell écrite sous forme covariante :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$$

Retrouvez les deux équations de Maxwell sous leur forme habituelle (équations exprimant les relations entre les champs et les sources).

On rappelle la forme du tenseur du champ électromagnétique $F^{\mu\nu}$:

$$\tilde{\mathbf{F}} : F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

En partant de sa forme covariante, on explicite l'équation en faisant varier l'indice ν de 0 à 3.

Pour $\nu = 0$, on obtient :

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \mu_0 j^0 = \mu_0 c \rho$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} &= \mu_0 c \rho \\ \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \mu_0 c \rho \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \mu_0 c^2 \rho = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

où on reconnaît l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Explicitons maintenant l'équation sous forme covariante pour $\nu = 1$. On obtient :

$$\partial_\mu F^{\mu 1} = \mu_0 j^1 = \mu_0 j_x$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} &= \mu_0 j_x \\ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= \mu_0 j_x \\ \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} &= \mu_0 j_x + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \end{aligned}$$

où on reconnaît la composante selon x de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

En faisant de même pour $\nu = 2$ et $\nu = 3$, on retrouvera les composantes selon y et z de la même équation.

2.2 — Rappelez l'expression du quadrivecteur énergie-impulsion $\tilde{\mathbf{p}}$ et celle de ses composantes contravariantes p^μ et covariantes p_μ .

On construit le quadrivecteur énergie-impulsion (ou quadri-impulsion) $\tilde{\mathbf{p}}$ comme suit :

$$\tilde{\mathbf{p}} = m \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau} = m \tilde{\mathbf{U}}$$

Ses composantes contravariantes s'écrivent :

$$p^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)mc \\ \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c = \gamma(u)mc \\ \mathbf{p} = \gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} \quad \text{avec } E \text{ l'énergie totale de l'objet étudié.}$$

De même, ses composantes covariantes s'écrivent :

$$p_\mu = g_{\mu\nu}p^\nu = \begin{pmatrix} \gamma(u)mc \\ -\gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c = \gamma(u)mc \\ -\mathbf{p} = -\gamma(u)m\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Dans ces relations, m est la masse propre de l'objet (c'est à dire sa masse au repos), $\gamma(u)m > m$ est en quelque sorte sa "masse apparente", et $E = \gamma(u)mc^2$ son énergie totale, somme de son énergie de masse $E_0 = mc^2$ et de son énergie cinétique $T = E - mc^2 = (\gamma(u) - 1)mc^2$.

La pseudo-norme carrée de $\tilde{\mathbf{p}}$ vaut $\tilde{\mathbf{p}}^2 = m^2c^2 = (mc^2)^2/c^2$.

Les composantes de $\tilde{\mathbf{p}}$ vérifient les relations suivantes, très utiles :

$$\tilde{\mathbf{p}}^2 = (mc^2)^2/c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 \quad \text{i.e. } E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$\vec{\beta} = \frac{\mathbf{p}}{p^0} = \frac{\mathbf{p}c}{E} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{E}{mc^2}$$

2.3 — Par analogie avec la mécanique classique, on définit le quadrivecteur force $\tilde{\mathbf{f}}$ par :

$$\tilde{\mathbf{f}} = \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{d\tau}$$

Est-ce bien un quadrivecteur? Justifiez. Ecrivez les composantes f^μ de $\tilde{\mathbf{f}}$ en fonction des dérivées par rapport à t de l'énergie E de la particule et de sa quantité de mouvement \mathbf{p} .

$\tilde{\mathbf{f}}$ est la dérivée d'un quadrivecteur par rapport au temps propre τ , qui est un invariant de Lorentz : ses composantes se transforment donc bien selon Lorentz, et $\tilde{\mathbf{f}}$ possède bien les propriétés d'un quadrivecteur.

On a donc :

$$\tilde{\mathbf{f}} = \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{dt} = \gamma(u) \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{dt}$$

Pour les composantes contravariantes, cela donne :

$$f^\mu = \gamma(u) \frac{dp^\mu}{dt} \quad \text{avec} \quad p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right)$$

D'où

$$f^\mu = \left(\gamma(u) \frac{1}{c} \frac{dE}{dt}, \gamma(u) \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)$$

2.4 — Montrez que pour une particule de quadrivitesse $\tilde{\mathbf{U}}$ subissant une quadriforce $\tilde{\mathbf{f}}$, on a $\tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = f^\mu U_\mu = 0$. Déduisez-en que :

$$\frac{dE}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$$

où on notera

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(\gamma(u)m\mathbf{u})}{dt}$$

Le quadrivecteur vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$ vérifie :

$$\tilde{\mathbf{U}}^2 = U_\mu U^\mu = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = c^2 \quad \text{d'où} \quad \frac{d\tilde{\mathbf{U}}^2}{d\tau} = 2 \frac{d\tilde{\mathbf{U}}}{d\tau} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = 0$$

Or, le pseudo-produit scalaire $\tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}$ peut encore s'écrire :

$$\tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{d\tau} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = m \frac{d\tilde{\mathbf{U}}}{d\tau} \cdot \tilde{\mathbf{U}} \quad \text{d'où} \quad \tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = f^\mu U_\mu = 0$$

Si on explicite cette dernière relation avec les composantes f^μ et U_μ , on trouve :

$$\tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = f^\mu U_\mu = \gamma^2(u) \left[\frac{dE}{dt} - \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{u} \right] = 0$$

d'où on déduit immédiatement :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}.$$

On retrouve ici un résultat analogue (d'un point de vue formel) à la mécanique classique : la variation de l'énergie d'une particule par unité de temps est égale à la puissance des forces appliquées sur cette particule.

Dans le référentiel du laboratoire, on considère une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme et constant $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x$.

2.5 — Donnez explicitement $F^{\mu\nu}$ dans la région de l'espace où $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x$.

Dans le référentiel du laboratoire, les composantes contravariantes $F^{\mu\nu}$ du tenseur du champ électromagnétique se réduisent à :

$$\tilde{\mathbf{F}} : F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & 0 & 0 \\ E_x/c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère une particule de charge q placée dans le champ : on note $\tilde{\mathbf{r}}$ sa position, \mathbf{u} son vecteur vitesse et $\tilde{\mathbf{U}}$ sa quadri-vitesse. Les composantes contravariantes de la quadri-force de Lorentz $\tilde{\mathbf{f}}$ qu'elle subit s'écrivent :

$$f^\mu = q F^\mu{}_\nu U^\nu = q F^{\mu\nu} U_\nu. \tag{26}$$

2.6 — Rappelez l'expression des composantes contravariantes U^μ et covariantes U_μ de la quadri-vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$.

Le quadrivecteur vitesse $\tilde{\mathbf{U}}$ est défini par :

$$\tilde{\mathbf{U}} = \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau}$$

Ses composantes contravariantes s'écrivent :

$$U^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(u)c \\ \gamma(u)\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Et ses composantes covariantes sont :

$$U_\mu = g_{\mu\nu}U^\nu = \begin{pmatrix} \gamma(u)c \\ -\gamma(u)\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

2.7 — À partir de l'équation (26), donnez explicitement les composantes f^0 , f^1 , f^2 et f^3 du quadrivecteur $\tilde{\mathbf{f}}$.

Les composantes contravariantes f^μ du quadrivecteur force de Lorentz $\tilde{\mathbf{f}}$ vérifient :

$$f^\mu = qF^\mu{}_\nu U^\nu = qF^{\mu\nu} U_\nu.$$

Écrivons explicitement chaque composante. On a ainsi :

$$\begin{aligned} f^0 &= qF^{00} U_0 + qF^{01} U_1 + qF^{02} U_2 + qF^{03} U_3 = \gamma(u)qE_x \frac{u_x}{c} \\ f^1 &= qF^{10} U_0 + qF^{11} U_1 + qF^{12} U_2 + qF^{13} U_3 = \gamma(u)qE_x \\ f^2 &= qF^{20} U_0 + qF^{21} U_1 + qF^{22} U_2 + qF^{23} U_3 = 0 \\ f^3 &= qF^{30} U_0 + qF^{31} U_1 + qF^{32} U_2 + qF^{33} U_3 = 0 \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$f^\mu = \left(\gamma(u)qE_x \frac{u_x}{c}, \gamma(u)qE_x \mathbf{e}_x \right)$$

2.8 — Déduisez-en les équations différentielles auxquelles obéissent l'énergie E et la quantité de mouvement \mathbf{p} de la particule qui subit le champ électrique. Montrez que

$$\frac{d(\gamma(u)\mathbf{u})}{dt} = \frac{qE_x}{m} \mathbf{e}_x = a \mathbf{e}_x \quad \text{avec} \quad a = \frac{qE_x}{m}$$

D'après la question précédente, la force de Lorentz s'écrit ici :

$$f^\mu = \left(\gamma(u)qE_x \frac{u_x}{c}, \gamma(u)qE_x \mathbf{e}_x \right)$$

Or, on a par ailleurs :

$$f^\mu = \left(\gamma(u) \frac{1}{c} \frac{dE}{dt}, \gamma(u) \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)$$

En identifiant, on trouve immédiatement :

$$qE_x \frac{u_x}{c} = \frac{1}{c} \frac{dE}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = qE_x \mathbf{e}_x.$$

Cette dernière équation peut encore s'écrire :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d(\gamma(u)\mathbf{u})}{dt} = qE_x \mathbf{e}_x \quad \text{soit} \quad \frac{d(\gamma(u)\mathbf{u})}{dt} = \frac{qE_x}{m} \mathbf{e}_x.$$

2.9 — À $t = 0$ la particule est immobile ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$) dans le référentiel du laboratoire à la position $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Déduisez-en l'expression de la vitesse u en fonction du temps (on aura avantage à faire apparaître la rapidité φ).

Lorsque $t \rightarrow +\infty$, vers quelle valeur tend u ? Comparez avec le cas classique.

À partir de l'équation précédente,

$$d(\gamma(u)\mathbf{u}) = \frac{qE_x}{m} \mathbf{e}_x dt$$

Ce qui donne, en intégrant,

$$\gamma(u)\mathbf{u} = \gamma(u(t=0))\mathbf{u}(t=0) + \int_0^t \frac{qE_x}{m} \mathbf{e}_x dt = \frac{qE_x t}{m} \mathbf{e}_x$$

La vitesse \mathbf{u} est par conséquent selon \mathbf{e}_x : $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_x$. En remplaçant $\gamma(u)$ par son expression,

$$\frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{qE_x t}{m} = at$$

en posant $a = qE_x/m$. Ce qui donne :

$$u = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}}$$

Pour de grandes valeurs de t , autrement dit au bout d'un temps assez long, la vitesse de la particule accélérée tend vers c :

$$u = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2 t^2}}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} c$$

Dans le traitement classique de ce phénomène, l'accélération de la particule serait $du/dt = qE_x/m = a$, et on obtiendrait une trajectoire rectiligne uniformément accélérée :

$$u = at = \frac{qE_x}{m} t \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{2} at^2$$

La description classique n'interdit donc pas à la particule d'atteindre au bout d'un temps $t = c/a$ la vitesse de la lumière, puis de la dépasser. Le traitement relativiste du même problème physique interdit cela, en accord avec l'expérience.

2.10 — Déduisez-en la trajectoire de la particule et donnez l'expression de $r^\mu = (ct, x, y, z)$ en fonction de t . On aura avantage à faire apparaître la rapidité $\varphi = \operatorname{argtanh} \beta$. Montrez que pour $at \ll c$, on retrouve le résultat classique $x(t) = at^2/2$.

D'après ce qui précède, la vitesse $u(t)$ s'écrit :

$$u = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} = c \tanh \varphi$$

En se souvenant que $\gamma(u) = \cosh \varphi$ et que $\beta\gamma = \sinh \varphi$, on trouve :

$$\cosh \varphi = \gamma(u) = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} \quad \text{et} \quad \sinh \varphi = \sqrt{\cosh^2 \varphi - 1} = \frac{at}{c}$$

De l'équation différentielle précédente,

$$d(\gamma(u)\mathbf{u}) = \frac{qE_x}{m} \mathbf{e}_x dt = a, \mathbf{e}_x dt$$

on tire aussi une relation entre φ et t :

$$d(\gamma(u)u) = c d(\cosh \varphi \tanh \varphi) = a dt \quad \text{d'où} \quad dt = \frac{c}{a} d(\sinh \varphi) = \frac{c}{a} \cosh \varphi d\varphi$$

On peut désormais exprimer dx en fonction de φ :

$$dx = u dt = \frac{at dt}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} = \frac{c^2}{a} \frac{\sinh \varphi \cosh \varphi d\varphi}{\cosh \varphi} = \frac{c^2}{a} \sinh \varphi d\varphi$$

D'où on déduit, en intégrant le long de la trajectoire :

$$x(t) = x(0) + \int_0^t dx = \frac{c^2}{a} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} \sinh \varphi d\varphi = \frac{c^2}{a} [\cosh \varphi(t) - 1] = \frac{c^2}{a} \left[\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right].$$

Ce qui donne :

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) : r^\mu(t) = \left(ct, \frac{c^2}{a} \left[\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right], 0, 0 \right)$$

Lorsque $at \ll c$, on retrouve le résultat classique :

$$x(t) = \frac{c^2}{a} \left[\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right] \simeq \frac{c^2}{a} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{a^2 t^2}{c^2} - 1 \right] = \frac{1}{2} at^2$$

3. Champ électromagnétique produit par un fil infini chargé

On considère un fil infini le long de l'axe Oz , de section s négligeable devant les dimensions du problème. On se placera toujours à l'extérieur du fil.

Dans le référentiel \mathcal{R} galiléen, solidaire avec le matériau constituant le fil, le fil porte une charge électrique uniformément répartie : la densité volumique de charge est ρ , et la densité linéique $\lambda = \rho s$. Ces charges électriques sont animées d'un mouvement uniforme à la vitesse $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_z$, créant ainsi dans le fil une densité de courant $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$.

3.1. Courant et densité de charge

3.1 — Exprimez le courant électrique I qui circule dans le fil en fonction de \mathbf{j} et s , puis en fonction de ρ , v et s .

Le courant électrique I est simplement le flux du vecteur densité de courant à travers la section du fil :

$$I = \iint_s \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \iint_s \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_z dS = j s = \rho v s$$

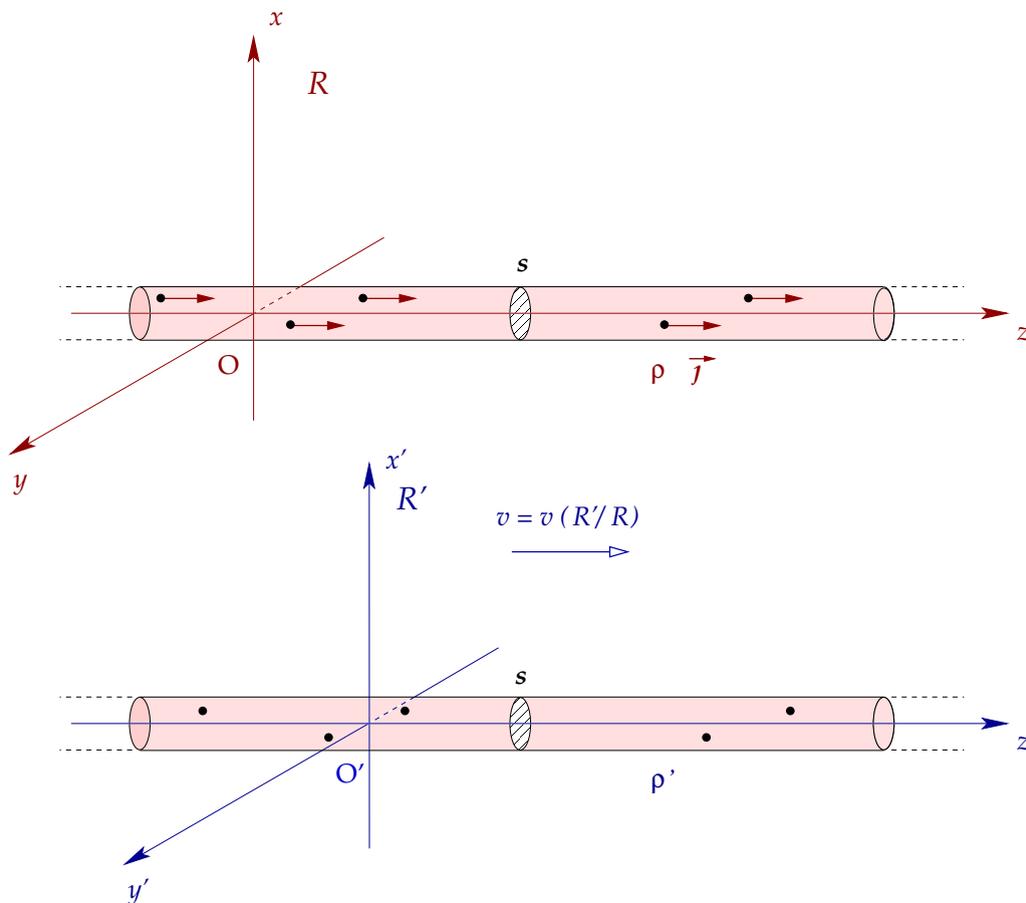


FIGURE 27 – Fil infini chargé, parcouru par un courant. Points de vue : dans le référentiel \mathcal{R} du fil (haut) ; dans le référentiel \mathcal{R}' en mouvement avec les charges (bas).

On se place maintenant dans le référentiel \mathcal{R}' , en translation uniforme par rapport à \mathcal{R} à la vitesse \mathbf{v} , tel que $\mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \mathbf{v} = v \mathbf{e}_z$.

3.2 — Dans le référentiel \mathcal{R}' , que vaut le courant électrique I' dans le fil ? La densité de courant \mathbf{j}' ?

Dans le référentiel \mathcal{R}' , les charges sont immobiles : la densité de courant \mathbf{j}' et le courant I' sont donc nuls.

3.3 — Écrivez la transformation de Lorentz entre les référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' . **Attention ! Le mouvement relatif n'est pas selon Ox mais selon Oz !**

Avec les conventions choisies, la transformation s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = \frac{t - vz/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' = x \\ y' = y \\ z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{array} \right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct' = \gamma(ct - \beta z) \\ x' = x \\ y' = y \\ z' = \gamma(z - \beta ct) \end{array} \right. \quad \text{et réciproquement} \quad \left\{ \begin{array}{l} ct = \gamma(ct' + \beta z') \\ x = x' \\ y = y' \\ z = \gamma(z' + \beta ct') \end{array} \right.$$

On peut mettre ces équations sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

3.4 — Montrez que pour un quadrivecteur quelconque $\tilde{\mathbf{A}}$ de composantes contravariantes A^ν , la matrice $[\mathbf{L}]$ qui permet d'exprimer les composantes $A'^\mu = [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu A^\nu$ dans \mathcal{R}' en fonction des composantes A^ν dans \mathcal{R} s'écrit :

$$\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}' \quad A'^\mu = \sum_\nu [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu A^\nu = [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu A^\nu \quad \text{avec} \quad [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Donnez la matrice inverse \mathbf{L}^{-1} telle que $A^\mu = [\mathbf{L}^{-1}]^\mu{}_\nu A'^\nu$. Comment se transforment les composantes covariantes A_ν lorsqu'on passe du référentiel \mathcal{R} au référentiel \mathcal{R}' ?

Soyez très attentif au choix des axes effectué dans l'énoncé : le mouvement relatif est selon e_z .

Pour un quadrivecteur quelconque $\tilde{\mathbf{A}}$ de composantes contravariantes A^ν dans \mathcal{R} , ses composantes A'^μ dans \mathcal{R}' s'obtiennent par la relation :

$$\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}' \quad A'^\mu = \sum_\nu [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu A^\nu = [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu A^\nu \quad \text{avec} \quad [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Et réciproquement,

$$\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R} \quad A^\mu = \sum_\nu [\mathbf{L}^{-1}]^\mu{}_\nu A'^\nu = [\mathbf{L}^{-1}]^\mu{}_\nu A'^\nu \quad \text{avec} \quad [\mathbf{L}^{-1}]^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

3.5 — Que vaut l'abscisse z' du point origine O' dans le référentiel \mathcal{R}' ? Exprimez $z'(O')$ en fonction de sa position $z(O')$ dans \mathcal{R} et du temps t .

On a immédiatement $z'(O') = 0$. En utilisant la transformation de Lorentz, on peut aussi écrire :

$$z'(O') = 0 = \gamma (z(O') - \beta ct) \quad (27)$$

3.6 — Considérons un point A' fixe dans \mathcal{R}' , placé sur l'axe $O'z'$ à une distance $z'(A') = \ell'$ de l'origine O' . Exprimez $z'(A')$ dans \mathcal{R}' en fonction de sa position $z(A')$ dans \mathcal{R} et du temps t .

Comme précédemment, en appliquant la transformation de Lorentz, on obtient,

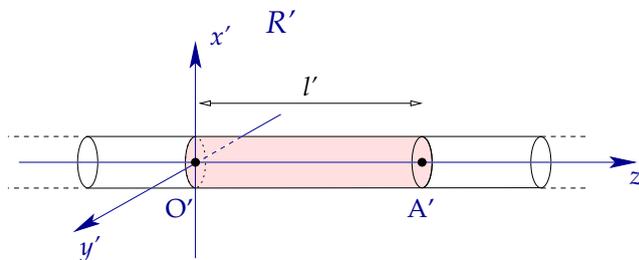
$$z'(A') = \ell' = \gamma (z(A') - \beta ct) \quad (28)$$

3.7 — En vous souvenant que la longueur d'un objet se mesure dans un référentiel donné en repérant la position de ses extrémités *au même instant* dans ce référentiel, déduisez-en la relation entre $\ell = z(A') - z(O')$ et $\ell' = z'(A') - z'(O')$.

En combinant les équations (27) et (28), et en se souvenant de la définition d'une distance dans \mathcal{R} (différence des positions prises au même temps t), on trouve immédiatement :

$$\ell' = z'(A') - z'(O') = \gamma (z(A') - \beta ct) - \gamma (z(O') - \beta ct) = \gamma (z(A') - z(O')) = \gamma \ell \quad \text{i.e.} \quad \ell = \frac{\ell'}{\gamma}$$

3.8 — Considérons le volume cylindrique du fil délimité par les points O' et A' (figure ci-contre). Quel est son volume V (respectivement V') dans le référentiel \mathcal{R} (resp. \mathcal{R}') ? En utilisant le fait que la charge électrique totale Q contenue dans ce cylindre est la même dans les deux référentiels, déduisez-en la relation qui relie la densité de charge électrique ρ vue dans \mathcal{R} et ρ' vue dans \mathcal{R}' .



Le volume délimité par les points O' et A' vaut :

$$V = s\ell \quad (\text{dans } \mathcal{R}) \quad \text{et} \quad V' = s\ell' = \gamma s\ell \quad (\text{dans } \mathcal{R}')$$

On en déduit l'expression de la charge électrique Q contenu dans ce volume :

$$Q = \rho V = \rho s\ell \quad (\text{dans } \mathcal{R}) \quad \text{et} \quad Q = \rho' V' = \gamma \rho' s\ell \quad (\text{dans } \mathcal{R}')$$

D'où,

$$Q = \rho s\ell = \gamma \rho' s\ell \quad \text{i.e.} \quad \rho = \gamma \rho' \quad \rho' = \frac{\rho}{\gamma}$$

3.9 — Retrouvez la relation entre ρ et ρ' en écrivant le quadrivecteur-courant $\tilde{\mathbf{j}} : j^\mu = (\rho c, \mathbf{j})$ dans les deux référentiels et en exploitant l'invariance de $\tilde{\mathbf{j}}^2 = j^\mu j_\mu$.

Dans \mathcal{R} et \mathcal{R}' , le quadrivecteur courant s'écrit respectivement :

$$\tilde{\mathbf{j}} : j^\mu = (\rho c, \mathbf{j} = \rho \mathbf{v}) \quad (\mathcal{R}) \quad \tilde{\mathbf{j}} : j'^\mu = (\rho' c, \mathbf{0}) \quad (\mathcal{R}')$$

L'invariance de la pseudo-norme carrée de $\tilde{\mathbf{j}}$ permet d'écrire :

$$\tilde{\mathbf{j}}^2 = \tilde{\mathbf{j}}'^2 \quad \text{soit} \quad \rho^2 c^2 - \rho^2 v^2 = \rho'^2 c^2 \quad \text{i.e.} \quad \rho^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \rho'^2 \quad \text{d'où} \quad \rho' = \frac{\rho}{\gamma}$$

3.2. Champ électrique

Plaçons-nous dans le référentiel \mathcal{R}' : dans \mathcal{R} les charges sont immobiles, et nous sommes en présence d'un problème classique d'électrostatique.

Soit un point M quelconque dans le référentiel \mathcal{R}' , situé à une distance b de l'axe z' du fil infini.

3.10 — On repère le point M par ses coordonnées polaires b', θ', z' dans le référentiel \mathcal{R}' , et b, θ, z dans \mathcal{R} (figure 28). Exprimez b et θ en fonction de b' et θ' .

La coordonnée b est orthogonale au mouvement relatif des deux référentiels galiléens : on a donc $b = b'$. De même, l'angle θ est défini dans le plan transverse (Oxy) par $\tan \theta = y/x$; comme les

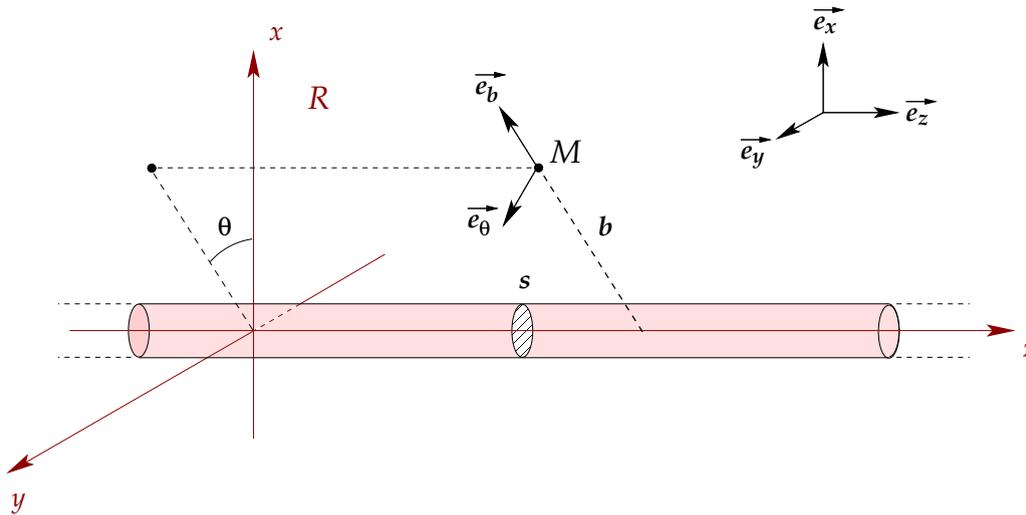


FIGURE 28 – Choix des coordonnées : on notera b la distance d'un point quelconque M au fil.

coordonnées x et y ne sont pas affectées par la transformation de Lorentz, θ ne l'est pas non plus, et $\theta = \theta'$.

3.11 — En utilisant des arguments de symétrie, montrez que le champ électrique $\mathbf{E}'(M)$ est nécessairement radial, et qu'il n'est fonction que de b : $\mathbf{E}'(M) = E'(b) \mathbf{e}_b$.

Comme le fil est infini et que la densité de charge est uniforme, le système est invariant par translation selon $O'z'$: $E'(M)$ est donc indépendant de la coordonnée z' . D'autre part, le système est invariant par rotation d'un angle quelconque autour de l'axe $O'z'$: l'intensité du champ E' ne doit donc pas dépendre de l'angle θ .

Considérons le plan de symétrie $(M, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y) = (M, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_\theta)$. Cette symétrie laisse invariante la géométrie du système et la distribution des charges. Par conséquent, la composante E'_z de \mathbf{E}' orthogonale à ce plan est nécessairement nulle.

Il en est de même pour le plan de symétrie défini par le point M et l'axe $O'z'$: On en déduit que la composante orthoradiale E'_θ est elle aussi nulle.

On en conclut que la seule composante non nulle du champ $\mathbf{E}'(M)$ est la composante radiale E'_b , et que l'intensité du champ \mathbf{E}' ne dépend que de la distance au fil b : $\mathbf{E}'(M) = E'(b) \mathbf{e}_b$.

3.12 — En appliquant le théorème de Gauss pour un volume cylindrique bien choisi (voir fig. 29), montrez que l'expression de l'intensité du champ électrique $\mathbf{E}'(b)$ à l'extérieur du fil est :

$$\mathbf{E}'(b) = E'(b) \mathbf{e}_b = \frac{\rho' s}{2\pi\epsilon_0 b} \mathbf{e}_b$$

Appliquons le théorème de Gauss à un cylindre \mathcal{V}' de rayon b , d'axe de révolution $O'z'$, et de longueur L' , défini entre les abscisses $z'(M) - L'/2$ et $z'(M) + L'/2$. Le flux du champ \mathbf{E}' à travers la surface de ce cylindre est égal à la charge électrique totale $Q_{\mathcal{V}'}$ contenue dans le cylindre divisé par la permittivité du vide ϵ_0 :

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}'} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{V}'} \frac{\rho'}{\epsilon_0} dV = \frac{Q_{\mathcal{V}'}}{\epsilon_0}$$

Comme \mathbf{E}' est radial et que son intensité ne dépend que de b , constant sur la périphérie du cylindre,

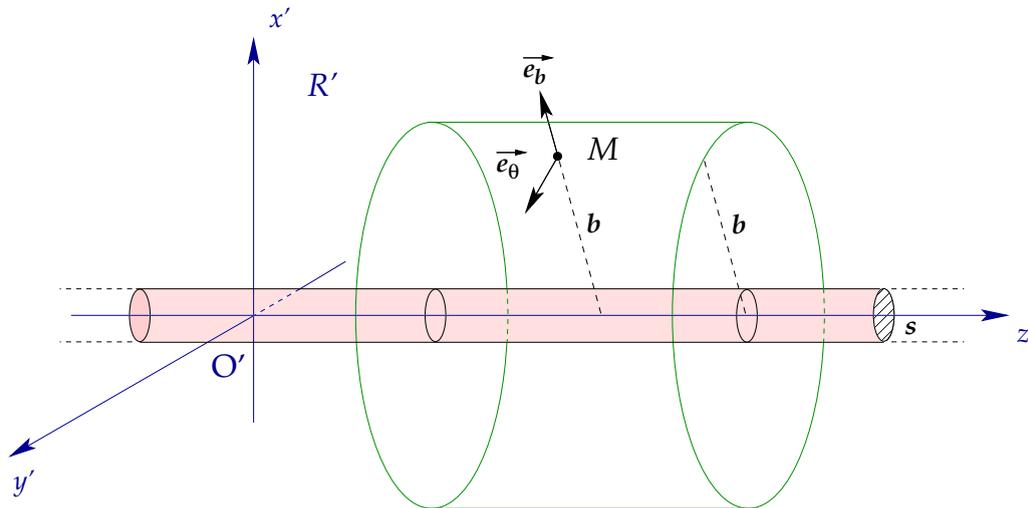


FIGURE 29 – Volume cylindrique de rayon b pour le calcul du champ électrique par le théorème de Gauss.

cette équation se simplifie :

$$\iint_{\partial \mathcal{V}'} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{S} = 2\pi b L' E'(b) = \frac{\rho' s L'}{\epsilon_0}$$

On en déduit :

$$E'(b) = \frac{\rho' s L'}{2\pi \epsilon_0 b L'} = \frac{\rho' s}{2\pi \epsilon_0 b} \quad \mathbf{E}'(b) = \frac{\rho' s}{2\pi \epsilon_0 b} \mathbf{e}_b$$

On rappelle la forme générale du tenseur du champ électromagnétique $F^{\mu\nu}$:

$$\tilde{\mathbf{F}} : F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

3.13 — Donnez explicitement l'expression du tenseur $\tilde{\mathbf{F}}' : F'^{\mu\nu}$ dans le référentiel \mathcal{R}' pour un point quelconque M situé à l'extérieur du fil chargé.

Dans \mathcal{R}' , en l'absence de courant et donc de champ magnétique, d'après ce qui précède, le tenseur $\tilde{\mathbf{F}}'$ a pour composantes contravariantes :

$$\tilde{\mathbf{F}}' : F'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E'_x/c = -\frac{E'(b)}{c} \cos \theta & -E'_y/c = -\frac{E'(b)}{c} \sin \theta & 0 \\ E'_x/c = \frac{E'(b)}{c} \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ E'_y/c = \frac{E'(b)}{c} \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.14 — Rappelez comment se transforme un tenseur contravariant de rang 2 par changement de référentiel galiléen. **Soyez très attentif au choix des axes effectué dans l'énoncé.**

Lorsqu'on passe du référentiel \mathcal{R} au référentiel \mathcal{R}' , Les composantes contravariantes $F^{\mu\nu}$ du tenseur électromagnétique se transforment selon :

$$F'^{\mu\nu} = [\mathbf{L}]^\mu_\alpha [\mathbf{L}]^\nu_\beta F^{\alpha\beta}$$

et réciproquement,

$$F^{\mu\nu} = [\mathbf{L}^{-1}]^\mu_\alpha [\mathbf{L}^{-1}]^\nu_\beta F'^{\alpha\beta}$$

3.15 — En utilisant le résultat précédent, déduisez-en l'expression du tenseur électromagnétique $F^{\mu\nu}$ dans le référentiel \mathcal{R} . Identifiez avec l'expression générale du tenseur $F^{\mu\nu}$, et donnez l'expression des composantes (E_x, E_y, E_z) et (B_x, B_y, B_z) des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} dans le référentiel \mathcal{R} .

En utilisant ce qui précède, et le fait que les matrices \mathbf{L} et \mathbf{L}^{-1} sont symétriques, on trouve :

$$F^{\mu\nu} = [\mathbf{L}^{-1}]^\mu_\alpha [\mathbf{L}^{-1}]^\nu_\beta F'^{\alpha\beta} = [\mathbf{L}^{-1}]^\mu_\alpha F'^{\alpha\beta} [\mathbf{L}^{-1}]^\nu_\beta$$

expression qui peut s'interpréter comme un produit matriciel (car la matrice de Lorentz est symétrique),

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E'(b)}{c} \cos \theta & -\frac{E'(b)}{c} \sin \theta & 0 \\ \frac{E'(b)}{c} \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E'(b)}{c} \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Ce qui donne,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma \frac{E'(b)}{c} \cos \theta & -\gamma \frac{E'(b)}{c} \sin \theta & 0 \\ \gamma \frac{E'(b)}{c} \cos \theta & 0 & 0 & \beta\gamma \frac{E'(b)}{c} \cos \theta \\ \gamma \frac{E'(b)}{c} \sin \theta & 0 & 0 & \beta\gamma \frac{E'(b)}{c} \sin \theta \\ 0 & -\beta\gamma \frac{E'(b)}{c} \cos \theta & -\beta\gamma \frac{E'(b)}{c} \sin \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

En identifiant, on trouve,

$$E_x = \gamma E'(b) \cos \theta \quad E_y = \gamma E'(b) \sin \theta \quad E_z = 0$$

où

$$E'(b) = \frac{\rho' s}{2\pi\epsilon_0 b} = \frac{1}{\gamma} \frac{\rho s}{2\pi\epsilon_0 b}$$

Or, dans le référentiel \mathcal{R} ,

$$E_x = E(b) \cos \theta \quad E_y = E(b) \sin \theta \quad E_z = 0$$

D'où, en identifiant,

$$E(b) = \gamma \times E'(b) = \gamma \times \frac{1}{\gamma} \frac{\rho s}{2\pi\epsilon_0 b} = \frac{\rho s}{2\pi\epsilon_0 b}$$

Par ailleurs, on trouve un champ magnétique non-nul dans le référentiel \mathcal{R} , de composantes :

$$B_x = -\beta\gamma \frac{E'(b)}{c} \sin \theta = -B(b) \sin \theta \quad B_y = +\beta\gamma \frac{E'(b)}{c} \cos \theta = +B(b) \cos \theta \quad B_z = 0$$

où, en identifiant, on obtient la norme du champ magnétique $B(b)$:

$$B(b) = \frac{1}{\gamma} \frac{\rho s}{2\pi\epsilon_0 b} \times \gamma \frac{v}{c^2} = \frac{\rho v s}{2\pi b \epsilon_0 c^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \quad \text{et par conséquent} \quad \mathbf{B}(b) = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \mathbf{e}_\theta$$

3.16 — En vous plaçant dans le référentiel \mathcal{R} et en utilisant de nouveau le théorème de Gauss, retrouvez l'expression du champ $\mathbf{E}(M)$ dans le référentiel \mathcal{R} . Commentez.

En raisonnant comme précédemment, on peut définir dans le référentiel \mathcal{R} un volume cylindrique \mathcal{V} de rayon b et de longueur L dans \mathcal{R} , défini entre les abscisses $z(M) - L/2$ et $z(M) + L/2$. Le flux du champ \mathbf{E} à travers la surface de ce cylindre est égal à la charge électrique totale $Q_{\mathcal{V}}$ contenue dans le cylindre divisé par la permittivité du vide ϵ_0 :

$$\oiint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{Q_{\mathcal{V}}}{\epsilon_0}$$

Comme \mathbf{E} est radial (même raisonnement, la géométrie est identique) et que son intensité ne dépend que de b , constant sur la périphérie du cylindre, cette équation se simplifie :

$$\iint_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi b L E(b) = \frac{\rho s L}{\epsilon_0}$$

On en déduit :

$$E(b) = \frac{\rho s L}{2\pi\epsilon_0 b L} = \frac{\rho s}{2\pi\epsilon_0 b} \quad \mathbf{E}(b) = \frac{\rho s}{2\pi\epsilon_0 b} \mathbf{e}_b$$

On retrouve naturellement le résultat obtenu en transformant les composantes du tenseur électromagnétique.

3.3. Champ magnétique

On considère maintenant le système dans le référentiel \mathcal{R} . Dans ce référentiel, le fil est parcouru par un courant I .

3.17 — Montrez que, par symétrie, l'intensité du champ magnétique B en un point M quelconque (à l'extérieur du fil) n'est fonction que de b , et que \mathbf{B} est nécessairement orthoradial : $\mathbf{B} = B(b) \mathbf{e}_\theta$.

Comme le fil est infini et que la densité de courant est uniforme, le système est invariant par translation selon Oz : $B(M)$ est donc indépendant de la coordonnée z . D'autre part, le système est invariant par rotation d'un angle quelconque autour de l'axe Oz : l'intensité du champ B ne doit donc pas dépendre de l'angle θ . L'intensité du champ magnétique ne dépend donc que de la distance au fil b .

Considérons le plan d'anti-symétrie $(M, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y) = (M, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_\theta)$. Cette symétrie laisse invariante la géométrie du système et inverse la densité de courant : $\mathbf{j} \rightarrow -\mathbf{j}$. Or, le champ magnétique \mathbf{B} est un tenseur anti-symétrique de rang 2, sa composante orthogonale au plan d'anti-symétrie est donc nulle, et il est contenu dans ce plan. Le champ \mathbf{B} est donc orthoradial, *i.e.* selon \mathbf{e}_θ . On a donc : $\mathbf{B}(M) = B(b) \mathbf{e}_\theta$.

3.18 — En utilisant le théorème d'Ampère sur un contour astucieusement choisi (fig 30), montrez que le champ magnétique vaut :

$$\mathbf{B}(b) = B(b) \mathbf{e}_\theta \quad \text{avec} \quad B(b) = \frac{\mu_0 j s}{2\pi b} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$$

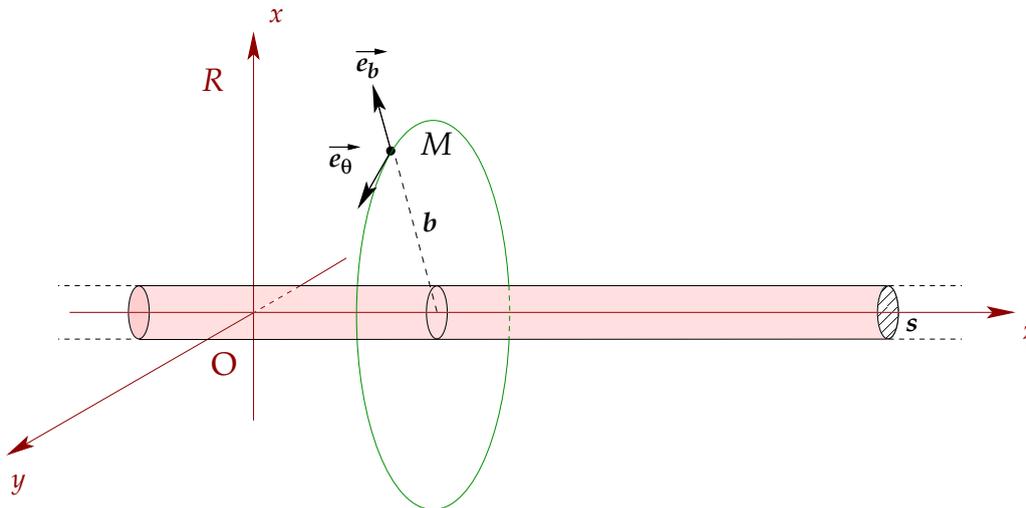


FIGURE 30 – Contour circulaire de rayon b pour le calcul du champ magnétique au point M par le théorème d’Ampère.

Calculons la circulation du champ \mathbf{B} sur un contour circulaire $\partial\mathcal{D}$ défini dans un plan $(M, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y) = (M, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_\theta)$ et centré sur le fil. Tout le long du contour, l’intensité du champ magnétique est constante car elle ne dépend que de b . On a donc :

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_\theta \, d\ell = 2\pi b B(b)$$

Cette circulation est égale au flux du rotationnel du champ \mathbf{B} à travers le contour \mathcal{D} ,

$$\oint_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_\theta \, d\ell = \iint_{\mathcal{D}} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{D}} \mu_0 \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I$$

D’où on déduit :

$$2\pi b B(b) = \mu_0 I \quad \text{soit} \quad B(b) = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}(b) = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \mathbf{e}_\theta$$

3.19 — Montrez que ce résultat est cohérent avec les composantes (B_x, B_y, B_z) que vous avez obtenues précédemment par transformation du tenseur $F^{\mu\nu}$.

Commentez : en quoi le champ magnétique est-il un effet purement relativiste ?

On retrouve la même expression pour le champ magnétique dans le référentiel \mathcal{R} . Le champ magnétique semble dépendre de l’observateur et du référentiel d’étude du système : dans un référentiel où les charges sont en mouvement, B est non-nul ; dans le référentiel qui se déplace avec les charges, le champ B s’annule. On peut ainsi interpréter B comme une manifestation relativiste lié au choix du référentiel d’observation du système.

4. Effet Doppler

En utilisant le quadrivecteur énergie-impulsion du photon, retrouvez la loi de l’effet Doppler relativiste.

Dans un référentiel \mathcal{R} , le quadrivecteur énergie-impulsion d'un photon peut s'écrire :

$$\tilde{\mathbf{p}} = \hbar \tilde{\mathbf{k}} \quad p^\mu = (E/c, \mathbf{p}) \left(\frac{h\nu}{c}, \hbar \mathbf{k} \right) \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{p}}^2 = p_\mu p^\mu = 0$$

Ecrivons ses composantes p'^μ dans un autre référentiel inertiel \mathcal{R}' , en translation uniforme par rapport à \mathcal{R} dans la direction de propagation du photon : $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v \mathbf{e}_x$ (v algébrique) et $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_x$. En utilisant la transformation de Lorentz, on obtient :

$$p'^\mu = [\mathbf{L}]^\mu{}_\nu p^\nu \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} \frac{h\nu'}{c} \\ k'_x \\ k'_y \\ k'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{h\nu}{c} \\ k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{h\nu'}{c} &= \gamma \frac{h\nu}{c} - \beta\gamma \hbar k \\ k'_x &= k' = -\beta\gamma \frac{h\nu}{c} + \gamma \hbar k \\ k'_y &= 0 \\ k'_z &= 0 \end{aligned}$$

D'où on déduit :

$$\nu' = \nu \times \gamma (1 - \beta) = \nu \times \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

On retrouve l'équation de l'effet Doppler relativiste obtenue à l'exercice 1.8.

5. Distribution angulaire de la lumière émise (effet phare)

5.1 — Une source de lumière O' émet des photons de manière isotrope dans son référentiel R' . Cette source lumineuse est animée d'une vitesse $c/2$ par rapport au référentiel R . Étudiez la distribution angulaire des photons dans R autour de la direction Ox (direction du mouvement relatif).

Dans le référentiel \mathcal{R}' de la source, les composantes de la vitesse \mathbf{u} du photon émis selon la direction (θ', ϕ') sont :

$$u'_x = c \cos \theta' \quad u'_y = c \sin \theta' \cos \phi' \quad u'_z = c \sin \theta' \sin \phi'$$

où ϕ' est l'angle azimutal autour de l'axe $Ox' = Ox$.

Dans le référentiel \mathcal{R} , avec $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v \mathbf{e}_x$, les composantes de la vitesse deviennent :

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} = \frac{c \cos \theta' + v}{1 + \frac{vc \cos \theta'}{c^2}} \\ u_y &= \frac{1}{\gamma} \frac{u'_y}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \times \frac{c \sin \theta' \cos \phi'}{1 + \frac{v \cos \theta'}{c^2}} \\ u_z &= \frac{1}{\gamma} \frac{u'_z}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \times \frac{c \sin \theta' \sin \phi'}{1 + \frac{v \cos \theta'}{c^2}} \end{aligned}$$

De manière immédiate, $u_z/u_y = u'_z/u'_y$ et par conséquent $\phi = \phi'$: la direction azimutale autour de Ox est inchangée.

Pour l'angle zénithal θ , on a $u_x = c \cos \theta$, et par conséquent,

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'} > \cos \theta' \quad \text{et par conséquent} \quad \theta < \theta'$$

En particulier, si $\beta = 1/2$,

$$\cos \theta = \frac{1 + 2 \cos \theta'}{2 + \cos \theta'} > \cos \theta'$$

Par exemple, pour $\theta' = \pi/2$, $\theta = \pi/3$: l'ensemble des photons émis dans le demi-espace avant dans le référentiel \mathcal{R}' de la source est émis dans un cône de 120° vers l'avant dans \mathcal{R} .

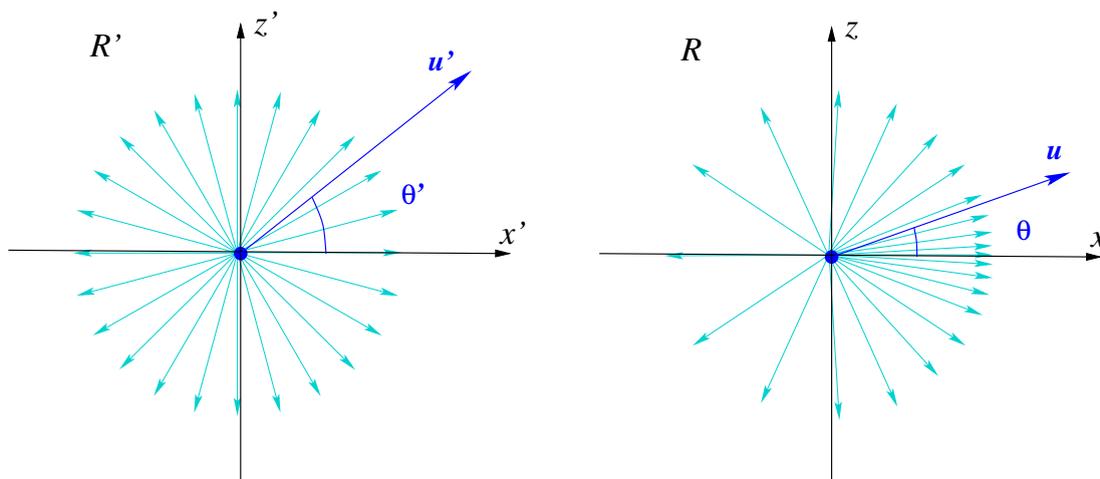


FIGURE 31 – Effet “phare”. Dans le référentiel \mathcal{R}' de la source, les photons sont émis selon une distribution angulaire isotrope. Dans le référentiel \mathcal{R} , les rayons sont concentrés vers l'avant (effet projecteur ou effet phare) et le flux de photons émis par la source en mouvement est plus intense vers l'avant que vers l'arrière.

6. Aberration de la lumière

L'aberration des étoiles est un phénomène découvert par l'astronome James Bradley en 1725 : lorsqu'on observe une étoile au cours de l'année, celle-ci semble décrire une ellipse plus ou moins aplatie selon la latitude de l'étoile. L'angle d'où provient la lumière semble varier avec la vitesse relative de l'observateur, à la manière de la pluie pour un piéton en mouvement.



6.1 — Considérons un observateur lié au soleil qui voit une étoile lointaine dans la direction du pôle de l'écliptique (axe Oz de l'orbite terrestre). On appelle v la vitesse d'un astronome situé sur terre observant la même étoile. Calculez l'angle apparent θ' que fait la direction de l'étoile avec le pôle de l'écliptique pour l'astronome. Faites l'application numérique ($v \simeq 30 \text{ km.s}^{-1}$).

6.2 — Généralisez le résultat précédent pour une étoile inclinée avec un angle θ par rapport au pôle de l'écliptique. Décrivez la trajectoire apparente des étoiles en fonction de θ .

Traisons directement le cas général d'un rayon lumineux incliné d'un angle θ par rapport à la direction Oz , axe de l'écliptique, dans le référentiel (R) du Soleil (supposé galiléen).

Considérons le cas simple d'un observateur en mouvement à la vitesse v parallèle à Ox . Dans le référentiel (R'), les composantes de u sont :

$$u_x = c \sin \theta \quad u_y = 0 \quad u_z = -c \cos \theta$$

Dans le référentiel (R') la composition des vitesses donne :

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} = \frac{c \sin \theta - v}{1 - \frac{vc \sin \theta}{c^2}} \quad u'_y = 0 \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma(v) \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} = \frac{-c \cos \theta}{\gamma(v) \left(1 - \frac{vc \sin \theta}{c^2}\right)}$$

On en déduit l'angle apparent θ' (ou plutôt sa tangente) sous lequel l'étoile apparaît dans le référentiel (R') :

$$\tan \theta' = -\frac{u'_x}{u'_z} = \gamma(v) \frac{\sin \theta - v/c}{\cos \theta}$$

Dans le cas particulier où $\theta = 0$ (étoile au zénith écliptique),

$$\theta' \simeq \tan \theta' = -\gamma(v) \frac{v}{c}$$

Pour une vitesse relative de 30 km/s (Terre), on trouve $\theta' \simeq 10^{-4} \simeq 20 \text{ arcsec}$ pour une étoile au pôle de l'écliptique. Au cours d'une année, une étoile au pôle écliptique décrira un cercle apparent de 20 arcsec de rayon. Pour une étoile plus proche de l'écliptique, l'effet sera plus faible selon la direction Oz mais de même amplitude dans la direction orthogonale (faites un dessin pour vous en convaincre), et décrira donc des ellipses, d'autant plus aplaties que l'étoile est proche de l'écliptique. Pour une étoile située sur l'écliptique, On aura (avec v selon Ox) :

$$\theta = \pi/2 \quad u'_x = c \quad u'_y = 0 \quad u'_z = 0$$

L'effet selon Oz sera nul, et l'étoile oscillera au cours de l'année sur un segment de droite de 40 arcsec de longueur, parallèle à l'écliptique.



FIGURE 32 – Secteur zénithal (télescope pointant au zénith, permettant la mesure de la distance zénithale des étoiles). Conçu pour James Bradley, il est installé à l’observatoire de Greenwich. C’est avec cet instrument que J. Bradley découvrit l’aberration de la lumière et la nutation de l’axe terrestre (photos LLG).

7. Physique des tachyons

Le tachyon est une particule hypothétique dont la vitesse u est supérieure à c . En se basant uniquement sur cette hypothèse, on peut tenter de décrire les propriétés d’une telle particule dans le cadre de la relativité restreinte.

7.1 — Montrez que si $u > c$ dans le référentiel galiléen \mathcal{R} on a alors nécessairement $u' > c$ dans tout autre référentiel inertiel \mathcal{R}' en translation uniforme par rapport à \mathcal{R} avec $v = v(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) < c$.

Considérons un tachyon se déplaçant à la vitesse $u > c$ dans un référentiel \mathcal{R} . Sa vitesse u' mesurée dans un référentiel \mathcal{R}' tel que $v(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v < c$ est donc (en supposant les vitesses u , u' et v colinéaires) :

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \quad \frac{u'}{c} = \frac{\frac{u}{c} - \frac{v}{c}}{1 - \frac{u}{c} \frac{v}{c}}$$

Posons $a = u/c$ et $\beta = v/c$. On a :

$$0 \leq a = \frac{u}{c} > 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \beta = \frac{v}{c} < 1$$

Il est nécessaire de distinguer trois cas selon le signe du dénominateur.



FIGURE 33 – Tachyon en peluche, The Particle Zoo.

a. Si $uv < c^2$, c'est à dire si $a\beta < 1$, le dénominateur $1 - a\beta$ est positif.

Comme $0 \leq \beta < 1$, on en déduit que $1 + \beta \geq 1 > 0$; en multipliant l'inégalité $a > 1$ par $1 + \beta > 0$, on obtient ainsi :

$$a(1 + \beta) > 1 + \beta \quad \text{d'où} \quad a + a\beta > 1 + \beta \quad \text{soit} \quad a - \beta > 1 - a\beta$$

Et par conséquent, comme $1 - a\beta > 0$,

$$\frac{u'}{c} = \frac{\frac{u}{c} - \frac{v}{c}}{1 - \frac{u}{c} \frac{v}{c}} = \frac{a - \beta}{1 - a\beta} > 1 \quad \text{i.e.} \quad u' > c$$

b. Si $uv > c^2$, c'est à dire si $a\beta > 1$, le dénominateur $1 - a\beta$ est négatif.

Comme $a > 1$, alors $1 + a > 2 > 0$. On peut donc multiplier l'inégalité $\beta < 1$ par $(1 + a)$, ce qui donne :

$$\beta(1 + a) < 1 + a \quad \text{d'où} \quad \beta + a\beta < 1 + a \quad \text{soit} \quad a\beta - 1 < a - \beta$$

Et par conséquent, comme $a\beta - 1 > 0$,

$$\frac{a - \beta}{a\beta - 1} > 1 \quad \text{d'où, en multipliant par } -1, \quad \frac{u'}{c} = \frac{a - \beta}{1 - a\beta} < -1$$

C'est à dire : $u' < -c$. Dans ce cas, le tachyon se déplace dans la direction opposée, avec une vitesse supérieure à c en norme.

c. Enfin, si $uv = c^2$, la vitesse u' du tachyon dans le référentiel \mathcal{R}' est infinie.

Pour un tachyon de vitesse $u > c$ dans \mathcal{R} , sa vitesse u' dans \mathcal{R}' est toujours supérieure à c en norme. Un tachyon se déplace donc à une vitesse plus grande que c dans tous les référentiels galiléens.

7.2 — Sur un diagramme d'espace-temps, indiquez les axes x et t du référentiel \mathcal{R} . Indiquez aussi le cône de lumière passé et futur du point-événement choisi comme origine $O(t = 0, x = 0)$ (Par souci de clarté, consacrez une pleine page à ce diagramme qui sera complété au fur et à mesure des questions suivantes).

Voir la figure 34.

7.3 — Sur ce diagramme, dessinez :

- la ligne d'espace-temps d'un objet immobile en $x = x_0$;
- la ligne d'espace-temps d'un objet se déplaçant à la vitesse constante $w < c$;
- la ligne d'espace-temps d'un photon émis vers l'avant au point événement $A(t_A, x_A)$ avec $t_A > 0$ et $x_A > 0$.

Voir la figure 34.

7.4 — Dans le référentiel \mathcal{R} , un tachyon est émis en $A(t = t_A, x = x_A)$, et reçu un peu plus tard en $B(t = t_B, x = x_B)$, avec $t_B > t_A$. Dessinez sa ligne d'univers (attention! souvenez-vous que sa vitesse u est supérieure à c !).

Voir la figure 34.

7.5 — Quelle est la nature de l'intervalle d'espace-temps \widetilde{AB} ?

Posons :

$$\widetilde{\mathbf{AB}} : \begin{pmatrix} \Delta t = c(t_B - t_A) \\ \Delta \mathbf{r} = \mathbf{AB} \end{pmatrix}$$

Dans le référentiel \mathcal{R} , le tachyon se déplace à la vitesse $u > c$. On a donc

$$\widetilde{\mathbf{AB}}^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta \mathbf{r})^2 = (\Delta t)^2(c^2 - u^2) < 0 \quad \text{car } u > c$$

L'intervalle d'espace-temps $\widetilde{\mathbf{AB}}$ est par conséquent de **genre espace** (pas de lien causal possible entre les événements A et B).

7.6 — Montrez que l'on peut toujours trouver un référentiel galiléen \mathcal{R}' avec une vitesse relative $v = v(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$, $v < c$ telle que $t'_B < t'_A$: indiquez la condition sur v pour que tel soit le cas. Dans ce référentiel \mathcal{R}' , la réception du tachyon (événement B) se produit **avant** l'émission du même tachyon (événement A). Dessinez les axes t' et x' de ce référentiel \mathcal{R}' sur votre dessin, afin de faire apparaître qu'effectivement, dans ce référentiel \mathcal{R}' , $t'_B < t'_A$.

Écrivons la transformation de Lorentz des coordonnées $(c\Delta t, \Delta \mathbf{r})$ du quadrivecteur $\widetilde{\mathbf{AB}}$. En particulier, la coordonnée temporelle dans le référentiel \mathcal{R}' s'écrit :

$$t'_B - t'_A = \Delta t' = \gamma(v) \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) = \gamma(v) \Delta t \left(1 - \frac{uv}{c^2} \right)$$

Si $uv/c^2 < 1$, $\Delta t'$ est du même signe que Δt ; par contre, si $uv/c^2 > 1$, c'est à dire si $v/c > c/u$ (possible car $c/u < 1$), $\Delta t'$ sera du signe opposé de celui Δt . Autrement dit, lorsqu'on se place dans un référentiel galiléen \mathcal{R}' en translation uniforme à la vitesse $v > c^2/u$, l'ordre temporel des événements A et B est inversé dans ce référentiel.

Voir la figure 34.

7.7 — Qu'en concluez-vous à propos des tachyons et du principe de causalité? Proposez une interprétation de la succession des événements A et B dans le référentiel \mathcal{R}' .

En se plaçant dans un référentiel galiléen \mathcal{R}' tel que $v(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = v > c^2/u$ (avec toutefois $v < c$), on observe une inversion de l'ordre des événements A (émission du tachyon) et B (réception du tachyon). C'est à priori incompatible avec le principe de causalité. Un moyen de s'en sortir toutefois, est de décrire cette succession d'événements vus dans \mathcal{R}' comme l'émission d'un anti-tachyon en B, suivi de sa réception en A. Par contre, pour conserver la compatibilité avec le principe de causalité, il est impératif que le tachyon ne transporte aucune information.

7.8 — On s'intéresse maintenant à la dynamique des tachyons. Écrivez l'énergie d'un tachyon de vitesse $u > c$ en fonction de sa masse au repos m et de sa vitesse u . Exprimée ainsi, son énergie est imaginaire, mais que pouvez-vous dire du comportement de $|E(u)|$ en fonction de u ? Combien d'énergie faut-il fournir pour faire ralentir un tachyon jusqu'à $u = c$? Pour un tachyon, comment évolue son énergie (ou plutôt le module de son énergie) lorsqu'il accélère?

L'énergie d'un tachyon de vitesse u s'écrit :

$$E(u) = \gamma(u)mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Comme $u > c$, le dénominateur est imaginaire : on peut encore écrire l'énergie sous la forme :

$$E(u) = i \frac{mc^2}{\sqrt{\frac{u^2}{c^2} - 1}}$$

On remarque immédiatement que le module $|E(u)|$ diminue quand la vitesse du tachyon augmente; réciproquement, $|E(u)|$ croît quand u décroît; de plus,

$$\lim_{u \rightarrow c} |E(u)| = \lim_{u \rightarrow c} \frac{mc^2}{\sqrt{\frac{u^2}{c^2} - 1}} = +\infty$$

l'énergie d'un tachyon tend vers l'infini quand sa vitesse tend vers c : il faudrait donc fournir une énergie infinie pour ralentir un tachyon jusqu'à $u = c$.

7.9 — Qu'en concluez-vous sur la physique de l'hypothétique tachyon dans le cadre de la relativité restreinte ?

Les propriétés de l'hypothétique tachyon sont particulièrement étranges ; la relativité restreinte prédit en particulier que selon le référentiel, l'ordre des événements le long de la trajectoire d'un tachyon puisse être inversé, ce qui est incompatible avec le principe de causalité. L'existence effective de tachyons est donc un peu douteuse. . .

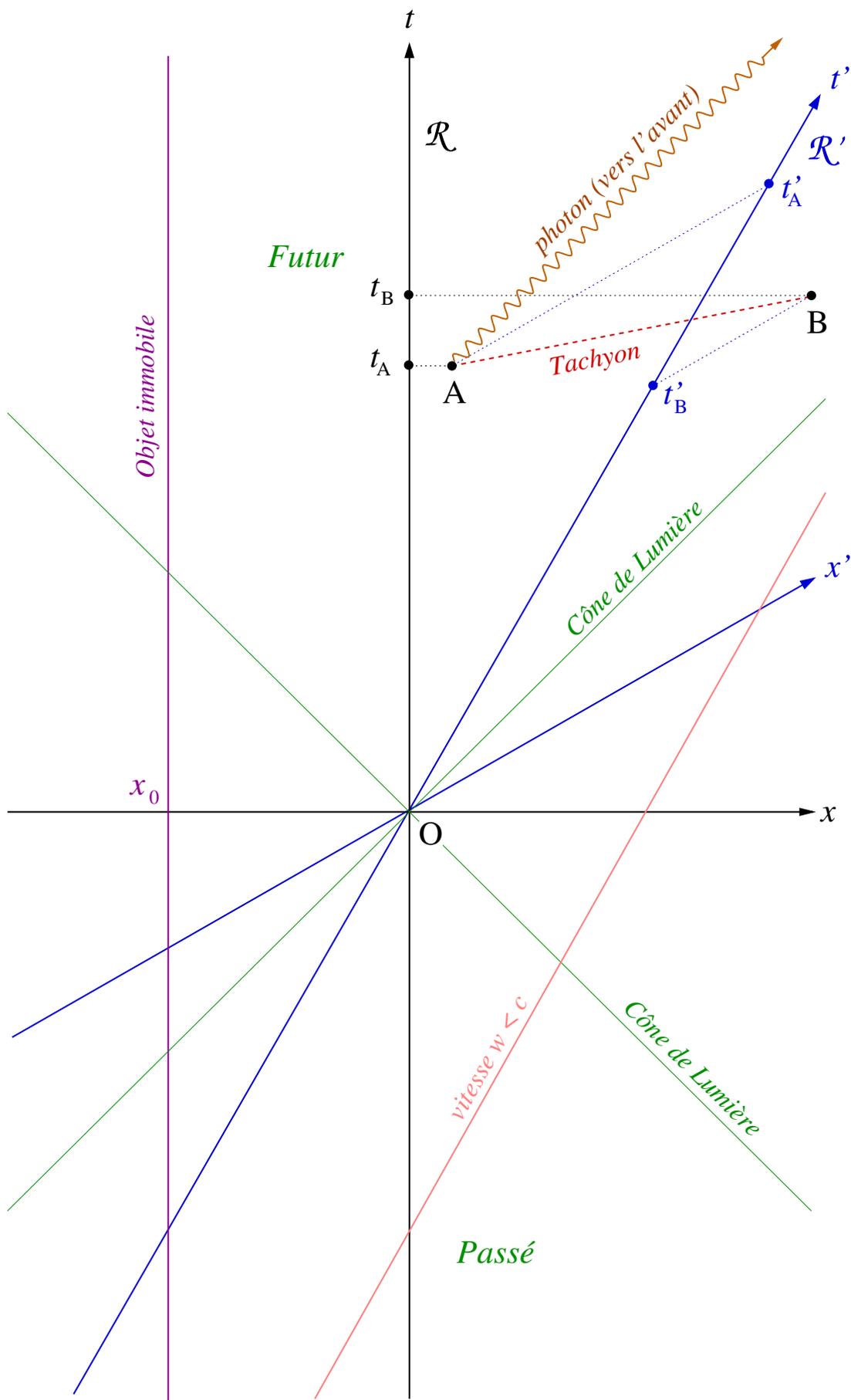


FIGURE 34 – Diagramme d'espace-temps; trajectoire des tachyons

